doubling 測度について

テロ　キルペライネン
ペッカ　コスケラ
正　岡　弘　照

(平成 24 年 9 月 25 日提出
平成 24 年 11 月 30 日修正)

要　旨

d 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ 上の測度の全体 $\mathcal{M}$ は加法および正のスカラー倍に関して，閉じていることはよく知られている．$\mathcal{M}$ 上では結びと交わりが定義でき，それらに関して，$\mathcal{M}$ は閉じている．d 次元ユークリッド空間上の doubling 測度の全体 $\mathcal{M}_2$ は，加法，正のスカラー倍および結びに関して，閉じているが，交わりに関して，閉じていない．

キーワード：doubling 測度，交わり，quasisymmetric, 擬等角写像，絶対連続

1. $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$ を d 次元ユークリッド空間とする．$\mathcal{M}$ で $\mathbb{R}^d$ 上の測度の全体を記すことにする．$B(x, r)$ を中心 $x(\in \mathbb{R}^d)$, 半径 $r(> 0)$ をもつ $\mathbb{R}^d$ 内の球（の内部）とする．中心や半径が既知の際には，略して，B と記すことにする．$B = B(x, r)$ に対して，$B(x, 2r)$ を $2B$ と記すことにする．このとき，

定義 1. $\mu \in \mathcal{M}$ とする．このとき，ある定数 C がとれて，すべての球 B に対して，

$$\mu(2B) \leq C\mu(B)$$

がなりたつとき，μ は **doubling 測度**といわれる．

$\mathbb{R}^d$ 上の doubling 測度の全体を $\mathcal{M}_2$ と記すことにする．$\mathcal{B}$ を $\mathbb{R}^d$ 上の Borel 集合の全体とする．このとき，

定義 2. $\mu,\ \nu \in \mathcal{M},\ \alpha > 0$ とする．このとき，

$$(\mu + \nu)(E) := \mu(E) + \nu(E)\ (E \in \mathcal{B}),$$

$$(\alpha\mu)(E) := \alpha\mu(E)\ (E \in \mathcal{B}).$$

定理 1. $\mathcal{M}_2$ は 定義 2 で定めた各演算について，閉じている．

定義 3. $\mu,\ \nu \in \mathcal{M}$ とする．このとき，

$$(\mu \vee \nu)(E) := \sup\{\mu(F) + \nu(E \setminus F) \mid F \subset E \text{ かつ } F \in \mathcal{B}\},$$

$$(\mu \wedge \nu)(E) := \inf\{\mu(F) + \nu(E \setminus F) \mid F \subset E \text{ かつ } F \in \mathcal{B}\}.$$

命題. $\mu, \nu \in \mathcal{M}$ とする．このとき，$\mu \vee \nu, \mu \wedge \nu \in \mathcal{M}$ である．

定理 2. $\mathcal{M}_2$ は 定義 3 で定めた演算 $\vee$ について，閉じている．

定理 3. $\mathcal{M}_2$ は 定義 3 で定めた演算 $\wedge$ について，閉じていない．

この研究ノートでは，2 節で，定理 1 の証明を与える．3 節で，命題の証明を与える．4 節で，定理 2 の証明を与える．5 節で，定理 3 の証明を与える．

2. この節では，定理 1 の証明を与える．$\mu, \nu \in \mathcal{M}_2$, $\alpha > 0$ とする．このとき，$\mu + \nu$ および $\alpha\mu$ が $\mathbb{R}^d$ 上の測度になることはよく知られている．仮定から，ある 2 定数 C_μ, C_ν が存在して，すべての球 B に対して，

$$\mu(2B) \le C_\mu \mu(B), \qquad \nu(2B) \le C_\nu \nu(B)$$

がなりたつ．$C_{\mu+\nu} := \max\{C_\mu, C_\nu\}$ とおくと，

$$\begin{aligned}(\mu + \nu)(2B) &= \mu(2B) + \nu(2B) \le C_\mu \mu(B) + C_\nu \nu(B)\\ &\le C_{\mu+\nu}(\mu(B) + \nu(B)) = C_{\mu+\nu}(\mu + \nu)(B).\end{aligned}$$

よって，$\mu + \nu \in \mathcal{M}_2$.

また，

$$(\alpha\mu)(2B) = \alpha\mu(2B) \le \alpha C_\mu \mu(B) = C_\mu(\alpha\mu)(B).$$

よって，$\alpha\mu \in \mathcal{M}_2$.

以上より，定理 1 の証明が完成した．

3. この節では，命題の証明を与える．$\mu, \nu \in \mathcal{M}$ とする．

補題 1. $\mu \vee \nu, \mu \wedge \nu$ は $\mathbb{R}^d$ 上の有限加法測度である．

証明．$E_j \in \mathcal{B}$ $(j = 1, 2)$ かつ $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ とするとき，

$$(\mu \vee \nu)(E_1 \cup E_2) = (\mu \vee \nu)(E_1) + (\mu \vee \nu)(E_2), \tag{3.1}$$

$$(\mu \wedge \nu)(E_1 \cup E_2) = (\mu \wedge \nu)(E_1) + (\mu \wedge \nu)(E_2) \tag{3.2}$$

を示せば，十分である．(3.2) は (3.1) と同様の論法で示すことができるので，(3.1) のみ示すこ

とにする．$F_j = F \cap E_j$ $(j = 1, 2)$ とおく．明らかに，$F_j \subset E_j$ $(j = 1, 2)$, $F_1 \cup F_2 = F$, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ かつ $F_j \in \mathcal{B}$ $(j = 1, 2)$ である．

$$\begin{aligned}
&(\mu \vee \nu)(E_1 \cup E_2) \\
&= \sup\{\mu(F) + \nu(E_1 \cup E_2 \setminus F) \mid F \subset E_1 \cup E_2 \text{ かつ } F \in \mathcal{B}\} \\
&= \sup\{\mu(F_1 \cup F_2) + \nu((E_1 \setminus F) \cup (E_2 \setminus F)) \mid F \subset E_1 \cup E_2 \text{ かつ } F \in \mathcal{B}\} \\
&= \sup\{\mu(F_1) + \mu(F_2) + \nu(E_1 \setminus F) + \nu(E_2 \setminus F) \mid F \subset E_1 \cup E_2 \text{ かつ } F \in \mathcal{B}\} \\
&= \sup\{\mu(F_1) + \mu(F_2) + \nu(E_1 \setminus F_1) + \nu(E_2 \setminus F_2) \mid F_j \subset E_j \text{ かつ } F_j \in \mathcal{B}\ (j = 1, 2)\} \\
&\leq \sup\{\mu(F_1') + \nu(E_1 \setminus F_1') \mid F_1' \subset E_1 \text{ かつ } F_1' \in \mathcal{B}\} \\
&\quad + \sup\{\mu(F_2') + \nu(E_2 \setminus F_2') \mid F_2' \subset E_2 \text{ かつ } F_2' \in \mathcal{B}\} \\
&= (\mu \vee \nu)(E_1) + (\mu \vee \nu)(E_2)
\end{aligned}$$

よって，

$$(\mu \vee \nu)(E_1 \cup E_2) \leq (\mu \vee \nu)(E_1) + (\mu \vee \nu)(E_2) \tag{3.3}$$

をうる．

$\mu \vee \nu$ の定義より，任意の正数 ε に対して，適当な $F_{j,\varepsilon} \in \mathcal{B}$ $(j = 1, 2)$ がとれて，

$$F_{j,\varepsilon} \subset E_j \text{ かつ } (\mu \vee \nu)(E_j) \leq \mu(F_{j,\varepsilon}) + \nu(E_j \setminus F_{j,\varepsilon}) + \varepsilon/2\ (j = 1, 2)$$

をみたす．$F_\varepsilon = F_{1,\varepsilon} \cup F_{2,\varepsilon}$ とおくと，$F_\varepsilon \in \mathcal{B}$ かつ $F_\varepsilon \subset E_1 \cup E_2$ である．よって，

$$\begin{aligned}
&(\mu \vee \nu)(E_1) + (\mu \vee \nu)(E_2) \\
&\leq \mu(F_{1,\varepsilon}) + \nu(E_1 \setminus F_{1,\varepsilon}) + \varepsilon/2 + \mu(F_{2,\varepsilon}) + \nu(E_2 \setminus F_{2,\varepsilon}) + \varepsilon/2 \\
&= \mu(F_{1,\varepsilon} \cup F_{2,\varepsilon}) + \nu((E_1 \setminus F_{1,\varepsilon}) \cup (E_2 \setminus F_{2,\varepsilon})) + \varepsilon \\
&= \mu(F_\varepsilon) + \nu((E_1 \setminus F_\varepsilon) \cup (E_2 \setminus F_\varepsilon)) + \varepsilon \\
&= \mu(F_\varepsilon) + \nu((E_1 \cup E_2) \setminus F_\varepsilon) + \varepsilon \\
&\leq (\mu \vee \nu)(E_1 \cup E_2) + \varepsilon
\end{aligned}$$

ε は任意であるので，

$$(\mu \vee \nu)(E_1) + (\mu \vee \nu)(E_2) \leq (\mu \vee \nu)(E_1 \cup E_2) \tag{3.4}$$

をうる．よって，(3.3) および (3.4) により，

$$(\mu \vee \nu)(E_1) + (\mu \vee \nu)(E_2) = (\mu \vee \nu)(E_1 \cup E_2)$$

をうる．

命題の証明．補題 1 より，$\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ でかつ，$i \neq j$ のとき，$E_i \cap E_j = \emptyset$ をみたす $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ に対して，

$$(\mu \vee \nu)(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} (\mu \vee \nu)(E_j), \tag{3.5}$$

$$(\mu \wedge \nu)(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} (\mu \wedge \nu)(E_j) \tag{3.6}$$

を示せば十分である．(3.6) は (3.5) と同様の論法で示すことができるので，(3.5) のみ示すことにする．$\cup_{j=1}^{\infty} E_j = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n \cup \left(\cup_{j=n+1}^{\infty} E_j\right)$ であるので，補題 1 をくりかえし，用いることにより，

$$\begin{aligned} &(\mu \vee \nu)(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) \\ &= (\mu \vee \nu)(E_1) + (\mu \vee \nu)(E_2) + \cdots + (\mu \vee \nu)(E_n) + (\mu \vee \nu)(\cup_{j=n+1}^{\infty} E_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (\mu \vee \nu)(E_j) + (\mu \vee \nu)(\cup_{j=n+1}^{\infty} E_j) \end{aligned} \tag{3.7}$$

をうる．この式から，

$$(\mu \vee \nu)(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) \geq \sum_{j=1}^{n} (\mu \vee \nu)(E_j)$$

をうる．n は任意であるので，

$$(\mu \vee \nu)(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) \geq \sum_{j=1}^{\infty} (\mu \vee \nu)(E_j) \tag{3.8}$$

をうる．他方，$\mu \vee \nu$ の定義より，$\mu \vee \nu \leq \mu + \nu$ がなりたつことに注意すると，任意の正数 ε に対して，ある自然数 n_0 がとれて，

$$\mu(\cup_{j=n_0+1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=n_0+1}^{\infty} \mu(E_j) \leq \varepsilon/2,$$
$$\nu(\cup_{j=n_0+1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=n_0+1}^{\infty} \nu(E_j) \leq \varepsilon/2$$

がなりたつことから，

$$(\mu \vee \nu)(\cup_{j=n_0+1}^{\infty} E_j) \leq \varepsilon \tag{3.9}$$

をうる．よって，(3.7) および (3.9) より，

$$(\mu \vee \nu)(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j=1}^{n_0} (\mu \vee \nu)(E_j) + \varepsilon \leq \sum_{j=1}^{\infty} (\mu \vee \nu)(E_j) + \varepsilon. \tag{3.10}$$

(3.10) の ε は任意であるので，

$$(\mu \vee \nu)(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} (\mu \vee \nu)(E_j). \tag{3.11}$$

(3.8) および(3.11) より，

$$(\mu \vee \nu)(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} (\mu \vee \nu)(E_j)$$

をうる．

4. この節では，定理 2 の証明を与える．$\mu, \nu \in \mathcal{M}_2$ とする．仮定から，ある 2 定数 C_μ, C_ν が存在して，すべての球 B に対して，

$$\mu(2B) \leq C_\mu \mu(B), \qquad \nu(2B) \leq C_\nu \nu(B)$$

がなりたつ．$C_{\mu\vee\nu} := 2\max\{C_\mu, C_\nu\}$ とおく．$\mu\vee\nu$ の定義より，$\mu \leq \mu\vee\nu$, $\nu \leq \mu\vee\nu$ および $\mu\vee\nu \leq \mu+\nu$ がなりたつことに注意すると，

$$\begin{aligned}
(\mu \vee \nu)(2B) &\leq \mu(2B) + \nu(2B) \\
&\leq C_\mu \mu(B) + C_\nu \nu(B) \\
&\leq \max\{C_\mu, C_\nu\}(\mu(B) + \nu(B)) \\
&\leq \max\{C_\mu, C_\nu\}((\mu \vee \nu)(B) + (\mu \vee \nu)(B)) \\
&= C_{\mu\vee\nu}(\mu \vee \nu)(B)
\end{aligned}$$

よって，定理 2 は示された．

5. この節では，定理 3 の証明を与える．

定義 4. 連続な狭義単調増加関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $(k-)$**quasisymmetric** であるとは，異なるすべてのx, $x+t$, $x-t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\frac{1}{k} \leq \frac{f(x+t) - f(x)}{f(x) - f(x-t)} \leq k$$

がなりたつことである．

補題 2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $(k-)$quasisymmetric 同相写像であるとき，$d\mu = df$ は $\mathbb{R}^2$ 上の doubling 測度である．ここで，df は 狭義単調増加関数 f から誘導された測度とする．

証明. 球 $B := (x - r, x + r)(x \in \mathbb{R}, r > 0)$ をとる．f が $(k-)$quasisymmetric であるので，

$$
\begin{aligned}
\mu(2B) &= f(x + 2r) - f(x - 2r) \\
&= (f(x + 2r) - f(x + r)) + (f(x + r) - f(x - r)) + (f(x - r) - f(x - 2r)) \\
&\leq k(f(x + r) - f(x)) + (f(x + r) - f(x - r)) + k(f(x) - f(x - r)) \\
&= (1 + k)(f(x + r) - f(x - r)) = (1 + k)\mu(B)
\end{aligned}
$$

よって，μ は doubling 測度である．

定理 T(cf. [3]). 以下の特性 (T) を満たす quasisymmetric 同相写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在する．

(T) ある Borel 集合$N \subset \mathbb{R}$ がとれて，$f(N)$ および $\mathbb{R} \setminus N$ の 1 次元 Lebesgue 測度が 0 である．

定義 5. 向き付けを保つ同相写像 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が $(K-)$**擬等角** であるとは，以下の 3 条件を満足することである．

(1) $\mathbb{R}$ 上の 1 次元 Lebesgue 測度に関して，ほとんどすべての $y \in \mathbb{R}$ に対して，$x \mapsto F(x, y)$ が絶対連続である．

(2) $\mathbb{R}$上の 1 次元 Lebesgue 測度に関して，ほとんどすべての $x \in \mathbb{R}$ に対して，$y \mapsto F(x, y)$ が絶対連続である．

(3) $\mathbb{R}^2$ 上の 2 次元 Lebesgue 測度に関して，ほとんどすべての $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して，

$$\max_{\theta \in \mathbb{R}} |\partial_\theta F(x, y)| \leq K \min_{\theta \in \mathbb{R}} |\partial_\theta F(x, y)|$$

がなりたつ．ここで，$\mathbb{R}^2$ 上の 2 次元 Lebesgue 測度に関して，ほとんどすべての (x, y) に対して，$\partial_\theta F(x, y) := e^{-i\theta}(\partial_x F(x, y) \cos\theta + \partial_y F(x, y) \sin\theta)$ とおく．

定理 AB(cf. [1]). H を $\mathbb{R}^2$ の上半平面とする．このとき，以下の 2 つの条件は同値である．

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $(k-)$quasisymmetric 同相写像とする．

(2) 同相写像 $F : \overline{H} \to \overline{H}$($\overline{H}$は Hの閉包である) が存在して，$F|_H : H \to H$ が擬等角写像であり，$F|_{\mathbb{R}} = f$ をみたす（ここで，$F|_{\mathbb{R}}$ は正確には，$F|_{\mathbb{R}\times\{0\}}$ と記すべきであるが，以後，$\mathbb{R}$ は $\mathbb{R} \times \{0\}$ の意味で用いる場合がある）．

定理 4 の証明. 以下の議論では，$\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{C}$ とを同一視することにする．f を定理 T の特性 (T) をもつ quasisymmetric 同相写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とし，H を $\mathbb{R}^2$ の上半平面とする．定理 AB により，同相写像 $F : \overline{H} \to \overline{H}$ が存在して，$F|_H : H \to H$ が擬等角写像であり，$F|_{\mathbb{R}} = f$ をみたす．
$\varphi(z) = \begin{cases} F(z)(z \in \overline{H}) \\ \overline{F(\overline{z})}(z \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{H}) \end{cases}$ （$\overline{z}$ は z の共役複素数である）とおくと，擬等角写像に関する鏡像原理（cf. [2, p.47]）より，$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は擬等角写像になる．このとき，$\varphi|_{\mathbb{R}} = f$ である．

$I := [0, 1]$ および $D := B((1/2, 0), 1/2)$ とおく．χ_D を D の定義関数とする．$\mu_\varphi := \frac{\partial\varphi/\partial\overline{z}}{\partial\varphi/\partial z}$, $\tilde{\mu_\varphi} :=$

$\mu_\varphi \chi_D$ とおく．擬等角写像の存在定理（cf. [2, V 章]）により，$\frac{\partial G}{\partial \bar{z}} = \tilde{\mu_\varphi} \frac{\partial G}{\partial z}$ をみたす擬等角写像 $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が存在する．$G(H)$ は単連結領域であるので，Riemann の写像定理により，$G(H)$ を H の上に写す等角写像 F_1 が存在する．Carathéodory の定理より，F_1 は $\partial G(H)$ 上に連続的拡張をもつ．この連続的拡張を同じ記号 F_1 で記すことにする．$F_1 : \overline{G(H)} \to \overline{H}$ は同相写像であることに注意する．したがって，$F_1 \circ G : \overline{H} \to \overline{H}$ は同相写像であり，$F_1 \circ G|_H : H \to H$ は擬等角写像である．よって，定理 AB より，$F_1 \circ G|_{\mathbb{R}}$ は$\mathbb{R}$ 上の quasisymmetric 同相写像である．$d\mu = d(F_1 \circ G|_{\mathbb{R}})$, $d\nu = dm$ とおく．ここで，$d(F_1 \circ G|_{\mathbb{R}})$ は狭義単調増加関数 $F_1 \circ G|_{\mathbb{R}}$ よって，誘導された $\mathbb{R}$ 上の測度のとし，dm は $\mathbb{R}$ 上の通常の 1 次元 Lebesgue 測度とする．このとき，補題 2 より，$d\mu$ は doubling 測度であり，$d\nu$ が doubling 測度であることは明らかである．また，$d\mu$ が I 上で dm に関して，特異測度であるが，$\mathbb{R} \setminus I$ 上で dm に関して，絶対連続であることがわかる．実際，これをみるために，

$$\psi(z) = \begin{cases} F_1 \circ G(z) \ (z \in \overline{H}) \\ \overline{F_1 \circ G(\overline{z})} \ (z \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{H}) \end{cases} \quad \text{および } \varphi_1 := \psi \circ G^{-1} \text{ とおく．}$$

擬等角写像に関する鏡像原理より，$\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は擬等角写像であり，したがって，$\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は擬等角写像である．また，$\varphi_1|_{\overline{G(H)}} = F_1$ である．$\tilde{\mu_\varphi}|_{\mathbb{R}^2 \setminus D} = 0$ であるので，G は $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ 上の等角写像である．したがって，

$\psi|_{H \setminus \overline{D}} = F_1 \circ G|_{H \setminus \overline{D}} : H \setminus \overline{D} \to (\psi|_{H \setminus \overline{D}})(H \setminus \overline{D})$ は全射等角写像であり，

$\psi(\mathbb{R} \setminus I) = (F_1 \circ G)(\mathbb{R} \setminus I) \subset \mathbb{R}$ であるので，ψ の定義およびSchwarz の鏡像原理により，$\psi|_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}}$ は $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ 上，正則である．よって，φ_1 は $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{G(D)}$ で，正則である．したがって，$\varphi_1 \circ G|_{\mathbb{R}} = F_1 \circ G|_{\mathbb{R}}$ は $\mathbb{R} \setminus I$ 上，解析的であり，dm に関して絶対連続である．$d\mu$ は $\mathbb{R} \setminus I$ 上，dm に関して，絶対連続である．

$\Phi := G \circ \varphi^{-1}$ とおく．D 上で，$\mu_\varphi = \mu_G = \mu_{\Phi \circ \varphi} = \frac{\mu_\varphi + \mu_\Phi \circ \varphi e^{-2i \arg \varphi_z}}{1 + \mu_\varphi \mu_\Phi \circ \varphi e^{-2i \arg \varphi_{\bar{z}}}}$ であるので，D 上，

$$\mu_\varphi (1 + \mu_\varphi \mu_\Phi \circ \varphi e^{-2i \arg \varphi_{\bar{z}}}) = \mu_\varphi + \mu_\Phi \circ \varphi e^{-2i \arg \varphi_z}.$$

この式を整理すると，D 上，$|\mu_\varphi|^2 \mu_\Phi \circ \varphi = \mu_\Phi \circ \varphi$. したがって，$|\mu_\varphi| < 1$ に注意すると，D 上，$\mu_\Phi \circ \varphi = 0$ すなわち，$\varphi(D)$ 上，$\mu_\Phi = 0$ をうる．よって，Φ は $\varphi(D)$ 上の等角写像であるので，$\varphi_1 \circ \Phi|_{\varphi(D \cap H)}$ は $\varphi(D \cap H)$ 上の等角写像である．$\varphi_1 \circ \Phi = (\psi \circ G^{-1}) \circ (G \circ \varphi^{-1}) = \psi \circ \varphi^{-1}$ より，$z \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{H}$ に対して，

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_1 \circ \Phi(\overline{z})} = \overline{\psi \circ \varphi^{-1}(\overline{z})} = \overline{\psi(\varphi^{-1}(\overline{z}))} &= \overline{\psi(\overline{\varphi^{-1}(z)})} \\ &= \overline{\overline{\psi(\varphi^{-1}(z))}} = \psi(\varphi^{-1}(z)) = \varphi_1 \circ \Phi(z) \end{aligned}$$

であり，$\varphi_1 \circ \Phi(\varphi(I)) = (\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(I)) = \psi(I) \subset \mathbb{R}$ に注意すると，Schwarz の鏡像原理により，$\varphi_1 \circ \Phi$ は $\varphi(D)$ で正則である．よって，$F_1 \circ \Phi|_{F(I \cap D)} = \varphi_1 \circ \Phi|_{\varphi(I \cap D)}$ は区間 $F(I \cap D) = \varphi(I \cap D)$ 上，解析的であり，$\varphi_1 \circ \Phi$ は $\mathbb{R}^2$ 上，単射であるので，$F_1 \circ \Phi|_{F(I)}$ は $F(I)$ 上，絶対連続である．したがっ

て，$F|_{\mathbb{R}} = f$ は I 上，特性 (T) をもつので，$F_1 \circ G|_{\mathbb{R}} = F_1 \circ \Phi \circ F|_{\mathbb{R}}$ に注意すると，$d\mu$ が I 上で，dm に関して，特異測度であることがわかる．

いま，$B := (0, 1/2)$ とおく．このとき，ある$N \subset B$ がとれて，$\nu(B \setminus N) = m(B \setminus N) = 0$ かつ $\mu(N) = 0$ であるので，$\mu \wedge \nu$ の定義より，$(\mu \wedge \nu)(B) \leq \mu(N) + \nu(B \setminus N) = 0$ すなわち，$(\mu \wedge \nu)(B) = 0$. 一方，$F_1 \circ G|_{\mathbb{R}}$ は $\mathbb{R}$ 上，連続で狭義単調増加であり，$\mathbb{R} \setminus I$ 上，解析的であるので，ある 3 数 x_0, x_1 $(-1/4 < x_0 < x_1 < 0)$ および$c(> 0)$ がとれて，$\frac{dF_1 \circ G|_{\mathbb{R}}}{dm}(x) = \frac{dF_1 \circ G|_{\mathbb{R}}}{dx}(x) > c$ $(x_0 < x < x_1)$ がなりたつ．よって，$2B = (-1/4, 3/4)$ であるので，

$$(\mu \wedge \nu)(2B) = (\mu \wedge \nu)(2B \setminus I) = (\mu \wedge \nu)((-1/4, 0)) > \min\{c, 1\}(x_1 - x_0) > 0.$$

このことは，$\mu \wedge \nu$ が doubling 測度でないことを意味する．したがって，$d = 1$ に対しては，定理 3 の主張がなりたつ．以下では，$d > 1$ とする．$d = 1$ のときの証明で用いた μ を μ_1 と記すことにする．$\mathbb{R}^d$ の直交座標軸を x_j 軸 $(j = 1, \cdots, d)$ と記すことにし，$d\mu_1$ を x_1 軸上の測度とする．各 x_j 軸 $(j = 1, \cdots, d)$ 上の通常の 1 次元 Lebesgue 測度を dx_j $(j = 1, \cdots, d)$ と記すことにする．$d\mu := d\mu_1 \times dx_2 \times dx_3 \times \cdots \times dx_d$ および$d\nu := dx_1 \times dx_2 \times dx_3 \times \cdots \times dx_d$ とおく．ここで，$d\mu_1 \times dx_2 \times dx_3 \times \cdots \times dx_d$ は$d\mu_1$，dx_2，$dx_3, \cdots$，dx_d の積測度を表す．このとき，$B := B((1/4, 1/4, \cdots, 1/4), 1/4)$ とおくと，$d = 1$ のときと，同様の論法により，$(\mu \wedge \nu)(B) = 0$ かつ $(\mu \wedge \nu)(2B) > 0$ がわかる．したがって，$\mu \wedge \nu$ が doubling 測度でない．以上により，定理 3 の証明が完成した．

謝　辞

この研究は 著者 正岡弘照が本学の在外研究員として，ユヴァスキュラ大学数学統計学科に滞在中に，Kilpeläinen 教授および Koskela 教授となされた共同研究である．筆者はユヴァスキュラ大学数学統計学科の研究支援並びに京都産業大学の研究および経済的支援に厚く感謝の意を表する．また，査読者の親切な助言，並びに，定理 3 の証明における著者の致命的ではないが，論理的な誤りの指摘（それにより，定理 3 の証明を修正することができた）に対して，感謝の意を表する．

参 考 文 献

[1] A. Beurling and L. Ahlfors, *The boundary correspondance under quasiconformal mappings*, Acta Math., 96 (1956), 125–142.

[2] O. Lehto and K. I. Virtanen, *Quasiconformal mappings in the plane*, Springer, 1973.

[3] P. Tukia, *Hausdorff dimension and quasisymmetric mappings*, Math. Scad., 65 (1989), 152–160.

On doubling measures

Tero KILPELÄINEN
Pekka KOSKELA
Hiroaki MASAOKA

Abstract

It is well-known that the set $\mathcal{M}$ of measures on $d-$dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^d$ is closed under addition and positive scalar multiplication. In $\mathcal{M}$ we can define two operations meet and join and also it is closed under join and meet, The set $\mathcal{M}_2$ of doubling measures on $\mathbb{R}^d$ is closed under additon, positive scalar multiplication and join. However, $\mathcal{M}_2$ is not closed under meet.

Keywords: doubling measues, meet, quasisymmetric, quasiconformal mappings, absolutely continuous