開 Riemann 面上の Heins 型定理について

石田久教授の古稀を祝して

正　岡　弘　照

要　旨

F を Green 関数をもつ開 Riemann 面とし，Δ_1 を F の minimal Martin 境界とし，$D(\subset F)$ を D の相対境界 ∂D がコンパクトでなく，相対コンパクトでない正則領域とし，
$\Delta_1(D)=\{\zeta\in\Delta_1|F\setminus D$ が ζ で *minimally thin* である $\}$ とおくとき，D 上の非負値調和関数で ∂D 上では 0 をとる任意の 2 つの関数の差が各 $\zeta\in\Delta_1(D)$ で同一の minimal fine 極限をもつならば，$\Delta_1(D)$ が 1 点のみからなることを示す。

キーワード: 開 Riemann 面，minimal Martin 境界，minimally thin，非負値調和関数，minimal fine 極限

1. 導入

R を Kerékjártó-Stoïlow の意味の R の理想境界が 1 つである Green 関数をもたない開 Riemann 面とする。Kerékjártó-Stoïlow の意味の R のコンパクト化の詳細については，[4]，[12] を参照してほしい。U を R の相対コンパクト領域であり，∂U は有限個の解析曲線からなるものとする。$S:=R\setminus\bar{U}$（ここで，$\bar{U}$ は R における U の閉包である）とおく。Heins[9] は次を示した。

定理 A. ∂U で 0 をとる S 上のすべての有界調和関数が S の理想境界で極限値をもつならば，R の minimal Martin 境界は 1 点からなる。

この論文では，以下の記号を用いることにする。

F を Green 関数をもつ開 Riemann 面とする。S^+ によって，F 上の非負値優調和関数の集合を表し，HP_+ によって，F 上の非負値調和関数の集合を表し，HB_+ によって，F 上の有界非負値調和関数の集合を表すことにする。$D(\subset F)$ をその相対境界 ∂D がコンパクトでなく，相対コンパクトでない正則領域とする。ここで，正則領域とはすべての D の相対境界点が（Dirichlet 問題の意味で）**正則 (regular)** であることである。

$H(D)$ によって，D 上の調和関数の全体を表す。

$HP_{+,0}(D):=\{h\in H(D)\mid D$ 上，$h\geq 0$ かつ ∂D 上，$h=0\}$，

$HB_{+,0}(D):=\{h\in HP_{+,0}(D)\mid D$ 上，h は有界である $\}$，

$HP_0(D):=\{h_1-h_2\mid h_j\in HP_{+,0}(D)(j=1,2)\}$ とおく。

$s\in S^+$ と $E\subset F$ に対して，$\hat{R}^E_s$ によって，s の E 上への balayage（掃散）を表すことにする (cf. [1])。

開集合 $U(\subset F)$ とその相対境界 ∂U 上の境界値関数 f に対して，Perron-Wiener-Brelot の意味の Dirichlet 解を H^U_f で表すことにする (cf. [4,3 章])。ここで，f は，必ずしも ∂U 上，連続でなくてもよいことを注意しておく。balayage と Dirichlet 解の関係としては次の補題が知られている。

補題 B(cf. [4,Satz 4.7 かつ Satz 4.8]). $s \in S^+$ とし，$U(\subset F)$ を領域とする。このとき，

$$\hat{R}_s^{F\setminus U}(x) = \begin{cases} H_s^U(x) & (x \in U) \\ u(x) & (x \in (F \setminus U)^\circ) \end{cases} .$$

ここで，$(F \setminus U)^\circ$ は $F \setminus U$ の内包を表す。

この論文の構成は以下のとおりである。2 節で主要な結果の証明に使用される Martin 理論を述べる。3 節で主要な結果を述べ，その証明を与える。付録では，D の理想境界内に属する Minimal Martin 境界 $\Delta_1(D)$(cf. 2 節) の点の個数の計算方法を与えた。

2. Martin コンパクト化

F を Green 関数をもつ開 Riemann 面とする。$\zeta \in F$ に対して，$g_\zeta(z)$ を ζ で極をもつ Green 関数とする (cf. [4])。$z_0 \in F$ を固定しておく。$k_\zeta(z) = \begin{cases} \frac{g_z(\zeta)}{g_{z_0}(\zeta)} & \zeta \neq z_0 \\ 1 & z = \zeta = z_0 \\ 0 & \zeta = z_0, z \neq z_0 \end{cases}$ とおく。F のコンパクト化 X で，関数族 $\mathcal{M} := \{F \in \zeta \mapsto k_\zeta(z) \mid z \in F\}$ が $X \setminus F$ に連続的拡張をもつ $X \setminus F$ 上の点を分離するような最弱なコンパクト化を **Martin コンパクト化**といい，F^* と記す。$\Delta := F^* \setminus F$ を **Martin 境界**という。F^* はコンパクト距離空間になることが知られている (cf. [4, Satz 12.1], [10,Theorem 12.8])。$\zeta \in \Delta$ に対して，任意の点列 $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset F$ で，$\lim_{n\to\infty} z_n = \zeta$ を満たすものをとると，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$k_{z_n}(z)$ は $F \setminus \{z_n\}$ で非負値調和であり，$k_{z_n}(z_0) = 1$ であるので，Harnack の定理より，あるただ 1 つの要素 $h(z) \in HP_+$ が存在して，$h(z) = \lim_{n\to\infty} k_{z_n}(z)$ がなりたつ。この h を k_ζ と記す。$\zeta \in F^*$ に対して，k_ζ を ζ に極をもつ **Martin 関数**という。$\zeta \in \Delta$ が **minimal** であるとは，$u \in HP_+$ が F 上，$u \leq k_\zeta$ を満たすならば，ある非負の数 c がとれて，F 上，$u = ck_\zeta$ がなりたつことである。$\Delta_1 = \{\zeta \in \Delta | k_\zeta$ は minimal である $\}$ を F の **minimal Martin 境界**という。

Martin コンパクト化の詳細は [3]，[4]，[11]，[10]，および [13] を参照してほしい。

minimal Martin 境界を導入する意義は次の Martin 表現定理 (cf. [4],[10],[13]) にある。

Martin 表現定理. 各 $u \in HP_+$ に対して，Δ 上のただ 1 つの正値測度 μ_u が存在して，$\mu_u(\Delta \setminus \Delta_1) = 0$ かつ

$$u(z) = \int_{\Delta_1} h(z)\, d\mu_u(h)$$

を満たす。

上の μ_u を u の **Martin の表現測度**という。1 の Martin の表現測度を ω_z と表し，z に関する**調和測度**という。特に，$z = z_0$ のとき，これを χ と表すことにする。各 $z \in F$ に対して，ω_z と χ は Δ 上，互いに絶対連続であることが知られている。さらに，$d\omega_z(\cdot) = k.(z)d\chi$ の関係式が知られている (cf. [4,Satz 13.4])。

$\zeta \in \Delta_1$ および開集合 $U \subset F$ に対して，$U \cup \{\zeta\}$ が ζ の **minimal fine 開近傍**であるとは，F 上で，$\hat{R}_{k_\zeta}^{F\setminus U} \neq k_\zeta$ がなりたつことである。この条件は $\hat{R}_{k_\zeta}^{F\setminus U}$ が F 上，Green ポテンシャルであることと同値であることが知られている。また，この条件がなりたつとき，$F \setminus U$ は ζ で **minimally thin** ともいう。このとき，ある U の成分 U' で，$U' \cup \{\zeta\}$ が ζ の **minimal fine 開近傍**であることが

知られている (cf. [4,Hilfssatz 11.2], [14])。ζ の F^* における通常の位相による開近傍 V に対して，$(V \cap F) \cup \{\zeta\}$ は ζ の minimal fine 開近傍である (cf. [4.Hilfssatz 13.2])。

f を F 上の関数とし，$\zeta \in \Delta_1$ とするとき，$c \in \mathbb{R}$ に対して，もし，任意の正数 ε に対して，ある開集合 $U(\subset F)$ がとれて，$|f(x) - c| < \varepsilon$ $(\forall x \in U)$ がなりたつならば，f は ζ で，**minimal fine 極限値（または極限）** c をもつという。また，もし，任意の正数 N に対して，ある開集合 $U(\subset F)$ がとれて，$f(x) > N(< -N)$ $(\forall x \in U)$ がなりたつならば，f は ζ で，**minimal fine 極限** ∞ $(-\infty)$ をもつという。以下，HP_+ およびポテンシャルの境界挙動に関する定理を列挙する。

Fatou-Naïm-Doob の定理 (cf. [4,Folgesatz 2.1 かつ Folgesatz 14.2], [7]). $u \in HP_+$ とし, μ_u を Martin の表現測度とする。μ_u の χ に関する Lesbesgue 分解を $d\mu_u = u^* d\chi + d\nu_u$（ここで, $d\chi$ と $d\nu_u$ とは互いに，直交しており，$u^* \in L^1(\Delta, d\chi)$）とする。このとき，$u$ は χ に関して，ほとんどすべての点 $\zeta \in \Delta_1$ で，minimal fine 極限 $u^*(\zeta)$ をもつ。

Doob の定理 (cf. [2, Theorem XVI,12], [5], [6]). $u, v \in HP_+$ とし, μ_u を u の Martin の表現測度とする。このとき，$\dfrac{v}{u}$ は μ_u に関して，ほとんどすべての点 $\zeta \in \Delta_1$ で，minimal fine 極限をもつ。

Naïm の定理 (cf. [2,Theorem XVI,13], [14]). $u \in HP_+$ とし，μ_u を u の Martin の表現測度とする。p を F 上の Green ポテンシャルとする。このとき，$\dfrac{p}{u}$ は μ_u に関して，ほとんどすべての点 $\zeta \in \Delta_1$ で，minimal fine 極限 0 をもつ。

この定理で，$u = 1$ とおくと，次の系を得る。

系 C. p を F 上の Green ポテンシャルとする。このとき，p は χ に関して，ほとんどすべての点 $\zeta \in \Delta_1$ で，minimal fine 極限 0 をもつ。

この節に終えるにあたって，重要な minimal Martin 関数の境界挙動を述べる。そのため，1 つ命題を用意する。

命題 D(cf. [4, Hillfsatz 13.3]). $\zeta \in \Delta_1$ とするとき，$\chi(\{\zeta\}) > 0$ であることと k_ζ が F 上，有界であることとは必要十分である。

補題 1. $\zeta \in \Delta_1$ とするとき，$\chi(\{\zeta\}) = 0$ を仮定する。このとき，k_ζ は ζ で minimal fine 極限 ∞ をもち，χ に関して，ほとんどすべての点 $\xi \in \Delta_1$ で，minimal fine 極限 0 をもつ。

証明. $\zeta \in \Delta_1$ とし，δ_ζ を ζ における Dirac 測度とする。Doob の定理において，$u = k_\zeta, v = 1$ とおくと，$\dfrac{1}{k_\zeta}$ は δ_ζ に関して，ほとんどすべての $\xi \in \Delta_1$ で，minimal fine 極限 $c(\geq 0)$ をとる。$c > 0$ と仮定する。ある正定数 $d(< c)$ とある F の開部分集合 U がとれて，$U \cup \{\zeta\}$ は ζ の minimal fine 開近傍で，U 上，$\dfrac{1}{k_\zeta} > d$ を満たす。すなわち，U 上，$k_\zeta < \dfrac{1}{d}$ を満たす。$U \cup \{\zeta\}$ は ζ の minimal fine 開近傍であるので，F 上，$\hat{R}^U_{k_\zeta} = k_\zeta$. $\bar{U}$ を U の閉包とすると，F 上，$k_\zeta \geq \hat{R}^{\bar{U}}_{k_\zeta} \geq \hat{R}^U_{k_\zeta} = k_\zeta$ であるので，F 上，$\hat{R}^{\bar{U}}_{k_\zeta} = k_\zeta$.

一方，$H_{k_\zeta}^{F\setminus\bar{U}}$ を $F\setminus\bar{U}$ の理想境界上での境界値関数を 0 とし，$\partial(F\setminus\bar{U})$ 上での境界値関数を k_ζ とする $F\setminus\bar{U}$ に関する Perron-Wiener-Dirichlet 解を表すとき，補題 B より，$F\setminus\bar{U}$ 上，$\hat{R}_{k_\zeta}^{\bar{U}}=H_{k_\zeta}^{F\setminus\bar{U}}$. よって，すべての $z\in F\setminus\bar{U}$ に対して，

$$k_\zeta(z)=\hat{R}_{k_\zeta}^{\bar{U}}(z)=H_{k_\zeta}^{F\setminus\bar{U}}\leq\frac{1}{d}.$$

k_ζ の F における連続性に注意すると，以上より，F 上，$k_\zeta\leq\dfrac{1}{d}$ がなりたつ。命題 D を用いると，$\chi(\{\zeta\})>0$ となり，$\chi(\{\zeta\})=0$ に矛盾する。したがって，$c=0$ となり，k_ζ は ζ で，minimal fine 極限 ∞ をとる。

$\xi\in\Delta_1\setminus\{\zeta\}$ をとる。$d(\cdot,\cdot)$ を F^* の標準的な Martin 距離とする (cf. [4,Satz 12.1])。$n\in\mathbb{N}$ に対して，$U_n^*:=\{x\in F^*|d(\zeta,x)<\dfrac{1}{n}\},U_n:=U_n^*\cap F$ とおく。$U_n\cup\{\zeta\}$ は ζ の minimal fine 開近傍である (cf. [4, Hillfsatz 13.2])。$\hat{R}_{k_\zeta}^{F\setminus U_n}$ は F 上の Green ポテンシャルであるので，系 C より，$v=\hat{R}_{k_\zeta}^{F\setminus U_n}$ とおくと，$\hat{R}_{k_\zeta}^{F\setminus U_n}$ は χ に関して，ほとんどすべての点 $\xi\in\Delta_1$ で，minimal fine 極限 0 をとる。$E_n^*:=\{\xi\in\Delta_1|d(\zeta,\xi)>\frac{2}{n}\}$ とおく。補題 B より，$(F\setminus U_n)^\circ$ 上，$\hat{R}_{k_\zeta}^{F\setminus U_n}=k_\zeta$ がなりたつ。各 $\xi(\in E_n^*)$ に対して，$\{x\in F|d(x,\xi)<\dfrac{1}{2n}\}\subset(F\setminus U_n)^\circ$ に注意すると，$\{x\in F|d(x,\xi)<\dfrac{1}{2n}\}\cup\{\xi\}$ が ξ の minimal fine 開近傍であるので，$(F\setminus U_n)^\circ\cup\{\xi\}$ は ξ の minimal fine 開近傍である。よって，k_ζ は χ に関して，ほとんどすべての点 $\xi\in E_n^*$ で，minimal fine 極限 0 をとる。

$F=\cup_{n=1}^\infty(F\setminus U_n)^\circ$ および $\Delta_1\setminus\{\zeta\}=\cup_{n=1}^\infty E_n^*$ がなりたつので，k_ζ は，χ に関して，ほとんどすべての点 $\xi\in\Delta_1\setminus\{\zeta\}$ で，minimal fine 極限 0 をとる。 よって，求める結果を得る。

3. 主結果

この節では，$D(\subset F)$ をその相対境界 ∂D がコンパクトでなく，相対コンパクトでない正則領域であるとし，

$$\Delta_1(D):=\{\zeta\in\Delta_1^M|k_\zeta\neq\hat{R}_{k_\zeta}^{F\setminus D}\}$$

とおく。以下で，Heins の定理に類似した定理をいくつか証明する。

定理 1. 任意の $h\in HB_{+,0}(D)$ が $\Delta_1(D)$ のすべての点で，同じ minimal fine 極限をもつならば，あるただ 1 つの minimal 点 ζ_0 が存在して，$\chi(\{\zeta_0\})=\chi(\Delta_1(D))>0$ であるか，$\chi(\Delta_1(D))=0$ である。

証明. $\chi(\Delta_1(D))>0$ を仮定する。$\Delta_1(D)$ の Borel 部分集合 E_1 および E_2 が存在して，$\chi(E_j)$ $(j=1,2)$ が正であると仮定する。$u(z)=\omega_z(E_1)=\int_{E_1}k_\zeta(z)d\chi(\zeta)$ $(z\in F)$ とおく (cf. 2 節)。各 $z\in F$ に対して，χ と ω_z が Δ 上，絶対連続であるので，$u(z)\in HP_+$ である。Fatou-Naïm-Doob の定理より，u は χ に関して，ほとんどすべての E_1 の点で，minimal fine 極限 1 をもち，ほとんどすべての E_2 の点で，minimal fine 極限 0 をもつ。$v=u-H_u^D$ おくと，$v\in HB_{+,0}(D)$ である。$\zeta\in\Delta_1(D)$ に対して，$\hat{R}_{k_\zeta}^{F\setminus D}$ は F 上の Green ポテンシャルであり，[4, Folgesatz 4.7] を用いると，$\hat{R}_u^{F\setminus D}=\int_{E_j}\hat{R}_{k_\zeta}^{F\setminus D}d\chi(\zeta)$ は F 上の Green ポテンシャルである。よって，補題 B と Naïm の定理の系より，H_u^D は χ に関して，ほとんどすべての $\Delta_1(D)$ の点で，minimal fine 極限 0 をもつ。よって，v は χ に関して，ほとんどすべての E_1 の点で，minimal fine 極限 1 をもち，ほとんどすべての

E_2 の点で，minimal fine 極限 0 をもつ。これは仮定に矛盾する。したがって，唯一の $\zeta_0 \in \Delta_1(D)$ が存在して，$\chi(\{\zeta_0\}) = \chi(\Delta_1(D)) > 0$ がなりたつ。よって，求める結果を得る。

系. $\chi(\Delta_1(D)) > 0$ を仮定する。このとき，任意の $h \in HP_{+,0}(D)$ が $\Delta_1(D)$ のすべての点で，同じ minimal fine 極限をもつならば，あるただ 1 つの minimal 点 ζ_0 が存在して，$\Delta_1(D) = \{\zeta_0\}$ がなりたつ。

証明. $HB_+(D) \subset HP_+(D)$ と系の仮定より，定理 1 を用いることによって，あるただ 1 つの minimal 点 ζ_0 が存在して，$\chi(\{\zeta_0\}) = \chi(\Delta_1(D)) > 0$ がなりたつ。$\Delta_1(D) \setminus \{\zeta_0\} \neq \emptyset$ を仮定する。$\zeta_1 \in \Delta_1(D) \setminus \{\zeta_0\}$ をとる。補題 1 より，$\chi(\{\zeta_0\}) > 0$ に注意すると，k_{ζ_1} は ζ_1 で，minimal fine 極限 ∞ をとり，ζ_0 で，minimal fine 極限 0 をとる。$v = k_{\zeta_1} - \hat{R}_{k_{\zeta_1}}^{F\setminus D}$ とおくと，$v \in HP_{+,0}(D)$ である。$\zeta_1 \in \Delta_1(D)$ であるので，$\hat{R}_{k_{\zeta_1}}^{F\setminus D}$ は F 上の Green ポテンシャルであり，系 C より，$\hat{R}_{k_{\zeta_1}}^{F\setminus D}$ は χ に関して，ほとんどすべての $\Delta_1(D)$ の点で，minimal fine 極限 0 をもつ。また，Naïm の定理で, $u = k_{\zeta_1}, p = \hat{R}_{k_{\zeta_1}}^{F\setminus D}$ とおくと，$\dfrac{\hat{R}_{k_{\zeta_1}}^{F\setminus D}}{k_{\zeta_1}}$ は δ_{ζ_1} に関して，ほとんどすべての $\xi \in \Delta_1$ で，minimal fine 極限 0 をもつ，すなわち，$\dfrac{\hat{R}_{k_{\zeta_1}}^{F\setminus D}}{k_{\zeta_1}}$ は ζ_1 で，minimal fine 極限 0 をもつ。よって，v は ζ_1 で，minimal fine 極限 ∞ をとり，ζ_0 で，minimal fine 極限 0 をとる。系の仮定にこれは矛盾する。よって，$\Delta_1(D) = \{\zeta_0\}$ がなりたつ。

定理 2. 任意の $u \in HP_0(D)$ 対して，u が $\Delta_1(D)$ のすべての点で，同じ minimal fine 極限をもつならば，$\Delta_1(D)$ は 1 点のみからなる。

証明. $\zeta_1, \zeta_2 \in \Delta_1(D)$ を任意にとる。$f(z) := k_{\zeta_1}(z), g(z) := k_{\zeta_2}(z)$ とおく。まず，ζ_1 で，$\dfrac{g(z)}{f(z)}$ は minimal fine 極限 0 をもつことがわかる。実際，Doob の定理より，ζ_1 で，$\dfrac{g(z)}{f(z)}$ は minimal fine 極限 $c(\geq 0)$ をもつ。その値を $c > 0$ と仮定する。$V := \{z \in F | g(z) > \dfrac{c}{2} f(z)\}$ とおく。このとき，V は開集合で，$V \cup \{\zeta_1\}$ は ζ_1 の minimal fine 近傍となり，V 上，$g > \dfrac{c}{2} f$ がなりたつ。よって，F 上，

$$g \geq \hat{R}_g^V \geq \frac{c}{2} \hat{R}_f^V = \frac{c}{2} f.$$

g は minimal であるので，ある正数 β が存在して，F 上，$g = \beta \dfrac{c}{2} f$ がなりたつ。よって，ζ_2 は ζ_1 と一致せねばならない。これは矛盾である。よって，$c = 0$.

補題 1 と上で示したことより，$k_{\zeta_1} - k_{\zeta_2} = k_{\zeta_1}\left(1 - \dfrac{k_{\zeta_2}}{k_{\zeta_1}}\right)$ は ζ_1 で，minimal fine 極限 ∞ をもつ。ζ_1 と ζ_2 を入れ換えることにより，$k_{\zeta_1} - k_{\zeta_2}$ は ζ_2 で，minimal fine 極限 $-\infty$ をもつ。$u = k_{\zeta_1} - k_{\zeta_2} - \hat{R}_{k_{\zeta_1}}^{F\setminus D} + \hat{R}_{k_{\zeta_2}}^{F\setminus D}$ とおくと，$u \in HP_0(D)$ となり，定理 1 の系の証明と同様の論法により，u は ζ_1 で，minimal fine 極限 ∞ をもち，ζ_2 で，minimal fine 極限 $-\infty$ をもつ。これは，定理の仮定に矛盾する。よって，定理の主張を得る。

4. 付録

$D(\subset F)$ をその相対境界 ∂D がコンパクトでなく，相対コンパクトでない正則領域であるとし，

$\Delta_1(D) := \{\zeta \in \Delta_1^M | k_\zeta \neq \hat{R}_{k_\zeta}^{F\setminus D}\}$,
$HP_+(F,D) = \{u \in HP_+ \mid \hat{R}_u^{F\setminus D}$ は F 上の Green ポテンシャルである $\}$
とおく。このとき，次の命題がなりたつ。

命題 $\sharp\Delta_1(D) = \sup_{h\in HP_+(F,D)} \sup\{n \in \mathbb{N}|$ 領域 $O_j(\subset D, j = 1, 2, \cdots, n)$ が存在して，
$O_i \cap O_j = \emptyset (i \neq j)$ かつ $\hat{R}_h^{F\setminus O_j} \neq h$ がなりたつ $\}$,
ただし，$\sharp\Delta_1(D)$ は $\Delta_1(D)$ の要素の個数を表す。

証明．1) $\sharp\Delta_1(D) = \infty$ のとき，$\Delta_1(D)$ の部分集合 $\{\zeta_j\}_{j=1}^m$ をとるとき，F^* は距離空間であり，minimal fine 位相の特性を用いると（2 節参照），D の部分領域列 $\{D_j\}_{j=1}^m$ で，各 $D_j \cup \{\zeta_j\}$ は ζ_j，の minimal fine 開近傍で，$D_i \cap D_j = \emptyset (i \neq j)$ を満たすものがとれる。$v = \sum_{j=1}^m k_{\zeta_j}$ とおくと，$\hat{R}_{k_{\zeta_j}}^{F\setminus D_j} \neq k_{\zeta_j}$ $(1 \leq j \leq m)$ であるので，各 $k \in \{1, \cdots, m\}$ に対して，

$$\hat{R}_v^{F\setminus D_k} = \hat{R}_{\sum_{j=1}^{n_0} k_{\zeta_j}}^{F\setminus D_k} = \sum_{j=1}^{n_0} \hat{R}_{k_{\zeta_j}}^{F\setminus D_k} \neq \sum_{j=1}^{n_0} k_{\zeta_j} = v.$$

よって，

$$\sup_{h\in HP_+(F,D)} \sup\{n \in \mathbb{N}| \text{ 領域 } O_j(\subset D, j = 1, 2, \cdots, n) \text{ が存在して，}$$
$$O_i \cap O_j = \emptyset (i \neq j) \text{ かつ } \hat{R}_h^{F\setminus O_j} \neq h \text{ がなりたつ } \} \geq m.$$

m が任意であるので，

$$\sup_{h\in HP_+(F,D)} \sup\{n \in \mathbb{N}| \text{ 領域 } O_j(\subset D, j = 1, 2, \cdots, n) \text{ が存在して，}$$
$$O_i \cap O_j = \emptyset (i \neq j) \text{ かつ } \hat{R}_h^{F\setminus O_j} \neq h \text{ がなりたつ } \} = \infty.$$

よって，

$$\sharp\Delta_1(D) = \sup_{h\in HP_+(F,D)} \sup\{n \in \mathbb{N}| \text{ 領域 } O_j(\subset D, j = 1, 2, \cdots, n) \text{ が存在して，}$$
$$O_i \cap O_j = \emptyset (i \neq j) \text{ かつ } \hat{R}_h^{F\setminus O_j} \neq h \text{ がなりたつ } \}.$$

2) $\sharp\Delta_1(D) < \infty$ のとき，$n_0 = \sharp\Delta_1(D)$ とおく。まず，

$$\sup_{h\in HP_+(F,D)} \sup\{n \in \mathbb{N}| \text{ 領域 } O_j(\subset D, j = 1, 2, \cdots, n) \text{ が存在して，}$$
$$O_i \cap O_j = \emptyset (i \neq j) \text{ かつ } \hat{R}_h^{F\setminus O_j} \neq h \text{ がなりたつ } \} \leq n_0 \quad (1)$$

を示す。$h \in HP_+(F, D)$ を任意にとる。この h に対して，領域 $O_k(\subset D, k = 1, 2, \cdots, n)$ で，$O_k \cap O_l = \emptyset$ $(k \neq l)$ かつ $\hat{R}_h^{F\setminus O_k} \neq h$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ をみたすものがとれたとする。Martin の表現定理より，ある非負値 $c_j (1 \leq j \leq n_0)$ が存在して，$h = \sum_{j=1}^{n_0} c_j k_{\zeta_j}$ がなりたつ。よって，

$$\hat{R}_h^{F\setminus O_k} = \hat{R}_{\sum_{j=1}^{n_0} c_j k_{\zeta_j}}^{F\setminus O_k} = \sum_{j=1}^{n_0} c_j \hat{R}_{k_{\zeta_j}}^{F\setminus O_k} \neq \sum_{j=1}^{n_0} c_j k_{\zeta_j} = h.$$

よって，ある $j_0 \in \{1, 2, \cdots, n_0\}$ に対して，$c_{j_0} > 0$ かつ $\hat{R}^{F \setminus O_k}_{k_{\zeta_{j_0}}} \neq k_{\zeta_{j_0}}$ がなりたつ。

$\kappa(O_k) := \{j \in \{1, 2, \cdots, n_0\} | \hat{R}^{F \setminus O_k}_{k_{\zeta_j}} \neq k_{\zeta_j}\}$ とおくと，$k \neq l$ のとき，$\kappa(O_k) \cap \kappa(O_l) = \emptyset$ である。実際，$k \neq l$ のとき，$\kappa(O_k) \cap \kappa(O_l) \neq \emptyset$ と仮定して，$j_1 \in \kappa(O_k) \cap \kappa(O_l)$ がとれたとする。この仮定より，$\hat{R}^{F \setminus O_k}_{k_{\zeta_{j_1}}}$ および $\hat{R}^{F \setminus O_l}_{k_{\zeta_{j_1}}}$ は F 上の Green ポテンシャルである。よって，$\hat{R}^{F \setminus O_k}_{k_{\zeta_{j_1}}} + \hat{R}^{F \setminus O_l}_{k_{\zeta_{j_1}}}$ は F 上の Green ポテンシャルである。一方，$O_k \cap O_l = \emptyset$ すなわち，$O_k \subset F \setminus O_l$ に注意して，balayage の基本的な性質 (cf. [1, VI 章, 命題 1.3]) を用いると，

$$k_{\zeta_{j_1}} = \hat{R}^{F}_{k_{\zeta_{j_1}}} = \hat{R}^{O_k \cup (F \setminus O_k)}_{k_{\zeta_{j_1}}} \leq \hat{R}^{O_k}_{k_{\zeta_{j_1}}} + \hat{R}^{F \setminus O_k}_{k_{\zeta_{j_1}}} \leq \hat{R}^{F \setminus O_l}_{k_{\zeta_{j_1}}} + \hat{R}^{F \setminus O_k}_{k_{\zeta_{j_1}}}.$$

これは [4, Folgesatz 4.6] に矛盾する。よって，$k \neq l$ のとき，$\kappa(O_k) \cap \kappa(O_l) = \emptyset$ がなりたつ。このことから，$n \leq \sum_{k=1}^{n} \sharp \kappa(O_k) \leq n_0$. よって，(1) がなりたつ。

次に，(1) の逆向きの不等式を示す。$v := \sum_{j=1}^{n_0} k_{\zeta_j}$ とおく。各 $j (= 1, \cdots, n_0)$ に対して，領域 D_j で，$D_j \cup \{\zeta_j\}$ が ζ_j の minimal fine 開近傍であり，$D_i \cap D_j = \emptyset (i \neq j)$ を満たすものがとれる。1) $\sharp \Delta_1(D) = \infty$ のとき，各 $k \in \{1, \cdots, m\}$ に対して，$\hat{R}^{F \setminus D_k}_{v} \neq v$ を示したと同様な論法から，各 j に対して，$\hat{R}^{F \setminus D_j}_{v} \neq v$. よって，

$$\begin{aligned} &\sup\{n \in \mathbb{N} |\ \text{領域}\ O_j (\subset D, j = 1, 2, \cdots, n)\ \text{が存在して}, \\ &\qquad O_i \cap O_j = \emptyset (i \neq j)\ \text{かつ}\ \hat{R}^{F \setminus O_j}_{v} \neq v\ \text{がなりたつ}\ \} \geq n_0. \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} &\sup_{h \in HP_+(F, D)} \sup\{n \in \mathbb{N} |\ \text{領域}\ O_j (\subset D, j = 1, 2, \cdots, n)\ \text{が存在して}, \\ &\qquad O_i \cap O_j = \emptyset (i \neq j)\ \text{かつ}\ \hat{R}^{F \setminus O_j}_{h} \neq h\ \text{がなりたつ}\ \} \geq n_0 \quad (2). \end{aligned}$$

よって，(1) および (2) より，

$$\begin{aligned} \sharp \Delta_1(D) = &\sup_{h \in HP_+(F, D)} \sup\{n \in \mathbb{N} |\ \text{領域}\ O_j (\subset D, j = 1, 2, \cdots, n)\ \text{が存在して}, \\ &\qquad O_i \cap O_j = \emptyset (i \neq j)\ \text{かつ}\ \hat{R}^{F \setminus O_j}_{h} \neq h\ \text{がなりたつ}\ \}. \end{aligned}$$

よって，求める結果を得る。

参考文献

[1] Bliedtner J. and Hansen W., Potential theory, *Springer*, 1986.

[2] Brelot M., On topologies and boundaries in potential theory, *Springer*, **33** 1971.

[3] Constantinescu, C. and Cornea, A., Potential Theory on Harmonic Spaces, *Springer*, 1972.

[4] Constantinescu, C. and Cornea, A., Ideale Ränder Riemanncher Flächen, *Springer*, 1969.

[5] Doob J.L., Conditional Brownian motion and boundary limits of harmonic functions, *Bull. Soc. Math. France*, **85**(1957), 431–458.

[6] Doob J.L., A non-probabilistic proof of the relative Fatou, *Ann. Inst. Fourier*, **9**(1959), 293–300.

[7] Gowrisankaran K., Fatou-Naïm-Doob limit theorems in the axiomatic system of Brelot, *Ann. Inst. Fourier*, **16**(1966), 455–467.

[8] Gowrisankaran K., Extreme harmonic functions and boundary value problems, *Ann. Inst. Fourier*, **13**(1963), 307–356.

[9] Heins M., Riemann surfaces of infinite genus, *Annals of Math.*, **33**(1952), 296–317.

[10] Helms L.L., Introduction to potential theory, *Wiley*, 1969.

[11] Hervé R., Recherches axiomatiques sur la theorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, **12**(1962), 415–571.

[12] Kusunoki Y., Function theory, *Asakura shoten*, 1973.

[13] R.S.Martin, Minimal positive harmonic functions, *Trans. Am. Math. Soc.* **49**(1941), 137–172.

[14] Naïm L., Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, **7** (1957), 183–281.

謝辞

この論文の発刊に際して，著者は査読者の親身な助言に深く感謝したい。

On a Heins-type theorem on open Riemann surfaces

Dedicated to Professor Hisashi Ishida on his seventieth birthday

Hiroaki MASAOKA

Abstract

Let F be an open Riemann surface which admits Green's function on F, Δ_1 the minimal Martin boundary of F, and D a non-compact and regular subdomain of F whose relative boundary ∂D of D is not compact. Set $\Delta_1(D) = \{\zeta \in \Delta_1 | F \setminus D \text{ is minimally thin at } \zeta\}$. Suppose that every difference between two non-negative harmonic functions on D vanishing on ∂D has the same minimal fine limit at every point of $\Delta_1(D)$. Then, we prove that $\Delta_1(D)$ consists of only one point.

Keywords: open Riemann surface, minimal Martin boundary, minimally thin, non-negative harmonic function, minimal fine limit