多重ゼータ値とその拡張に関する研究

平成 30 年 4 月 14 日受付

田　中　立　志*

要　旨

Connes-Kreimer による根付き木のホップ代数に基づいて，二変数非可換多項式環上の写像（根付き木写像と名付けた）を構成した。それらはいくつかのよい性質を持っているが，重要な性質のひとつは，これらの写像が多重ゼータ値の関係式族を誘導するということである。後に Henrik Bachmann との共同研究において，この関係式族が，井原 - 金子 -Zagier による導分関係式を含むことや，いわゆる川島関係式の線形部分と同値な族であること，を示した。

キーワード：多重ゼータ値，Connes-Kreimer のホップ代数，根付き木写像，導分関係式，川島関係式

1. 研究の背景と目的

Euler-Zagier 型の（古典的な）多重ゼータ値は，多重 L 値，q- 類似版，p 進版など形を変えた対象の導入とその研究が並行して行われてきた。現在では，多重 Eisenstein 級数，金子 -Zagier の有限多重ゼータ値など，さらなる拡張・変形と，その性質に関する研究が進められている。本研究では古典的な多重ゼータ値のみからは捉えにくい代数的現象を，そのさまざまな拡張・変形版を介して解明することを目的とする。ホップ代数やオペラッドとの関連など，代数的構造を深く研究し，多重ゼータ値のさらなる拡張の可能性を探る。

2. 研究成果報告

今回得た研究成果はひとえに，根付き木写像というよい性質を持つ写像を具体的に構成したことにある。これにより，Connes-Kreimer のホップ代数と多重ゼータ値とが密接に関連していることが鮮明になった。

木とはループを持たない連結な有限グラフのことであり，**根付き木**とは根と呼ばれる特別な頂点（すべての辺が根から遠ざかる向きに向きづけられている）をもつ木のことである。平面構造を持たない根付き木とは各頂点に向かってくる辺に順序関係がない根付き木のことである。本稿では，根付き木と言ったら平面構造を持たないものとする。根付き木が平面構造を持たないおかげで，根付き木が自由に生成する $\mathbb{Q}$- 代数 $\mathcal{H}$ を定義できる。（積は disjoint union で与える。）根付き木の積を「（根付き）森」と呼ぶ。$\mathcal{H}$ は $\mathbb{Q}$- 代数のみならず，ホップ代数構造を持つことが知られている（Connes-Kreimer）。

* 京都産業大学理学部

ここで，いくつか記号を用意しておく。（記号の詳しい定義は本稿では省略する。）

- Δ : $\mathcal{H}$ における余積
- $\mathfrak{H} := \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$,
- $\mathfrak{H}^1 := \mathbb{Q} + \mathfrak{H}y \supset \mathfrak{H}^0 := \mathbb{Q} + x\mathfrak{H}y$,
- $M : \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$, $M(v \otimes w) = vw$
- R_u : u の右からの連結積
- $z := x + y \in \mathfrak{H}$
- $\mathbb{Q}[X]_{(d)}$: 多項式環 $\mathbb{Q}[X]$ の次数 d の斉次部分
- $\mathbb{I}$: 空の森

このとき，次の定理が成り立つ。

定理（T., arXiv:1712.01029）。任意の森 f（$\neq \mathbb{I}$）に対し，以下の 4 つの性質により $\mathfrak{H}$ から $\mathfrak{H}$ への $\mathbb{Q}$-線形写像 f（同じ記号を使うことにする）を定義できる：

(i) f がひとつの頂点のみからなる木（ドット）のとき，$f(x) := xy$, $f(y) := -xy$,

(i') $B_+(f)(u) := R_y R_{y+z} R_y^{-1} f(u)$ $(u \in \{x, y\})$,

(i") $f = gh$ $(g, h \neq \mathbb{I})$ のとき，$f(u) := g(h(u))$ $(u \in \{x, y\})$,

(ii) $w \in \mathfrak{H}$ と $u \in \{x, y\}$ に対し，$f(wu) := M(\Delta(f)(w \otimes u))$.

この定理によって定義される写像 f を**根付き木写像**と名付けた。

一方，自然数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$（$k_1 \geq 2$）に対して，**多重ゼータ値**とは

$$\zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \sum_{m_1 > m_2 > \cdots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \cdots m_n^{k_n}}$$

で与えられる。$\mathbb{Q}$- 線形写像 $Z : \mathfrak{H}^0 \to \mathbb{R}$ を $Z(1) = 1$ および

$$Z(x^{k_1-1} y x^{k_2-1} y \cdots x^{k_n-1} y) = \zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n)$$

によって定義する。

根付き木写像の応用として，以下の定理が成り立つ。

定理（T., arXiv:1712.01029）。任意の根付き木写像 f（$\neq \mathbb{I}$）に対して，$f(\mathfrak{H}^0) \subset \ker Z$.

これを多重ゼータ値の**根付き木写像関係式**とでも呼ぶことにしよう。

その後，Henrik Bachmann との共同研究において，さらに以下の 2 つの定理を得た。

定理（Bachmann-T. arXiv:1712.01601）。多重ゼータ値の導分関係式は根付き木写像関係式に含まれる。

この定理は，より詳しく言うと，導分関係式は「幹写像」ともいうべきもので記述される関係式と同値であることを証明したことになっている。

定理（Bachmann-T. arXiv:1801.05381）。多重ゼータ値の根付き木写像関係式は川島関係式の線形部分と同値である。

この定理は，根付き木写像関係式は双対公式，和公式，巡回和公式など，多重ゼータ値の間の既知の関係式を多く含んでいる，ということを暗に意味している。

今回新たに発見し構成した根付き木写像には依然として多くの未解明な性質が隠れているであろう。また，モチーフの周期としての捉え方や数理物理における Feynman 振幅との関連，オペラディックな拡張など，さらなる発展も期待できる。

3. 本年度の研究活動報告

本年度は，講演を 3 件行い，論文を 3 本したためた：

【講演】

(1) Rooted tree maps and multiple zeta values, Oberseminar, Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn (Germany), 2018.1.25.

(2) Rooted tree maps, trimester program "Periods in Number Theory, Algebraic Geometry and Physics", Hausdorff Institute for Mathematics, Bonn (Germany), 2018.2.7.

(3) 根付き木写像と多重ゼータ値，早稲田大学整数論研究集会，早稲田大学，2018.3.15.

【論文】

(1) T. Tanaka, "Rooted tree maps", submitted, arXiv:1712.01029.

(2) H. Bachmann, T. Tanaka, "Rooted tree maps and the derivation relation for multiple zeta values", submitted, arXiv:1712.01601.

(3) H. Bachmann, T. Tanaka, "Rooted tree maps and Kawashima relations for multiple zeta values", submitted, arXiv:1801.05381.

また，京都産業大学の在外研究員制度を利用し，マックスプランク数学研究所（ボン，ドイツ）に 10 月から 2 月までの 5 ヶ月間研究滞在した。滞在中，rooted trees の primitive elements や dualization に関する意見交換（Anton Mellit との交流），多重ポリログの特殊値や多重 L 値の数値計算プログラム開発の最先端情報の収集（Henri Cohen との交流），Goncharov 余積と rooted trees との関連性に関する情報収集（Herbert Gangl との交流）など，多くの貴重な収穫があった。Steven Charlton, Henrik Bachmann, Herbert Gangl, Nils Matthes, Don Zagier らとは，当該分野の進展に向け多くの研究討論やセミナーを行った。

Study on multiple zeta values and their generalizations

Tatsushi TANAKA

Abstract

Based on Connes-Kreimer Hopf algebra of rooted trees, I defined maps (which I call rooted tree maps) on noncommutative polynomial algebra in two indeterminates. They have several nice properties. One of the most important ones is that they induce a class of relations among multiple zeta values. Afterwards Henrik Bachmann and I showed in our joint works that the class of relations includes the derivation relation due to Ihara-Kaneko-Zagier, and is equivalent to the so-called linear part of Kawashima relation.

Keywords : multiple zeta values, Connes-Kreimer Hopf algebra, rooted tree maps, derivation relation, Kawashima relation