

エクスカージョン理論に基づくレヴィ過程の 汎関数に関する極限定理の研究 経過報告

矢野 裕子*

要 旨

レヴィ過程の性質を伊藤のエクスカージョン理論に基づく手法によって研究することを目的とし、処罰問題の研究を行った。一次元安定過程に対する片側滞在時間を重み汎関数とする処罰問題、及び一次元レヴィ過程に対するランダム時計を用いた処罰問題を考察した。

キーワード：レヴィ過程, 安定過程, マルコフ過程, エクスカージョン, 処罰問題

1 研究の背景

時間とともに変化する偶然現象を数学的に定式化し記述するものが確率過程である。レヴィ過程とは、独立増分性を持つ時間的一様なマルコフ過程であり、ブラウン運動（ウィナー過程）、安定過程、ポアソン過程、ガンマ過程等を典型例に含む重要な確率過程のクラスである。本研究では、エクスカージョン理論を主たる方法として、レヴィ過程の汎関数について研究を行ったが、特に処罰問題を切り口とした。

処罰問題とは、2006年以降に B. Roynette 氏, P. Vallois 氏及び M. Yor 氏による共同研究によって提唱された問題で、ウィナー測度を種々の汎関数によって重み付けたときの極限について考察するものである。Roynette-Vallois-Yor ([6, 7] 等) は、いくつかの具体的な重み汎関数に対する極限測度を求め、その特徴付けを行った。その後、Najnudel-Roynette-Yor [4] によって、これらの処罰問題が重み汎関数に依らないある普遍的シグマ有限測度を用いて統一的に論じられることが示された。以後、様々な研究者によって処罰問題の他の確率過程に対する一般化が考察され、発展が遂げられている：例えば一次元安定過程に対する処罰問題では、矢野-矢野-Yor [9] が、重み汎関数が局所時間の関数及びカツ消滅型汎関数の場合を考察し、伊藤のエクスカージョン理論に基づいて原点消滅過程の調和変換を構成することにより、これらの処罰問題を統一的に論ずるシグマ有限測度を導入し、解決した。また、矢野-矢野-Yor [10] は、重み汎関数が最大値過程の関数の場合を考察し、安定過程の自己相似性を用いることでこの問題を解いた。更に矢野 [11] は、重み汎関数が最大値過程の関数の場合に、[9] とは異なるシグマ有限測度を構成し、Roynette-Vallois-Yor では見えていなかった

* 京都産業大学理学部

事実、重み汎関数によって異なるエクスカージョンを取る必要があることを明らかにした。また、一次元拡散過程に対しては、Profeta-矢野-矢野 [5] がランダム時計を用いることによって重み汎関数が原点局所時間の場合の処罰問題を解決している。

処罰問題は、それ自身が非常に興味深い問題であるが、一般化によってその奥深さが次第に明らかになっている。Roynette-Vallois-Yor が扱った重み汎関数は十数種類あるが、他の確率過程に対して一般化されているものは未だ一部である。新しい重み汎関数に対する一般化処罰問題の解決と重み汎関数による分類や様々な応用の研究が待たれている。

2 研究経過報告

レヴィ過程、特に一次元安定過程に対し、片側滞在時間を重み汎関数とする処罰問題を研究中である。片側滞在時間の長時間平均は、ブラウン運動の場合にはレヴィの逆正弦法則としてよく知られており、また一次元安定過程の場合にはベータ分布になるという結果が Gettoor-Sharpe [2] により得られている。片側滞在時間を重み汎関数とする処罰問題は、一次元ブラウン運動の場合には Roynette-Vallois-Yor [6] により得られているが、一次元安定過程の場合はまだ知られていない。一次元ブラウン運動の場合の極限過程は最大値処罰問題 (Roynette-Vallois-Yor [7]) のそれと絶対連続であることから、一次元安定過程の場合も最大値処罰問題に関する結果 (矢野-矢野-Yor [10] 及び矢野 [11]) と深い関連があるものと考え、慎重に研究を進めているところである。

一次元拡散過程に対するランダム時計条件付け問題の研究では、ブラウン運動に対する Knight [3] の研究が一般化に繋がることを見抜き、矢野-矢野 [8] において一般論を展開することに成功した。これを発展させる形で、一般の一次元拡散過程に対するランダム時計処罰問題を Profeta-矢野-矢野 [5] において研究し、この研究論文が先頃、出版に至った。一方、レヴィ過程に対するランダム時計条件付け問題の研究は、Chaumont-Doney [1] の研究をはじめとしている研究されているが、ランダム時計処罰問題の研究は未開発であり、慎重に研究を進めているところである。

尚、本研究は、平成 31 年度科研費基盤研究 (C) 「マルコフ過程に対する処罰問題の研究」において継続していく。

3 本年度の活動報告

Ju-Yi Yen 氏 (Cincinnati 大学)、野場啓氏 (京都大学) との共同作業において、故 Marc Yor 氏のパリ第六大学での授業に基づいたノート “Exponential functionals of Lévy processes: An annotated bibliography, with exercises” を纏めている。最終確認中であり、近く雑誌投稿し、公表を予定している。

謝辞

本研究は、京都産業大学総合学術研究所「特定課題研究 (準備研究支援)」(課題番号: E1808) の

助成を受けたものである。

参考文献

- [1] L. Chaumont and R. A. Doney, On Lévy processes conditioned to stay positive, *Electron. J. Probab.*, **10**, 948-961, 2005.
- [2] R. K. Gettoor and M. J. Sharpe, On the arc-sine laws for Lévy processes, *J. Appl. Probab.*, **31**, no. 1, 76-89, 1994.
- [3] F. B. Knight, Brownian local times and taboo processes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **143**, 173-185, 1969.
- [4] J. Najnudel, B. Roynette and M. Yor, *A global view of Brownian penalizations*, MSJ Memoirs, **19**, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2009.
- [5] C. Profeta, K. Yano and Y. Yano, Local time penalizations with various clocks for one-dimensional diffusions, *J. Math. Soc. Japan*, **71**, no. 1, 203-233, 2019.
- [6] B. Roynette, P. Vallois and M. Yor, Limiting laws associated with Brownian motion perturbed by normalized exponential weights, I, *Studia. Sci. Math. Hungar.*, **43**, 171-246, 2006.
- [7] B. Roynette, P. Vallois and M. Yor, Limiting laws associated with Brownian motion perturbed by its maximum, minimum and local time, II, *Studia. Sci. Hungar.*, **43**, 295-360, 2006.
- [8] K. Yano and Y. Yano, On h-transforms of one-dimensional diffusions stopped upon hitting zero, *In Memoriam Marc Yor-Séminaire de Probabilités XLVII*, Lecture Notes in Math., **2137**, 127-156, Springer, 2015.
- [9] K. Yano, Y. Yano and M. Yor, Penalising symmetric stable Lévy paths, *J. Math. Soc. Japan*, **61**, no. 3, 757-798, 2009.
- [10] K. Yano, Y. Yano and M. Yor, Penalisation of a stable Lévy process involving its one-sided supremum, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, **46**, no. 4, 1042-1054, 2010.
- [11] Y. Yano, A remarkable σ -finite measure unifying supremum penalizations for a stable Lévy process, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, **49**, no. 4, 1014-1032, 2013.

Study of limit theorems for functionals of Lévy processes based on the excursion theory

Yuko YANO

Abstract

Based on Itô's excursion theory, penalisations for Lévy processes are studied. Especially, penalisation of a 1-dimensional stable Lévy process involving its occupation time on the half line and penalisations with some random clocks for 1-dimensional Lévy processes are studied.

Keywords : Lévy processes, stable Lévy processes, Markov processes, the excursion theory, penalisation