開リーマン面のミニマルマルチン境界について

正　岡　弘　照 *

要　旨

次の各場合に対して，開リーマン面 R のミニマルマルチン境界を考察した。

1. R が次の 2 条件をみたす開リーマン面 F の非相対コンパクトな部分領域である。

(1) F 上で Green 関数が存在する。

(2) Kerékártó-Stoïklow の意味の F の理想境界がただ 1 点からなる。

2. R が Green 関数をもつ開 Riemann 面 F の非相対コンパクトな部分領域であり，R の各相対境界がコンパクトでない。

3. R がスリットをもつ単位円板のダブルである。

キーワード：開リーマン面，ミニマルマルチン境界，Kerékártó-Stoïklow の意味の理想境界，ダブル，非相対コンパクトな部分領域

1. 研究の背景と目的

1. R を Green 関数をもたない開リーマン面とし，R は Kerékártó-Stoïklow の意味で理想境界点がただ 1 点であるとする。M. Heins, "Riemann Surfaces of Innite Genus", Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 55, No. 2 (1952), pp. 296-317 おいて，以下の定理を示した。

定理 $\{G_n\}$ を R の非コンパクトな部分領域で，各 $G \setminus \overline{G_n}$ は G の相対コンパクトな部分領域かつ $\partial(G_n \setminus \overline{G_{n+1}})$ $(n = 1, 2, \cdots)$ は高々有限個の点を除いて，高々有限個の解析曲線からなっているとし，(i) - (iv) が満たされているとする

(i) $G_n \supset G_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$,

(ii) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset$,

(iii) 各 $G \setminus \overline{G_n}$ は相対コンパクトであり,

(iv) 各 $B_n = \overline{G_{2n-1}} \setminus G_{2n}$ は閉領域であり, かつ,

(v) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} modB_n = +\infty$,

ここで, $modB_n$ は B_n の modulus を表す。

このとき, $\sharp\Delta_1 = 1$.

---

* 京都産業大学理学部

この定理の対象は Kerékártó-Stoïklow の意味で理想境界点がただ 1 点である Green 関数をもたない開リーマン面であるが，ある適切な条件下で，Kerékártó-Stoïklow の意味で理想境界点がただ 1 点である Green 関数をもつ開リーマン面の非相対コンパクトな領域に対して，類似な結果を示すことを考察した（詳細は 2 章 **1** を参照）。

2. M. Heins, "Riemann Surfaces of Innite Genus", Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 55, No. 2 (1952), pp. 296-317 おいて，以下の定理を示した。

定理 F を Green 関数をもたない開 Riemann 面とし，F は Kerékártó-Stoïklow の意味で理想境界 Δ^K がただ 1 点からなるとする。このとき，すべての有界調和関数がすべての R のミニマルマルチン境界点 ξ で，同じ極限値をもつとすると，R のミニマルマルチン境界はただ 1 つの点からなる。

論集（Acta humanistica et scientica universitatis sangio kyotiensis, Natural science series no.45, March 2018）に掲載した「開 Riemann 面上の Heins 型定理について」において，上の定理をある適当な条件をみたす Green 関数が存在する開リーマン面の部分領域に拡張した（詳細は 2 章 **2** を参照）。

3. U を単位円板とする。$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を $0 < a_n < b_n < a_{n+1} < 1$ および $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ を満足する数列とする。各自然数 n に対して，$I_n = [a_n, b_n]$ とおき，$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ とおく。$D = D(\{a_n\}, \{b_n\})$ で，領域 $U \setminus I$ を表す。D の n（> 1）葉の被覆面 R のミニマルマルチンの境界 Δ_1 については，以下の結果が知られている。

定理 I が 1 でミニマルシンならば，$\Delta_1 \simeq \underbrace{\partial U \cup \partial U \cup \cdots \cup \partial U}_{n\text{個}}.$

I が 1 でミニマルシンでないならば，$\Delta_1 \simeq \underbrace{(\partial U \setminus \{1\}) \cup (\partial U \setminus \{1\}) \cup \cdots \cup (\partial U \setminus \{1\})}_{n\text{個}} \cup \{1\}.$

この定理の対象は D の n（> 1）葉の被覆面であるが，D のダブルの場合はどうなるかという問題を考察した（詳細は 2 章 **3** を参照）。

2. 研究成果報告

1. R を Green 関数をもつ開リーマン面とし，R は Kerékártó-Stoïklow の意味で理想境界点が 1 点であるとする。R の部分領域 G で，$R \setminus G$ はコンパクトで，∂G が解析曲線をなすものを末端（end）と呼ばれる。

$\Delta = \Delta^R$ で，R のマルチン境界を表し，$\Delta_1 = \Delta_1^R$ で，R のミニマルマルチン境界を表す。$\Delta_1(G) = \{\xi \in \Delta_1 : \hat{R}_{k_\xi}^{R\setminus G}$ が R ポテンシャルである。$\}$ とおく。

$\Delta_1(G)' = \{\xi \in \Delta_1(G) : k_\xi - \hat{R}_{k_\xi}^{R\setminus G}$ が R 上で非負値優優調和関数をもつ。$\}$ このとき，平成 30 年度は以下の定理を得た（3 章の【**講演**】（1）でこの内容を講演した）。

定理 $\{G_n\}$ を R の非コンパクトな部分領域で，各 $G \setminus \overline{G_n}$ は G の相対コンパクトな部分領域かつ $\partial(G_n \setminus \overline{G_{n+1}})$ $(n = 1, 2, \cdots)$ は高々有限個の点を除いて，高々有限個の解析曲線からなっているとし，

(i) - (iv) が満たされているとする

(i) $G_n \supset G_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$,

(ii) $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset$,

(iii) 各$G \setminus \overline{G_n}$は相対コンパクトであり,

(iv) 各$B_n = \overline{G_{2n-1}} \setminus G_{2n}$は閉領域であり, かつ,

(v) $\sum_{n=2}^{\infty} modB_n = +\infty$,

ここで, $modB_n$はB_nのmodulusを表す(B_nは$\partial B_n \cap G$上にa辺があるとする)。

このとき, $\Delta_1(G)' = \emptyset$.

2. 以下の内容を論集（Acta humanistica et scientica universitatis sangio kyotiensis, Natural science series no.45, March 2018）に「開 Riemann 面上の Heins 型定理について」という表題で掲載した。

F を Green 関数をもつ開 Riemann 面とし，そのミニマルマルチン境界をΔ_1とする。$\zeta(\in \Delta)$に対して，k_ζをζで極をもつマルチン核とし，$\omega(\subset R)$をその各相対境界がコンパクトでなく , 非相対コンパクトな領域とする。$\Delta_\omega := \{\xi(\in \Delta_1) | k_\zeta \neq \hat{R}_{k_\zeta}^{F\setminus\omega}\}$とおく。ここで，$\hat{R}_{k_\zeta}^{F\setminus\omega}$は$k_\zeta$の$F \setminus \omega$への**掃散（balayage）**である。$HP_\omega(F) := \{h | h$は$\Omega$上の正値調和関数で，$\hat{R}_h^{F\setminus\omega}$は$F$上のテンシャルである。$\}$とおく。このとき, 平成 30 年度は以下の定理を得た（この内容について, 3 章の**【論文】**を出版して, 3 章の**【講演】**(2) で講演した)。

主定理. (1) Δ_ωの調和測度が正のとき，もし，すべての$u(\in HP_\omega(F))$がすべての点$\xi(\in \Delta_\omega)$で , 同じ極限値をもつとすると，Δ_ωはただ 1 つの点からなる。

(2) Δ_ωの調和測度が 0 のとき，もし，すべての$u, v(\in HP_\omega(F))$ に対して，$u - v$がすべての点$\xi(\in \Delta_\omega)$で，同じ極限値をもつとすると，Δ_ωはただ 1 つの点からなる。

3. Uを単位円板とする。$\{a_n\}$と$\{b_n\}$を$0 < a_n < b_n < a_{n+1} < 1$および$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$を満足する数列とする。各自然数 n に対して, $I_n = [a_n, b_n]$とおき, $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$とおく。$D = D(\{a_n\}, \{b_n\})$ で，領域$U \setminus I$を表す。Dの 2 つのコピー D_1; D_2 をとる。各自然数 n に対して，それぞれ，D_1 における In の上縁および下縁と D_2 における In の上縁および下縁を接合する。このとき，得られるリーマン面を$W = W(\{a_n\}, \{b_n\})$で表し，W を D のダブルと呼ばれている。Δ_1で W のミニマルマルチン境界を表す。このとき，平成 30 年度は以下の定理を得た（3 章の**【講演】**(3) でこの内容を講演した)。

定理 I が 1 でミニマルシンならば，$\Delta_1 \simeq \partial U \cup \partial U$.

I が 1 でミニマルシンでないならば，$\Delta_1 \simeq (\partial U \setminus \{1\}) \cup (\partial U \setminus \{1\}) \cup \{1\}$.

3. 本年度の研究活動報告

本年度は，講演を 3 件行い，論文を 1 本出版した。

【講演】

(1) 平成 30 年 8 月 31 日〜平成 30 年 9 月 2 日に宮崎大学工学部で開催されたポテンシャル論研究集会で , “On a Heins-Segawa type theorem” という題目の講演を行った。

(2) 平成 30 年 9 月 24 日〜平成 30 年 9 月 27 日に岡山大学で開催された日本数学会 2018 年度秋季総合分科会で, 「開 Riemann 面上の Heins 型定理について」という題目の講演を行った。

(3) 平成 31 年 2 月 12 日〜 平成 31 年 2 月 13 日に北海道大学理学部で開催された研究集会 “Potential analysis and its Related elds 2019” で, “On the Martin boundary of the double of a slit unit disc” という題目の講演を行った。

【論文】

正岡弘照, “ 開リーマン面上の Heins 型定理について ”, Acta Humanstica et Scientica Univ. Sangio Kyotiensis Natural Science Series, 45 (2018), 161-169.

On the minimal Martin boundaries of open Riemann surfaces

Hiroaki MASAOKA

Abstract

For each of the following cases, we considered the minimal Martin boundary of the open Riemann surface R.

1. R is a non-compact subregion of an open Rieman surface F satisfying the following.

(1) there exists the Green function on F;

(2) the ideal boundary of F in the sense of Kerékártó-Stoïklow consits of only one point.

2. R is a relatively non-compact subregion of an open Rieman surface F where there exists the Green function and each relative boundary of R is not compact.

3. R is a double of a slit unit disk.

Keywords : Open Riemann surface, minimal Martin boundary, the ideal boundary in the sense of Kerékártó-Stoïklow, double, relatively non-compact subregion