

# 多重ゼータ値の代数的構造の研究

田 中 立 志\*

## 要 旨

Connes-Kreimer による根付き木のホップ代数に基づいて構成した、いわゆる根付き木写像について、さまざまな研究集会で発表するとともに、有意義な知見を得た。そして、根付き木写像の追究と新しい応用の発見に着手した。

キーワード：多重ゼータ値, Connes-Kreimer のホップ代数, 根付き木写像, 調和積代数, 多重  $L$  値

## 1. 研究の背景と目的

Euler-Zagier 型の (古典的な) 多重ゼータ値は, 多重  $L$  値,  $q$ -類似版,  $p$  進版など形を変えた対象の導入とその研究が並行して行われてきた。現在では, 多重 Eisenstein 級数, 金子-Zagier の有限多重ゼータ値など, さらなる拡張・変形と, その性質に関する研究が進められている。本研究では古典的な多重ゼータ値のみからは捉えにくい代数的現象を, そのさまざまな拡張・変形版を介して解明することを目的とする。ホップ代数やオペラッドとの関連など, 代数的構造を深く研究し, 多重ゼータ値のさらなる拡張の可能性を探る。

## 2. 研究成果報告

(1) 根付き木写像のなす Hopf 代数は, 調和積代数との間に Hopf 代数としての準同型を具体的に作ることができるだろう, との観点から, 安田正大氏 (大阪大学) とともに研究を進めている。安田氏によって証明すべき事案が考察され, その後個人的な研究打合せを経て, それらはかなり精査された。

(2) 根付き木写像を多重  $L$  値に作用するように拡張できるか, という研究を若林徳子氏 (立命館大学) とともに進めている。根付き木写像が作用する空間を二変数非可換多項式環から多変数非可換多項式環に自然に拡張することを考えている。すでに証明すべき事柄を具体的に見つけており, 二変数の場合に照らして多変数の場合の証明を与えることができるかどうかが課題として残っている。

(3) 台湾で開かれた国際研究集会「Taiwan-Japan Joint Workshop on Multiple Zeta Values」で講演した際に, 根付き木写像を射影直線マイナス  $\{0, 1, \infty\}$  の基本群への作用とみなすことができるため, 量子論的な応用があるのではないか, という指摘をいただいた。

---

\* 京都産業大学理学部

(4) 京都産業大学理学部数理科学科の談話会で発表した際に、伊藤悠氏から、根付き木写像はラフパス理論と関連があるかもしれないという指摘をいただいた。その後、ラフパス理論に Connes-Kreimer のホップ代数が使われることがあるという知見を得た。

### 3. 本年度の研究活動報告

本年度は、講演を 3 件行い、論文を 3 本したためた：

#### 【講演】

- (1) Rooted tree maps and some relations for multiple zeta values, 関西多重ゼータ研究会, 首都大学東京, 2018.5.27.
- (2) 多重ゼータ値と根付き木写像, 談話会, 京都産業大学, 2018.6.13.
- (3) Rooted Tree Maps and Multiple Zeta Values, Taiwan-Japan Joint Workshop on Multiple Zeta Values, 国立台湾大学, 2018.8.2-5.

#### 【論文】

- (1) H. Bachmann, T. Tanaka, Rooted tree maps and the derivation relation for multiple zeta values, Intern. J. Number Theory 14 (10), 2657-2662.
- (2) H. Bachmann, T. Tanaka, Rooted tree maps and Kawashima relations for multiple zeta values, to appear in Kyushu J. Math.
- (3) 田中立志, 根付き木写像と多重ゼータ値, 早稲田整数論研究集会 2018 報告集 (査読なし)。

本年度は関西多重ゼータ研究会 (<https://sites.google.com/site/kmzsince2011/>) を 5 回開催した。

# Study on algebraic structures of multiple zeta values

Tatsushi TANAKA

## Abstract

I made several talks on the rooted tree maps, which I constructed based on Connes-Kreimer Hopf algebra of rooted trees, to obtain some valuable suggestion. Then I started deeper study on the rooted tree maps to find new applications of them.

**Keywords :** multiple zeta values, Connes-Kreimer Hopf algebra, rooted tree maps, harmonic algebra, multiple  $L$ -values

