有限個の解析的Jordan閉曲線によって構成される開リーマン面のダブルのマルチン境界について

故米谷文男先生に捧ぐ

正　岡　弘　照

要　旨

有限個の解析的Jordan閉曲線によって構成される開リーマン面のダブルのマルチン境界を考察する。

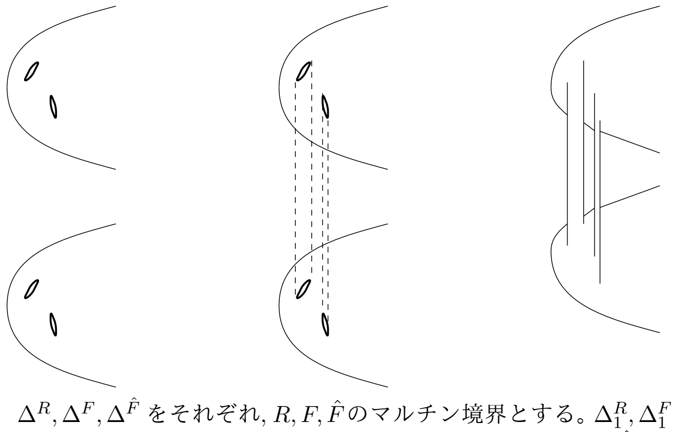
キーワード: ダブル、解析曲線、マルチン境界、開リーマン面、調和関数

初めに

この小論では, 有限個の解析的Jordan閉曲線によって構成される開リーマン面のダブルのマルチン境界を決定することを目的とする。このことは, すでに知られていることのように思われるが, 具体的な記載はない。この小論では, マルチン核の対応を詳細に調べる方法を採用することによりこの事実とミニマルマルチン境界に関する事実を示す。

1. 記号.

Rを開リーマン面とする。以下の用語は楠[2, p.16-p.18]を参照せよ。R上で, n個の互いに交わらない解析的Jordan閉曲線$\ell_1, \cdots, \ell_n$をとる。各ℓ_j $(j = 1, \cdots, n)$はそれにより, Rは相対コンパクトな領域(ℓ_jが囲む領域)と非相対コンパクトな領域に分割されるものとする。各ℓ_j $(j = 1, \cdots, n)$が囲む領域をU_j $(j = 1, \cdots, n)$によって, あらわす。$F = R - \cup_{j=1}^{n} U_j$とおく。$F$は$\ell_1, \cdots, \ell_n$を境界にもつ**境界のある**リーマン面である。$F^*$を$F$のコピーとする。$F$と$F^*$をその境界に沿って貼り合わせてえられる面を$\hat{F}$であらわす。$\hat{F}$は開リーマン面になることがわかる。$\hat{F}$は$F$の**ダブル**といわれる。



$\Delta^R, \Delta^F, \Delta^{\hat{F}}$ をそれぞれ, $R, F, \hat{F}$のマルチン境界とする。$\Delta_1^R, \Delta_1^F, \Delta_1^{\hat{F}}$によって, それぞれ, $R, F, \hat{F}$のミニマルマルチン境界をあらわす。$\zeta \in \Delta^R, \zeta' \in \Delta^F, \tilde{\zeta} \in \Delta^{\hat{F}}$に対して, $k_\zeta^R, k_{\zeta'}^F, k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}$によって, それぞれ, $R, F, \hat{F}$上の$\zeta, \zeta', \tilde{\zeta}$に極をもつ**マルチン核**をあらわす。マルチンの理論については, [1], [3]を参照してほしい。また, 以下の議論で使用されるリーマン面上のポテンシャル論については, [1,0章–5章]を参照してほしい。

2. 準備.

補題 2.1. ξ'を$F\setminus\cup_{j=1}^{n}\ell_j$の点とする。$\xi'$は$\hat{F}$上の点$\tilde{\xi}$および$R$上の点$\xi$とみなすことができる。$g_{\tilde{\xi}}^{\hat{F}}, g_{\xi}^{R}$はそれぞれ, $\tilde{\xi}, \xi$で極をもつ$\hat{F}, R$上のグリーン関数であるとする。$\overline{U}=\cup_{j=1}^{n}(U_j\cup\ell_j)$とおく。それぞれ, $u_{\xi'}^{F}=g_{\tilde{\xi}}^{\hat{F}}-\widehat{R}_{g_{\tilde{\xi}}^{\hat{F}}}^{F^*}, v_{\xi'}^{F}=g_{\xi}^{R}-\widehat{R}_{g_{\xi}^{R}}^{\overline{U}}$ とおく。ここで, $\widehat{R}_{g_{\xi}^{R}}^{\overline{U}}$ は $\overline{U}$に関するg_{ξ}^{R}の掃散とする。このとき, $u_{\xi'}^{F}=v_{\xi'}^{F}$は$\xi'$で極をもつ$F$上のグリーン関数である。

証明. グリーン関数の定義から, F上, $u_{\xi'}^{F}\geq g_{\xi'}^{F}, v_{\xi'}^{F}\geq g_{\xi'}^{F}$がなりたつ。
$u_{\xi'}^{F}-g_{\xi'}^{F}$および$v_{\xi'}^{F}-g_{\xi'}^{F}$は$F$上の調和関数であることがわかる。
$\overline{U}$上のすべての点zに対して, $\lim_{x\to z}u_{\xi'}^{F}(x)-g_{\xi'}^{F}(x)=0$ および $\lim_{x\to z}v_{\xi'}^{F}(x)-g_{\xi'}^{F}(x)=0$という事実によって, 最大値原理を用いると, F上, $u_{\xi'}^{F}=v_{\xi'}^{F}=g_{\xi'}^{F}$がなりたつ。

補題 2.2. $\tilde{\zeta}$を $\Delta^{\hat{F}}$の任意の点とする。$\tilde{z}_0\in\hat{F}$で, Fの点z_0とみなすことができる点とし, 固定しておく。このとき, $\Delta^{F}\setminus\cup_{j=1}^{n}\ell_j$の点$\zeta'$がただ1つ存在して, F上,

$$k_{\zeta'}^{F}=\frac{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}-\widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}}^{F^*}}{1-\widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}}^{F^*}(\tilde{z}_0)}$$

がなりたつかまたは, $\Delta^{F^*}\setminus\cup_{j=1}^{n}\ell_j$の点$\zeta'^*$がただ1つ存在して, F^*上,

$$k_{\zeta'^*}^{F^*}=\frac{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}-\widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}}^{F}}{1-\widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}}^{F}(\tilde{z}_0)}$$

がなりたつ。

証明. $\tilde{\zeta}$を $\Delta^{\hat{F}}$の任意の点とする。$\{\tilde{\xi}_l\}_{l=1}^{\infty}(\subset\hat{F})$を$\lim_{l\to\infty}\tilde{\xi}_l=\tilde{\zeta}$をみたす任意の点列とする。このとき, $\lim_{l\to\infty}\dfrac{g_{\tilde{\xi}_l}^{\hat{F}}}{g_{\tilde{\xi}_l}^{\hat{F}}(\tilde{z}_0)}=k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}$ がなりたつ。$F\cup F^*=\hat{F}, F\cap F^*=\cup_{j=1}^{n}\ell_j$で, $\cup_{j=1}^{n}\ell_j$は$\hat{F}$のコンパクト部分集合であるので, 適当な$n_0\in\mathbb{N}$が存在して, $\{\tilde{\xi}_l\}_{l=n_0}^{\infty}\subset F$または$\{\tilde{\xi}_l\}_{l=n_0}^{\infty}\subset F^*$がなりたつ。以下では, 前者がなりたつと仮定して, 議論をすすめる。$n_0=1$として, 議論してよい。

各$\tilde{\xi}_l$ $(l\in\mathbb{N})$はFの点ξ_l $(l\in\mathbb{N})$とみなしてよい。あるΔ^{F}の点ζ'と$\{\xi_l\}_{l=1}^{\infty}$の部分列$\{\xi_{l_k}\}_{k=1}^{\infty}$が存在して, $\lim_{k\to\infty}\dfrac{g_{\xi_{l_k}}^{F}}{g_{\xi_{l_k}}^{F}(z_0)}=k_{\zeta'}^{F}$をみたす。補題 2.1によって, F上, 以下がなりたつ。

$$k_{\zeta'}^{F}=\lim_{k\to\infty}\frac{g_{\tilde{\xi}_{l_k}}^{\hat{F}}-\widehat{R}_{g_{\tilde{\xi}_{l_k}}^{\hat{F}}}^{F^*}}{g_{\tilde{\xi}_{l_k}}^{\hat{F}}(\tilde{z}_0)-\widehat{R}_{g_{\tilde{\xi}_{l_k}}^{\hat{F}}}^{F^*}(\tilde{z}_0)}=\frac{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}-\widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}}^{F^*}}{1-\widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}}^{F^*}(\tilde{z}_0)}.$$

よって, $\Delta^{F}\setminus\cup_{j=1}^{n}\ell_j$の点$\zeta'$がただ1つ存在して, F上,

$$k_{\zeta'}^{F}=\frac{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}-\widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}}^{F^*}}{1-\widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}}^{F^*}(\tilde{z}_0)}$$

がなりたつ。

$\{\tilde{\xi}_l\}_{l=n_0}^{\infty}\subset F^*$がなりたつ場合も、上の議論と同様の議論を行うことにより, $\Delta^{F^*}\setminus\cup_{j=1}^{n}\ell_j$の点$\zeta'^*$がただ1つ存在して, F^*上,

$$k_{\zeta'^*}^{F^*}=\frac{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}-\widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}}^{F}}{1-\widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}}^{F}(\tilde{z}_0)}$$

がなりたつことがわかる。

補題 2.2′. $\tilde{\zeta}$を$\Delta_1^{\hat{F}}$の任意の点とする。 このとき, $\Delta_1^{F}\setminus\cup_{j=1}^{n}\ell_j$の点$\zeta'$がただ1つ存在して, F上,

$$k^F_{\zeta'} = \frac{k^{\hat{F}}_{\tilde{\zeta}} - \widehat{R}^{F^*}_{k^{\hat{F}}_{\tilde{\zeta}}}}{1 - \widehat{R}^{F^*}_{k^{\hat{F}}_{\tilde{\zeta}}}(\tilde{z}_0)}$$

がなりたつかまたは, $\Delta^{F^*}_1 \setminus \cup^n_{j=1}\ell_j$ の点 ζ'^* がただ1つ存在して, F^* 上,

$$k^{F^*}_{\zeta'^*} = \frac{k^{\hat{F}}_{\tilde{\zeta}} - \widehat{R}^{F}_{k^{\hat{F}}_{\tilde{\zeta}}}}{1 - \widehat{R}^{F}_{k^{\hat{F}}_{\tilde{\zeta}}}(\tilde{z}_0)}$$

がなりたつ。

証明. $\tilde{\zeta}$ を $\Delta^{\hat{F}}_1$ の任意の点とする。補題 2.2によって, このとき, $\Delta^F \setminus \cup^n_{j=1}\ell_j$ の点 ζ' がただ1つ存在して, F 上,

$$k^F_{\zeta'} = \frac{k^{\hat{F}}_{\tilde{\zeta}} - \widehat{R}^{F^*}_{k^{\hat{F}}_{\tilde{\zeta}}}}{1 - \widehat{R}^{F^*}_{k^{\hat{F}}_{\tilde{\zeta}}}(\tilde{z}_0)}$$

がなりたつかまたは, $\Delta^{F^*} \setminus \cup^n_{j=1}\ell_j$ の点 ζ'^* がただ1つ存在して, F^* 上,

$$k^{F^*}_{\zeta'^*} = \frac{k^{\hat{F}}_{\tilde{\zeta}} - \widehat{R}^{F}_{k^{\hat{F}}_{\tilde{\zeta}}}}{1 - \widehat{R}^{F}_{k^{\hat{F}}_{\tilde{\zeta}}}(\tilde{z}_0)}$$

がなりたつ。

まず, 前者がなりたつと仮定する。F 上の非負値調和関数 u が存在して, F 上で, $u \le k^F_{\zeta'} \cdots$ ① がなりたつと仮定する。①より, すべての $\cup^n_{j=1}\ell_j$ の点 ξ に対して, $\lim_{z\to\xi} u(z) = 0$ がなりたつことに注意する。

$$\widetilde{u} = \begin{cases} F \text{ 上で}, & u \\ F^* \text{ 上で}, & 0 \end{cases}$$

とおく。このとき, $\widetilde{u}$ は $\hat{F}$ 上の劣調和関数である。

$U = \inf\{s | s$ は $\hat{F}$ 上の正値優調和関数であり, $\hat{F}$ 上で, $s \ge \widetilde{u}$ をみたす。$\}$

とおく。ペロンの方法によって, U は $\hat{F}$ 上の正値調和関数であり, $\hat{F}$ 上で, $U \ge \widetilde{u}$ をみたす。

$$c_0 = \frac{1}{1 - \widehat{R}^{\cup^n_{j=1}\ell_j}_{k^{\hat{F}}_{\tilde{\zeta}}}(\tilde{z}_0)} \cdots ②$$

とおく。このとき,

$$k^F_{\zeta'} = c_0 \left(k^{\hat{F}}_{\tilde{\zeta}} - \widehat{R}^{\cup^n_{j=1}\ell_j}_{k^{\hat{F}}_{\tilde{\zeta}}} \right)$$

がなりたつ。①によって, $\hat{F}$ 上で, $\widetilde{u} \le c_0\, k^{\hat{F}}_{\tilde{\zeta}}$ がなりたつ。U の定義によって, $\hat{F}$ 上で, $U \le c_0\, k^{\hat{F}}_{\tilde{\zeta}}$ がなりたつ。ミニマル性によって, $\hat{F}$ 上で, 定数 c が存在して, $U = c\, k^{\hat{F}}_{\tilde{\zeta}} \cdots$ ③ がなりたつ。

$U - \widetilde{u}$ は $\hat{F}$ の正値優調和関数で, $\cup^n_{j=1}\ell_j$ 上で, $U - \widetilde{u} = U$ がなりたつので,

$\widehat{R}^{\cup^n_{j=1}\ell_j}_U$ の定義によって, $\hat{F}$ 上で, $U - \widetilde{u} \ge \widehat{R}^{\cup^n_{j=1}\ell_j}_U \cdots$ ④ がなりたつ。

他方, $\widetilde{u} + \widehat{R}^{\cup^n_{j=1}\ell_j}_U$ は $\hat{F}$ 上で, 連続で, 優調和である。というのは, 明らかに, $\widetilde{u} + \widehat{R}^{\cup^n_{j=1}\ell_j}_U$ は $\hat{F}$ 上で連続で, $\hat{F} \setminus \cup_{j=1}\ell_j$ 上の調和関数であるので, すべての $\cup^n_{j=1}\ell_j$ の点 z に対して,

$$\widetilde{u}(z) + \widehat{R}^{\cup^n_{j=1}\ell_j}_U(z) \ge \int_{\partial V(z)} \left(\widetilde{u} + \widehat{R}^{\cup^n_{j=1}\ell_j}_U \right) dm,$$

がなりたつことを調べればよい。ここで, $V(z)$ は局所円板で, dm は1次元ルベーグ測度である。④によって, すべての $\cup^n_{j=1}\ell_j$ の点 z に対して,

$$\widetilde{u}(z) + \widehat{R}^{\cup^n_{j=1}\ell_j}_U(z) = U(z) = \int_{\partial V(z)} U dm \ge \int_{\partial V(z)} \left(\widetilde{u} + \widehat{R}^{\cup^n_{j=1}\ell_j}_U \right) dm$$

がなりたつ。 U の定義によって, $\hat{F}$ 上で,

$$\widetilde{u} + \widehat{R}^{\cup^n_{j=1}\ell_j}_U \ge U \cdots ⑤$$

がなりたつ。

④ および ⑤によって, $\hat{F}$ 上で, $\widetilde{u}+\widehat{R}_U^{\cup_{j=1}^n \ell_j}=U\cdots$⑥ がなりたつ。したがって, ②,③および⑥によって, F 上で,

$$u=\widetilde{u}=U-\widehat{R}_U^{\cup_{j=1}^n \ell_j}=ck_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}-\widehat{R}_{ck_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}}^{\cup_{j=1}^n \ell_j}=\frac{c}{c_0}\ c_0\ \left(k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}-\widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}}^{\cup_{j=1}^n \ell_j}\right)=\frac{c}{c_0}\ k_{\zeta'}^F$$

がなりたつ。よって, ζ' が Δ_1^F に属することがわかる。

$\Delta^{F^*}\setminus\cup_{j=1}^n \ell_j$ の点 ζ'^* がただ1つ存在して, F^* 上,

$$k_{\zeta'^*}^{F^*}=\frac{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}-\widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}}^F}{1-\widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}}^F(\tilde{z}_0)}$$

がなりたつ場合も, 上の議論と同様の議論を行うことにより, 求める結果をうる。

補題 2.3. (1) ζ' を任意の $\Delta^F\setminus\cup_{j=1}^n \ell_j$ の点とする。このとき, $\Delta^{\hat{F}}\cap\overline{F}^{\hat{F}\cup\Delta^{\hat{F}}}$ (ここで, $\overline{F}^{\hat{F}\cup\Delta^{\hat{F}}}$ は F の $\hat{F}\cup\Delta^{\hat{F}}$ 閉包を表す)の点 $\tilde{\zeta}$ がただ1つ存在して, F 上で,

$$k_{\zeta'}^F=\frac{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}-\widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}}^{\cup_{j=1}^n \ell_j}}{1-\widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}}^{\cup_{j=1}^n \ell_j}(\tilde{z}_0)}$$

がなりたつ。

(2) ζ' を任意の $\Delta^{F^*}\setminus\cup_{j=1}^n \ell_j$ の点とする。このとき, $\Delta^{\hat{F}}\cap\overline{F^*}^{\hat{F}\cup\Delta^{\hat{F}}}$ の点 $\tilde{\zeta}^*$ がただ1つ存在して, F^* 上,

$$k_{\zeta'}^{F^*}=\frac{k_{\tilde{\zeta}^*}^{\hat{F}}-\widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}^*}^{\hat{F}}}^{\cup_{j=1}^n \ell_j}}{1-\widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}^*}^{\hat{F}}}^{\cup_{j=1}^n \ell_j}(\tilde{z}_0)}$$

がなりたつ。

証明. (2)は(1)と同様の論法で示すことができるので, (1)のみ示す。$\{\xi_l'\}_{l=1}^\infty$ $(\subset F)$ を任意の点列で, $\lim_{l\to\infty}\xi_l'=\zeta'$ をみたすとする。したがって, $\lim_{l\to\infty}\dfrac{g_{\xi_l'}^F}{g_{\xi_l'}^F(z_0)}=k_{\zeta'}^F$ がなりたつ。

ξ_l' を $\hat{F}$ の点 $\tilde{\xi}_l$ とみなしてよい。 したがって, $\Delta^{\hat{F}}$ の点 $\tilde{\zeta}$ および $\{\tilde{\xi}_l\}_{l=1}^\infty$ の部分点列 $\{\tilde{\xi}_{l_k}\}_{k=1}^\infty$ が存在して, $\lim_{k\to\infty}\dfrac{g_{\tilde{\xi}_{l_k}}^{\hat{F}}}{g_{\tilde{\xi}_{l_k}}^{\hat{F}}(z_0)}=k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}$ をみたす。補題 2.1より, F 上で,

$$k_{\zeta'}^F=\lim_{k\to\infty}\frac{g_{\tilde{\xi}_{l_k}}^{\hat{F}}-\widehat{R}_{g_{\tilde{\xi}_{l_k}}^{\hat{F}}}^{\cup_{j=1}^n \ell_j}}{g_{\tilde{\xi}_{l_k}}^{\hat{F}}(\tilde{z}_0)-\widehat{R}_{g_{\tilde{\xi}_{l_k}}^{\hat{F}}}^{\cup_{j=1}^n \ell_j}(\tilde{z}_0)}=\frac{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}-\widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}}^{\cup_{j=1}^n \ell_j}}{1-\widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}}^{\cup_{j=1}^n \ell_j}(\tilde{z}_0)}$$

がなりたつ。

$\Delta^{\hat{F}}$ のもう1つの点 $\tilde{\zeta}_1$ が存在して, F 上で,

$$k_{\zeta'}^F=\frac{k_{\tilde{\zeta}_1}^{\hat{F}}-\widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}_1}^{\hat{F}}}^{\cup_{j=1}^n \ell_j}}{1-\widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}_1}^{\hat{F}}}^{\cup_{j=1}^n \ell_j}(\tilde{z}_0)}$$

がなりたつと仮定する。

$$c=c(z_0)=\frac{1}{1-\widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}}^{\cup_{j=1}^n \ell_j}(\tilde{z}_0)}$$

および

$$c_1=c_1(z_0)=\frac{1}{1-\widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}_1}^{\hat{F}}}^{\cup_{j=1}^n \ell_j}(\tilde{z}_0)}$$

とおく。仮定によって,

$$c\ \left(k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}} - \widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}}^{\cup_{j=1}^{n}\ell_j}\right) = c_1\ \left(k_{\tilde{\zeta}_1}^{\hat{F}} - \widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}_1}^{\hat{F}}}^{\cup_{j=1}^{n}\ell_j}\right)$$

がなりたつ。

$\cup_{j=1}^{n}\ell_j$ が $\hat{F}$ のコンパクト部分集合であり, $\widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}}^{\cup_{j=1}^{n}\ell_j}$ および $\widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}_1}^{\hat{F}}}^{\cup_{j=1}^{n}\ell_j}$ が $\hat{F}$ 上のグリーンポテンシャルであるので, リースの分解定理(cf. [1, Satz 4.6])によって, $ck_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}} = c_1 k_{\tilde{\zeta}_1}^{\hat{F}}$ がなりたつ。

$k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}(\tilde{z}_0) = k_{\tilde{\zeta}_1}^{\hat{F}}(\tilde{z}_0) = 1$ であるので, $c = c_1$ となり, したがって, $k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}} = k_{\tilde{\zeta}_1}^{\hat{F}}$ がなりたつ。したがって, $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}_1$ がなりたつ。

補題 2.3′. (1) ζ' を任意の $\Delta_1^F \setminus \cup_{j=1}^{n}\ell_j$ の点とする。このとき, $\Delta_1^{\hat{F}} \cap \overline{F}^{\hat{F}\cup\Delta^{\hat{F}}}$ の点 $\tilde{\zeta}$ がただ1つ存在して, F 上で,

$$k_{\zeta'}^{F} = \frac{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}} - \widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}}^{\cup_{j=1}^{n}\ell_j}}{1 - \widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}}^{\cup_{j=1}^{n}\ell_j}(\tilde{z}_0)}$$

がなりたつ。

(2) ζ' を任意の $\Delta_1^{F^*} \setminus \cup_{j=1}^{n}\ell_j$ の点とする。このとき, $\Delta_1^{\hat{F}} \cap \overline{F^*}^{\hat{F}\cup\Delta^{\hat{F}}}$ の点 $\tilde{\zeta}^*$ がただ1つ存在して, F^* 上,

$$k_{\zeta'}^{F^*} = \frac{k_{\tilde{\zeta}^*}^{\hat{F}} - \widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}^*}^{\hat{F}}}^{\cup_{j=1}^{n}\ell_j}}{1 - \widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}^*}^{\hat{F}}}^{\cup_{j=1}^{n}\ell_j}(\tilde{z}_0)}$$

がなりたつ。

証明. (2)は(1)と同様の論法で示すことができるので, (1)のみ示す。補題 2.3より, 任意の点 ζ' $(\in \Delta^F \setminus \cup_{j=1}^{n}\ell_j)$ に対して, $\hat{F}$ の点 ζ がただ1つの存在して, F 上で,

$$k_{\zeta'}^{F} = \frac{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}} - \widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}}^{\cup_{j=1}^{n}\ell_j}}{1 - \widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}}^{\cup_{j=1}^{n}\ell_j}(\tilde{z}_0)}$$

がなりたつ。

$\zeta' \in \Delta_1^F$ を仮定する。

u が $\hat{F}$ 上の非負値調和関数で, $\hat{F}$ 上で, $u \leq k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}$ をみたすと仮定する。このとき, $\hat{F}$ 上で,

$$u - \widehat{R}_{u}^{\cup_{j=1}^{n}\ell_j} \leq k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}} - \widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}}^{\cup_{j=1}^{n}\ell_j} \cdots ①$$

がなりたつ。

$$c_0 = \frac{1}{1 - \widehat{R}_{k_{\zeta}^{\hat{F}}}^{\cup_{j=1}^{n}\ell_j}(\tilde{z}_0)}$$

とおく。

このとき, F 上で,

$$k_{\zeta'}^{F} = c_0 \left(k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}} - \widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}}^{W}}^{\cup_{j=1}^{n}\ell_j}\right)$$

がなりたつ。

$u - \widehat{R}_{u}^{\cup_{j=1}^{n}\ell_j}$ および $k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}} - \widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}}^{\cup_{j=1}^{n}\ell_j}$ を F 上の非負値調和関数とみなす。

ミニマル性と①によって, F 上で, $u - \widehat{R}_{u}^{\cup_{j=1}^{n}\ell_j} = c\left(k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}} - \widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}}^{\cup_{j=1}^{n}\ell_j}\right)$ がなりたつ。連続性と掃散の定義によって, $\hat{F}$ 上で, $u - \widehat{R}_{u}^{F^*} = c\left(k_{\zeta}^{\hat{F}} - \widehat{R}_{k_{\zeta}^{\hat{F}}}^{F^*}\right)$ がなりたつ。

したがって, $\hat{F}$ 上で, $u + c\widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}}^{F^*} = ck_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}} + \widehat{R}_{u}^{F^*}$ がなりたち, $\widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}}^{F^*} \neq k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}$ であるので, $\widehat{R}_{k_{\tilde{\zeta}}^{\hat{F}}}^{F^*}$ が $\hat{F}$ 上のグ

リーンポテンシャルであることに注意する(cf. [1, 補題11.2])。ところで, $\hat{F}$ 上で, $u \leq k_{\zeta}^{\hat{F}}$ であるので, $\widehat{R}_u^{F^*} \leq \widehat{R}_{k_{\zeta}^{\hat{F}}}^{F^*}$ である。これより, $\widehat{R}_u^{F^*}$ は $\hat{F}$ 上のグリーンポテンシャルであることであることがわかる。よって, $u + c\widehat{R}_{k_{\zeta}^{\hat{F}}}^{F^*} = ck_{\zeta}^{\hat{F}} + \widehat{R}_u^{F^*}$ に対して, リースの分解定理(cf. [1, Satz 4.6])を用いると, $\hat{F}$ 上で, $u = ck_{\zeta}^{\hat{F}}$ がなりたつ。よって, $\zeta \in \Delta_1^{\hat{F}}$ がなりたつ。

補題 2.4. (1) ζ を任意の Δ^R の点とする。このとき, $\Delta^F \setminus \cup_{j=1}^n \ell_j$ の点 ζ' がただ1つ存在して, F 上で,

$$k_{\zeta'}^F = \frac{k_\zeta^R - \widehat{R}_{k_\zeta^R}^{\overline{U}}}{1 - \widehat{R}_{k_\zeta^R}^{\overline{U}}(z_0)}$$

がなりたつ。

(2) ζ を任意の Δ^R の点とする。このとき, $\Delta^{F^*} \setminus \cup_{j=1}^n \ell_j$ の点 ζ' がただ1つ存在して, F^* 上で,

$$k_{\zeta'}^{F^*} = \frac{k_\zeta^R - \widehat{R}_{k_\zeta^R}^{\overline{U}}}{1 - \widehat{R}_{k_\zeta^R}^{\overline{U}}(z_0)}$$

がなりたつ。

証明. (2)は(1)と同様の論法で示すことができるので, (1)のみ示す。$\{\xi_l\}_{l=1}^\infty$ を任意の R の点列で, $\lim_{l\to\infty} \xi_l = \zeta$ がなりたつとする。したがって, $\lim_{l\to\infty} \dfrac{g_{\xi_l}^R}{g_{\xi_l}^R(\tilde{z}_0)} = k_\zeta^R$ がなりたつ。$\overline{U}$ は R のコンパクト部分集合であるので, $\{\xi_l\}_{l=1}^\infty \subset F$ と仮定してよい。よって, 各 ξ_l $(l \in \mathbb{N})$ は F の点 ξ_l' $(l \in \mathbb{N})$ とみなしてよい。よって, ある $\Delta^F \setminus \cup_{l=1}^n \ell_l$ の点 ζ' および $\{\xi_l\}_{l=1}^\infty$ の部分点列 $\{\xi_{l_k}'\}_{k=1}^\infty$ が存在して, $\lim_{k\to\infty} \dfrac{g_{\xi_{l_k}}^F}{g_{\xi_{l_k}}^D(z_0)} = k_{\zeta'}^F$ がなりたつ。補題 2.1によって, F 上で,

$$k_{\zeta'}^F = \lim_{k\to\infty} \frac{g_{\xi_{l_k}}^R - \widehat{R}_{g_{\xi_{l_k}}^R}^{\overline{U}}}{g_{\xi_{l_k}}^R(z_0) - \widehat{R}_{g_{\xi_{l_k}}^R(z_0)}^{\overline{U}}} = \frac{k_\zeta^R - \widehat{R}_{k_\zeta^R}^{\overline{U}}}{1 - \widehat{R}_{k_\zeta^R}^{\overline{U}}(z_0)}$$

がなりたつ。

補題 2.4′**.** (1) ζ を任意の Δ_1^R の点とする。このとき, $\Delta_1^F \setminus \cup_{j=1}^n \ell_j$ の点 ζ' がただ1つ存在して, F 上で,

$$k_{\zeta'}^F = \frac{k_\zeta^R - \widehat{R}_{k_\zeta^R}^{\overline{U}}}{1 - \widehat{R}_{k_\zeta^R}^{\overline{U}}(z_0)}$$

がなりたつ。

(2) ζ を任意の Δ_1^R の点とする。このとき, $\Delta_1^{F^*} \setminus \cup_{j=1}^n \ell_j$ の点 ζ' がただ1つ存在して, F^* 上で,

$$k_{\zeta'}^{F^*} = \frac{k_\zeta^R - \widehat{R}_{k_\zeta^R}^{\overline{U}}}{1 - \widehat{R}_{k_\zeta^R}^{\overline{U}}(z_0)}$$

がなりたつ。

証明 (2)は(1)と同様の論法で示すことができるので, (1)のみ示す。$\zeta \in \Delta_1^R$ とする。補題 2.4によって, $\Delta^F \setminus \cup_{j=1}^n \ell_j$ の点 ζ' がただ1つ存在して, F 上で,

$$k_{\zeta'}^F = \frac{k_\zeta^R - \widehat{R}_{k_\zeta^R}^{\overline{U}}}{1 - \widehat{R}_{k_\zeta^R}^{\overline{U}}(z_0)}$$

がなりたつ。F 上の非負値調和関数 u が存在して, F 上で, $u \leq k_{\zeta'}^F \cdots$ ① がなりたつとする。①より, すべての $\cup_{j=1}^n \ell_j$ の点 ξ に対して, $\lim_{z\to\xi} u(z) = 0$ がなりたつことに注意する。

$$\widetilde{u} = \begin{cases} F \text{ 上で}, & u \\ \overline{U} \text{ 上で}, & 0 \end{cases}$$

とおく。

このとき, $\widetilde{u}$はR上の劣調和関数である。

$$U = \inf\{s | s \text{ は } R \text{ 上の正値調和関数であり}, \ R \text{ 上で}, s \geq \widetilde{u} \text{ がなりたつ。}\}$$

とおく。

ペロンの方法により, UはR上の正値調和関数であり, R上で, $U \geq \widetilde{u}$がなりたつ。

$$c_0 = \frac{1}{1 - \widehat{R}^{\cup_{j=1}^n \ell_j}_{k_\zeta^R}(\tilde{z}_0)} \cdots ②$$

とおく。このとき,

$$k_{\zeta'}^F = c_0 \ \left(k_\zeta^R - \widehat{R}^{\overline{U}}_{k_\zeta^R}\right)$$

がなりたつ。

①によって, R上で, $\widetilde{u} \leq c_0 \ k_\zeta^R$ がなりたつ。Uの定義によって, R上で, $U \leq c_0 k_\zeta^R$ がなりたつ。ミニマル性によって, 定数cが存在して, R上で, $U = ck_\zeta^R \cdots$③がなりたつ。

$U - \widetilde{u}$ はR上の正値優調和関数で, $\overline{U}$上で, $U - \widetilde{u} = U$がなりたつ。$\widehat{R}^{\overline{U}}_U$の定義によって, R上で, $U - \widetilde{u} \geq \widehat{R}^{\overline{U}}_U \cdots$④がなりたつ。他方, $\widetilde{u} + \widehat{R}^{\overline{U}}_U$は$R$上で, 連続であり, 優調和である。というのは, 明らかに $\widetilde{u} + \widehat{R}^{\overline{U}}_U$は$R$上連続で, $R \setminus \cup_{j=1}^n \ell_j$上で調和である。したがって, すべての$\cup_{j=1}^n \ell_j$の点$z$に対して,

$$\widetilde{u}(z) + \widehat{R}^{\overline{U}}_U(z) \geq \int_{\partial V(z)} \left(\widetilde{u} + \widehat{R}^{\overline{U}}_U\right) dm$$

がなりたつことを調べればよい。 ここで, $V(z)$は局所円板であり, dmは1次元ルベーグ測度である。③によって, すべての$\cup_{j=1}^n \ell_j$の点zに対して,

$$\widetilde{u}(z) + \widehat{R}^{\overline{U}}_U(z) = U(z) = \int_{\partial V(z)} U dm \geq \int_{\partial V(z)} \left(\widetilde{u} + \widehat{R}^{\overline{U}}_U\right) dm$$

がなりたつ。Uの定義によって, R上で, $\widetilde{u} + \widehat{R}^{\overline{U}}_U \geq U \cdots$⑤がなりたつ。

④ および ⑤によって, R上で, $\widetilde{u} + \widehat{R}^{\overline{U}}_U = U \cdots$⑥がなりたつ。したがって, ②,③ および⑥によって, F上で,

$$u = \widetilde{u} = U - \widehat{R}^{\overline{U}}_U = c \ k_\zeta^R - \widehat{R}^{\overline{U}}_{ck_\zeta^R} = \frac{c}{c_0} \ c_0 \ \left(k_\zeta^R - \widehat{R}^{\overline{U}}_{k_\zeta^R}\right) = \frac{c}{c_0} k_{\zeta'}^F$$

がなりたつ。

補題 2.5. (1) ζ'を任意の$\Delta^F \setminus \cup_{j=1}^n \ell_j$の点とする。このとき, Δ^Rの点ζがただ1つ存在して, F上で,

$$k_{\zeta'}^F = \frac{k_\zeta^R - \widehat{R}^{\overline{U}}_{k_\zeta^R}}{1 - \widehat{R}^{\overline{U}}_{k_\zeta^R}(\tilde{z}_0)}$$

がなりたつ。

(2) ζ'を任意の$\Delta^{F^*} \setminus \cup_{j=1}^n \ell_j$の点とする。このとき, Δ^Rの点ζがただ1つ存在して, F^*上で,

$$k_{\zeta'}^{F^*} = \frac{k_\zeta^R - \widehat{R}^{\overline{U}}_{k_\zeta^R}}{1 - \widehat{R}^{\overline{U}}_{k_\zeta^R}(\tilde{z}_0)}$$

がなりたつ。

証明. (2)は(1)と同様の論法で示すことができるので, (1)のみ示す。$\{\xi_l'\}_{l=1}^\infty$をF上の点列とし, $\lim_{l \to \infty} \xi_l' = \zeta'$がなりたつとする。したがって, $\lim_{l \to \infty} \dfrac{g^F_{\xi_l'}}{g^F_{\xi_l'}(z_0)} = k_{\zeta'}^F$がなりたつ。

$\cup_{j=1}^\infty \ell_j$はFの相対コンパクト部分集合であるので, 各ξ_l' $(l \in \mathbb{N})$はRの点ξ_l $(l \in \mathbb{N})$とみなしてよい。よって, Δ^Rの点ζと$\{\xi_l\}_{l=1}^\infty$の部分点列$\{\xi_{l_k}\}_{k=1}^\infty$が存在して, $\lim_{k \to \infty} \dfrac{g^R_{\xi_{l_k}}}{g^R_{\xi_{l_k}}(z_0)} = k_\zeta^R$がなりたつ。

補題 2.1によって, F上,

$$k^F_{\zeta'} = \lim_{k\to\infty} \frac{g^R_{\xi_{l_k}} - \widehat{R}^{\overline{U}}_{g^R_{\xi_{l_k}}}}{g^R_{\xi_{l_k}}(z_0) - \widehat{R}^{\overline{U}}_{g^R_{\xi_{l_k}}}(z_0)} = \frac{k^R_\zeta - \widehat{R}^{\overline{U}}_{k^R_\zeta}}{1 - \widehat{R}^{\overline{U}}_{k^R_\zeta}(z_0)}$$

がなりたつ。

Δ^Rの別の点ζ_1が存在して, F上で,

$$k^F_{\zeta'} = \frac{k^R_{\zeta_1} - \widehat{R}^{\overline{U}}_{k^R_{\zeta_1}}}{1 - \widehat{R}^{\overline{U}}_{k^R_{\zeta_1}}(\tilde{z}_0)}$$

がなりたつ。

$$c = c(z_0) = \frac{1}{1 - \widehat{R}^{\overline{U}}_{k^R_\zeta}(z_0)}$$

および

$$c_1 = c_1(z_0) = \frac{1}{1 - \widehat{R}^{\overline{U}}_{k^R_{\zeta_1}}(z_0)}$$

とおく。仮定によって,

$$c\ \left(k^{\hat{F}}_{\hat{\zeta}} - \widehat{R}^{\overline{U}}_{k^{\hat{F}}_{\hat{\zeta}}}\right) = c_1\ \left(k^{\hat{F}}_{\hat{\zeta}_1} - \widehat{R}^{\overline{U}}_{k^{\hat{F}}_{\hat{\zeta}_1}}\right)$$

がなりたつ。$\overline{U}$がRのコンパクト部分集合であるので, $\widehat{R}^{\overline{U}}_{k^R_\zeta}$ および $\widehat{R}^{\overline{U}}_{k^R_{\zeta_1}}$ がR上のグリーンポテンシャルである。リースの分解定理によって, $ck^R_\zeta = c_1\ k^R_{\zeta_1}$ がなりたつ。$k^R_\zeta(z_0) = k^R_{\zeta_1}(z_0) = 1$であるので, $c = c_1$であり, したがって, $k^R_\zeta = k^R_{\zeta_1}$ がなりたつ。したがって, $\zeta = \zeta_1$ がなりたつ。

補題 2.5′. (1) ζ'を任意の$\Delta^F_1 \setminus \cup^n_{j=1}\ell_j$の点とする。このとき, Δ^R_1の点ζがただ1つ存在して, F上で,

$$k^F_{\zeta'} = \frac{k^R_\zeta - \widehat{R}^{\overline{U}}_{k^R_\zeta}}{1 - \widehat{R}^{\overline{U}}_{k^R_\zeta}(\tilde{z}_0)}$$

がなりたつ。

(2) ζ'を任意の$\Delta^{F^*}_1 \setminus \cup^n_{j=1}\ell_j$の点とする。このとき, Δ^R_1の点ζがただ1つ存在して, F^*上で,

$$k^{F^*}_{\zeta'} = \frac{k^R_\zeta - \widehat{R}^{\overline{U}}_{k^R_\zeta}}{1 - \widehat{R}^{\overline{U}}_{k^R_\zeta}(\tilde{z}_0)}$$

がなりたつ。

証明. (2)は(1)と同様の論法で示すことができるので, (1)のみ示す。補題 2.5よって, すべての$\Delta^F \setminus \cup^n_{j=1}\ell_j$の点$\zeta'$に対して, Rの点ζがただ1つ存在して, F上で,

$$k^F_{\zeta'} = \frac{k^R_\zeta - \widehat{R}^{\overline{U}}_{k^R_\zeta}}{1 - \widehat{R}^{\overline{U}}_{k^R_\zeta}(\tilde{z}_0)}$$

がなりたつ。$\zeta' \in \Delta^F$と仮定する。

uはR上の非負値調和関数であり, R上で, $u \leq k^R_\zeta$ をみたすとする。したがって, R上で,

$$u - \widehat{R}^{\overline{U}}_u \leq k^R_\zeta - \widehat{R}^{\overline{U}}_{k^R_\zeta} \cdots ①$$

がなりたつ。

$$c_0 = \frac{1}{1 - \widehat{R}^{\overline{U}}_{k^R_\zeta}(\tilde{z}_0)}$$

とおく。このとき, F上で,

$$k^F_{\zeta'} = c_0\ \left(k^R_\zeta - \widehat{R}^{\overline{U}}_{k^R_\zeta}\right)$$

がなりたつ。$u - \widehat{R}^{\overline{U}}_u$ および $k^R_\zeta - \widehat{R}^{\overline{U}}_{k^R_\zeta}$ をそれぞれ, F上の非負値調和関数とみなす。

ミニマル性および① によって, F 上で, $u - \widehat{R}_u^{\overline{U}} = c\ \left(k_\zeta^R - \widehat{R}_{k_\zeta^R}^{\overline{U}}\right)$ がなりたつ。連続性によって, R 上で, $u - \widehat{R}_u^{\overline{U}} = c\ \left(k_\zeta^R - \widehat{R}_{k_\zeta^R}^{\overline{U}}\right)$ がなりたつ。したがって, R 上で, $u + c\widehat{R}_{k_\zeta^R}^{\overline{U}} = ck_\zeta^R + \widehat{R}_u^{\overline{U}}$ がなりたつ。$\overline{U}$ は R のコンパクト部分集合であるので, $\widehat{R}_u^{\overline{U}}$ および $\widehat{R}_{k_\zeta^R}^{\overline{U}}$ は R 上のグリーンポテンシャルである。リースの定理によって, R 上で, $u = ck_\zeta^R$ がなりたち, したがって, $\widehat{R}_u^{\overline{U}} = c\widehat{R}_{k_\zeta^R}^{\overline{U}}$ がなりたつ。よって, $\zeta \in \Delta_1^R$ がなりたつ。

3. 主定理.

補題 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 によって, 次をうる。

主定理 3.1. $\Delta^{\hat{F}} \cong (\Delta^R) \cup (\Delta^R)$.
ここで, $\cong$ はマルチンの位相による位相同型である。

補題 $2.2', 2.3', 2.4', 2.5'$ によって, 次をうる。

主定理 3.2. $\Delta_1^{\hat{F}} \cong (\Delta_1^R) \cup (\Delta_1^R)$.
ここで, $\cong$ はマルチンの位相による位相同型である。

参考文献

[1] C. Constaninescu und A. Cornea, Ideal Rander Riemannscher Flächen, Springer, 1963.
[2] 楠幸男, 函数論, 朝倉書店, 昭和48年.
[3] R. Martin, Minimal positive harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc. 49(1941), 137-172.

On Martin boundaries for doubles of open Riemann surfaces constructed by finite analytic Jordan closed curves

Dedicated to the late professor Fumio Maitani

Hiroaki MASAOKA

Abstract

We consider Martin boundaries for doubles of open Riemann surfaces constructed by finite analytic Jordan closed curves.

Keywords: double, analytic curve, Martin boundary, open Riemann surface, harmonic function