最適所得課税について

市　田　浩　三
浅　井　　　勇

要　　約

Mirrlees の先駆的な研究以後，線形および非線形モデルを扱った最適所得課税に関する多くの論文が発表されてきた。本稿では，Mirrlees に従い，Pontryagin の最大値原理を利用して，最適所得課税のモデルの定式化を詳細に検討し，数値シミュレーションを行った。

キーワード：最適所得税，非線形モデル，効用関数，社会的厚生関数，最大値原理，シミュレーション

１．はじめに

所得税は，それが政府財源を調達する手段であり，かつ，その税率は通常累進構造がとられて所得の再分配が図られる手段である，という点から重要な租税となっている[1-4]。望ましい所得税を考える場合は，公平公正な分配と経済的効率性を考慮して，その累進構造を導くことになる。Mirrlees は 1971 年に，この問題を分析する端緒となる論文を発表した[5]。そこでは，稼得能力が異なる個人（家計）が連続的に分布する状況において，個人の効用の和（積分）を最大にする所得税体系を選択するという問題を設定し，それを変分法（calculus of variations）または Pontryagin の最大値原理（maximum principle）の問題として考察した。Mirrlees の分析は，一般的な形で定式化されているが，必ずしも厳密で明快なわけではない。また，彼は最大値原理による解を追及しなかった［５, p.179]。

Mirrlees 以後の研究はその不明確さを除いて，より厳密な形で最適所得税論を構築しようとするものであった[6-9]。その流れは２つのカテゴリーからなる。１つは，所得税制を線形構造に限定する研究であり，他の１つは，所得税制を線形構造に限定せず一般に非線形構造として扱う研究である。本稿では，できるだけ一般的な非線形所得税関数を考えて，最大値原理による解を追及し，最適所得課税モデルの数値実験による検討を行った。なお，田近らも同様の計算を行っているが[10]，厳密さに欠けるように思われる。

２．モデルの定式化

ここでは Mirrlees による最適所得税モデルに従って定式化を行う。個人（家計）は同一の効用関数 $u(x,y)$ を持つ。ここで x は消費（$x>0$）で y は労働供給（$0\leq y<1$）である。u は $x>0$，$0\leq y<1$ において連続微分可能であり，一般に $\partial u/\partial x>0$，$\partial u/\partial y<0$ であると仮定される。個人の稼得能力を表すパラメータ n は $f(n)$ で表される連続な密度関数を持ち，区間 $n_0\leq n\leq n_N$ において $f(n)>0$ であるとする（$n_0\geq 0, n_N<\infty$）。課税前所得 $z=ny$ に対する非線形所得税関数を $T(z)=T(ny)$ とすると

$$x=z-T(z)=ny-T(ny) \tag{1}$$

であり，個人は効用関数を最大にするように y を定めるので

$$\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}u(ny-T(ny),y)=u_1(n-nT'(ny))+u_2=0 \tag{2}$$

より

$$1-T'(ny)=-\frac{u_2}{u_1 n} \tag{3}$$

となる。ここで u_1 と u_2 はそれぞれ u の x と y に関する偏微分を示し，T' は T の z に関する微分を表す。(2)(3) を利用すると

$$\frac{du}{dn}=\frac{\partial u}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial n}=u_1\left(y-yT'(ny)\right)=u_1 y\left(1-T'(ny)\right)=u_1 y\left(-\frac{u_2}{u_1 n}\right)=-\frac{yu_2}{n} \tag{4}$$

となる。個々の効用 u が社会的厚生に与える影響を社会的厚生関数 $G(u)$ で表すと，最適所得課税は積分

$$W=\int_{n_0}^{n_N}G(u)f(n)\,dn \tag{5}$$

を最大にする課税政策である。社会の総生産額に対する政府の税収が一定値 $1-r$　$(1>r>0)$ であるとすると

$$1-r=\frac{\int_{n_0}^{n_N} T(ny)f(n)\,dn}{\int_{n_0}^{n_N} nyf(n)\,dn} \tag{6}$$

と表され，これより

$$\int_{n_0}^{n_N}\left(ny-rny-T(ny)\right)f(n)\,dn=0 \tag{7}$$

となる。

$$v(n)=\int_{n_0}^{n}\left(my-rmy-T(my)\right)f(m)\,dm \tag{8}$$

とおくと

$$\frac{dv}{dn}=-\left(T(ny)+rny-ny\right)f(n) \tag{9}$$

と表すことができて

$$v(n_0)=0,\quad v(n_N)=0 \tag{10}$$

である。(4)(5)(9) より Hamilton 関数は

$$H=G(u)f(n)-\lambda\frac{yu_2}{n}-\theta\left(T(ny)+rny-ny\right)f(n) \tag{11}$$

であるから，Pontryagin の最大値原理によって

$$\frac{du}{dn}=\frac{\partial H}{\partial \lambda}=-\frac{yu_2}{n} \tag{12}$$

$$\frac{dv}{dn}=\frac{\partial H}{\partial \theta}=-\left(T(ny)+rny-ny\right)f(n) \tag{13}$$

$$\frac{d\lambda}{dn}=-\frac{\partial H}{\partial u}=-\frac{\partial G}{\partial u}f(n) \tag{14}$$

$$\frac{d\theta}{dn}=-\frac{\partial H}{\partial v}=0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y}=-\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}f(n)-\frac{\lambda}{n}\frac{\partial}{\partial y}(yu_2)-\theta n\left(T'(ny)+r-1\right)f(n)=0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial H}{\partial T} = \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial T} f(n) - \theta f(n) = 0 \tag{17}$$

を解けばよい［11］[1)]。⒂ より

$$\theta = \mathrm{const} \tag{18}$$

となる。一般に，横断性条件（境界条件）は δu ，δv をそれぞれ u, v の微小変化として

$$\lambda \delta u \Big|_{n_0}^{n_N} = 0 \tag{19}$$

$$\theta \delta v \Big|_{n_0}^{n_N} = 0 \tag{20}$$

で与えられるが，⑽ より $v(n_0) = v(n_N) = 0$ であるから

$$\delta v(n_N) = \delta v(n_0) = 0 \tag{21}$$

となり，⒇ は満たされる。⒆ の条件は

$$\lambda_0 = \lambda(n_0) = 0 \quad \text{または} \quad \delta u(n_0) = 0 \tag{22}$$

および

$$\lambda_N = \lambda(n_N) = 0 \quad \text{または} \quad \delta u(n_N) = 0 \tag{23}$$

である。$u(x, y)$,　$G(u)$,　$f(n)$ としては次の関数形を仮定する［5］。

$$u(x, y) = \log x + \log(1 - y) \tag{24}$$ [2)]

$$G(u) = -\frac{1}{\beta} e^{-\beta u} \tag{25}$$

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma n} \exp\left[-\frac{(\log n - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{26}$$

⑷ と ㉔ より

$$\frac{du}{dn} = -\frac{y u_2}{n} = -\frac{y}{n}\left(-\frac{1}{1-y}\right) = \frac{y}{n(1-y)} \tag{27}$$

となる。また，㉕ より得られる

$$\frac{\partial G}{\partial u} = e^{-\beta u} \tag{28}$$

を⒁ に代入すると

$$\frac{d\lambda}{dn} = -e^{-\beta u} f \tag{29}$$

となる。一方，⑴ より

$$u = u(x, y) = \log x + \log(1-y) = \log\big(ny - T(ny)\big) + \log(1-y) \tag{30}$$

であるので

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{n - nT'(ny)}{ny - T(ny)} - \frac{1}{1-y} \tag{31}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(yu_2) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{1-y}\right) = \frac{-(1-y)-y}{(1-y)^2} = -\frac{1}{(1-y)^2} \tag{32}$$

を⒃ に代入すると

$$e^{-\beta u}\left(\frac{n - nT'}{ny - T} - \frac{1}{1-y}\right)f + \frac{\lambda}{n}\frac{1}{(1-y)^2} - \theta n(T' + r - 1)f = 0 \tag{33}$$

となる。㉚ から得られる

$$\frac{\partial u}{\partial T} = -\frac{1}{ny - T} \tag{34}$$

を用いると⒄ は

$$-e^{-\beta u}\frac{1}{ny - T}f - \theta f = 0 \tag{35}$$

となる。⑶ に

$$u_1 = \frac{1}{ny - T}, \quad u_2 = -\frac{1}{1-y} \tag{36}$$

を代入すると

$$1 - T' = \frac{ny - T}{n}\frac{1}{1-y} = \frac{ny - T}{n(1-y)} \tag{37}$$

となり，T' について解くと

$$T' = 1 - \frac{ny - T}{n(1-y)} = \frac{n - 2ny + T}{n(1-y)} \tag{38}$$

となるので，これを(33)に代入すると

$$\frac{\lambda}{n}\frac{1}{(1-y)^2}-\theta n\frac{rn(1-y)-(ny-T)}{n(1-y)}f=0 \tag{39}$$

となる。(39)の両辺に $n(1-y)^2$ を掛けると

$$\lambda-\theta n(1-y)\left(rn(1-y)-(ny-T)\right)f=0 \tag{40}$$

が得られる。従って，(27)(29)(35)(40)を(7)および横断性条件(22)(23)のもとで解けばよいことになる。(8)から求められる $v(n)$ は自動的に条件(10)を満足する。

3．方程式の解

解くべき方程式は次の通りである。

$$\frac{du}{dn}=\frac{y}{n(1-y)} \tag{41}$$

$$\frac{d\lambda}{dn}=-e^{-\beta u}f \tag{42}$$

$$e^{-\beta u}+\theta(ny-T)=0 \tag{43}$$

$$\lambda-\theta n(1-y)(rn(1-y)-(ny-T))f=0 \tag{44}$$

$$\int_{n_0}^{n_N}\left(ny-rny-T(ny)\right)f(n)\,dn=0 \tag{45}$$

また，(30)から

$$e^u=(ny-T)(1-y) \tag{46}$$

となる。なお，(35)において $f>0$ で除算を行って(43)と表している。(43)(46)から $ny-T$ を消去すると

$$y=1+\theta e^{(\beta+1)u} \tag{47}$$

となるので，これを(41)に代入すると

$$\frac{du}{dn}=-\frac{1+\theta e^{(\beta+1)u}}{\theta n e^{(\beta+1)u}} \tag{48}$$

となる。(47)から

$$\frac{dy}{dn}=\theta(\beta+1)e^{(\beta+1)u}\frac{du}{dn}=-(\beta+1)(y-1)\frac{y}{n(y-1)}=-(\beta+1)\frac{y}{n} \tag{49}$$

すなわち

$$\frac{dy}{y} = -(\beta+1)\frac{dn}{n} \tag{50}$$

であるから，両辺を積分すると

$$\log y = -(\beta+1)\log n + C \tag{51}$$

から

$$y = C^0 n^{-(\beta+1)} \tag{52}$$

となる（$C^0 = e^C$ は積分定数)。(52) より

$$1 - y = 1 - C^0 n^{-(\beta+1)} = n^{-(\beta+1)}(n^{\beta+1} - C^0) \tag{53}$$

$$z = ny = n \times C^0 n^{-(\beta+1)} = C^0 n^{-\beta} \tag{54}$$

である。$\beta \neq -1$ のときは (43)(46) から u を消去して x について解き，(53) を利用すると

$$x = (-\theta)^{-1/(\beta+1)}(1-y)^{-\beta/(\beta+1)} = (-\theta)^{-1/(\beta+1)} n^{\beta}(n^{\beta+1} - C^0)^{-\beta/(\beta+1)} \tag{55}$$

となり，(24) に代入すると

$$u = \frac{1}{\beta+1}\log\left(-\frac{1}{\theta}\left(1 - \frac{C^0}{n^{\beta+1}}\right)\right) \tag{56}$$

が得られ，所得税関数 T も

$$T = z - x = C^0 n^{-\beta} - (-\theta)^{-1/(\beta+1)} n^{\beta}(n^{\beta+1} - C^0)^{-\beta/(\beta+1)} \tag{57}$$

として求められる[3)]。　(52)～(57) には２つのパラメータ C^0 と θ が含まれているが，(45) の条件より

$$(1-r)\int_{n_0}^{n_N} zf(n)\,dn = \int_{n_0}^{n_N} Tf(n)\,dn \tag{58}$$

に (54)(57) を代入して θ について解くと

$$\theta = -\left[\int_{n_0}^{n_N} b(n)f(n)\,dn \Big/ \int_{n_0}^{n_N} a(n)f(n)\,dn\right]^{-(\beta+1)} \tag{59}$$

となる。ここで

$$a(n) = n^{\beta}(n^{\beta+1} - C^0)^{-\beta/(\beta+1)} \tag{60}$$

$$b(n) = rC^0 n^{-\beta} \tag{61}$$

である。従って，結局方程式 (52)～(57) および (59) はただ１つのパラメータ C^0 をもち，C^0 の値が定まればすべての変数の値を定めることができる。ただし，

$$0 \leq y < 1 \tag{62}$$

の条件と(52)から

$$0 \leq C^0 < n_0^{\beta+1} \tag{63}$$

を満たす必要がある（n_0 は n の最小値)。

λ に関しては(42)と(44)があるが，$f(n)$ を(26)で与えると(42)と(44)を満足することはできない。$\beta=0$ のときにこのことを示す（$\beta \neq 0$ のときはもっと複雑になる)。(43)で $\beta=0$ とすると

$$ny - T = -\frac{1}{\theta} > 0 \tag{64}$$

であるから，$\theta < 0$ となる。(64)は可処分所得の均等化を意味する。(1)より(53)の左辺は x であり，(64)によって一定であるから

$$ny - T = x^0 \tag{65}$$

とおくことができる。$\beta=0$ のとき(52)から

$$ny = C^0 \tag{66}$$

で一定であるから，(65)から

$$T = C^0 - x^0 \tag{67}$$

も一定となる[4)]。　(65)(66)を利用すると(44)から

$$\lambda = \theta(n - C^0)(r(n - C^0) - x^0)f \tag{68}$$

となり，

$$g(n) = \theta(n - C^0)(r(n - C^0) - x^0) \tag{69}$$

とおくと，(68)は

$$\lambda = g(n)f(n) \tag{70}$$

と表されるので，(70)を n で微分して(42)で $\beta=0$ と置いた式と等しいとすると

$$\frac{d\lambda}{dn} = g'f + gf' = -f \tag{71}$$

が成り立つ必要がある。(71)から得られる

$$f' = \frac{df}{dn} = -\frac{g'+1}{g}f \tag{72}$$

すなわち

$$\frac{df}{f} = -\frac{g'+1}{g}dn \tag{73}$$

の両辺を積分して

$$\log f = -\int \frac{g'+1}{g}\,dn \tag{74}$$

が得られるので，f は ⑺4 を満たす必要がある。しかし，⑺4 から得られる $f(n)$ は ⑵6 と一致せず，確率密度関数として望ましい性質を持っているかどうか不明である。すなわち，$f(n)$ を ⑵6 で与えれば ⑷4（$\partial H/\partial y = 0$）は満たされず，⑷4 を満足するためには $f(n)$ が ⑺4 を満たすように定めなければならない。ここでは，$f(n)$ を ⑵6 で与える解を計算した。したがって，最大値原理の完全な解ではない。未決定のパラメータ C^0 の値は社会的厚生関数

$$W = \int_{n_0}^{n_N} G(u) f(n)\,dn \tag{75}$$

を最大にするように定めることにする。

4．計算結果と考察

本稿で取り上げたモデルは Pontryagin の最大値原理の問題として考察しているので，必ずしも先行研究と対応しているわけではない。⑸2 よりパラメータ C^0 は所与の β のもとで所得稼得能力 n に対応した労働供給を決定する役割を持っている。通常考える $\beta \geq 0$ の範囲では，⑸2 よりnが大きいほど労働供給に負の誘因を与え，yは減少する。したがって余暇（$1-y$）は増加するので，これが効用水準uを高める原因となる。

数値実験におけるパラメータの値は Mirrlees［5］を参考にして定めた。個人の稼得能力nの密度関数 $f(n)$ の式 ⑵6 において，$\mu = -1$，　$\sigma = 0.39$，　$n_0 = 0.04$，　$n_N = 1.0$ とし，政府の税収に関するパラメータは $r = 0.93$ とした。$\beta = 0$，0.5，1.0 のときの結果を以下に示す。

①　$\beta = 0$ のとき

⑹5 ～⑹7 に示したように $z = ny$，　$x = ny - T$ および T は n の値にかかわらず一定となる（定額所得，定額課税）[5)]。個人の労働供給量 y は⑹6 より

$$y = C^0 / n \tag{76}$$

に従って減少する。⑸6 より u は増加する。$n = 0.1$ から $n = 1.0$ までの n（0.1 刻み）に対する各変数 y，$1-y$，x，u，z，T の値，および平均税率（T/z）と限界税率（$\Delta T/\Delta z$）の値を表１，表２に示す。平均税率は一定で限界税率は０となる。

表１

$\beta = 0$ $C^0 = 0.0396$				
n	y	$1-y$	x	u
1.0E-01	3.960E-01	6.040E-01	3.683E-02	-3.806E+00
2.0E-01	1.980E-01	8.020E-01	3.683E-02	-3.522E+00
3.0E-01	1.320E-01	8.680E-01	3.683E-02	-3.443E+00
4.0E-01	9.900E-02	9.010E-01	3.683E-02	-3.406E+00
5.0E-01	7.920E-02	9.208E-01	3.683E-02	-3.384E+00
6.0E-01	6.600E-02	9.340E-01	3.683E-02	-3.370E+00
7.0E-01	5.657E-02	9.434E-01	3.683E-02	-3.360E+00
8.0E-01	4.950E-02	9.505E-01	3.683E-02	-3.352E+00
9.0E-01	4.400E-02	9.560E-01	3.683E-02	-3.346E+00
1.0E+00	3.960E-02	9.604E-01	3.683E-02	-3.342E+00

表２

$\beta = 0$ $C^0 = 0.0396$				
n	z	T	平均税率	限界税率
1.0E-01	3.960E-02	2.772E-03	7.000E-02	
2.0E-01	3.960E-02	2.772E-03	7.000E-02	0.000E+00
3.0E-01	3.960E-02	2.772E-03	7.000E-02	0.000E+00
4.0E-01	3.960E-02	2.772E-03	7.000E-02	0.000E+00
5.0E-01	3.960E-02	2.772E-03	7.000E-02	0.000E+00
6.0E-01	3.960E-02	2.772E-03	7.000E-02	0.000E+00
7.0E-01	3.960E-02	2.772E-03	7.000E-02	0.000E+00
8.0E-01	3.960E-02	2.772E-03	7.000E-02	0.000E+00
9.0E-01	3.960E-02	2.772E-03	7.000E-02	0.000E+00
1.0E+00	3.960E-02	2.772E-03	7.000E-02	0.000E+00

②　$\beta > 0$ のとき

y と z は⒇ および⒢ によって，n の増加ともに減少する。β の値が大きいほど速く減少する。また，T および x は減少し u は増加する。⒇ の条件で⒇ を極大にする C^0 は存在せず，C^0 が大きいほど⒇ の W は大きくなる。平均税率は減少し，限界税率は増加する。$\beta = 0.5$ のときの結果を表３，表４に，$\beta = 1$ のときの結果を表５，表６に示す。

表３

$\beta = 0.5$ $C^0 = 0.00792$				
n	y	$1-y$	x	u
1.0E-01	2.505E-01	7.495E-01	1.346E-02	-4.596E+00
2.0E-01	8.855E-02	9.115E-01	1.261E-02	-4.466E+00
3.0E-01	4.820E-02	9.518E-01	1.243E-02	-4.437E+00
4.0E-01	3.131E-02	9.687E-01	1.236E-02	-4.425E+00
5.0E-01	2.240E-02	9.776E-01	1.232E-02	-4.419E+00
6.0E-01	1.704E-02	9.830E-01	1.230E-02	-4.416E+00
7.0E-01	1.352E-02	9.865E-01	1.228E-02	-4.413E+00
8.0E-01	1.107E-02	9.889E-01	1.227E-02	-4.412E+00
9.0E-01	9.276E-03	9.907E-01	1.226E-02	-4.410E+00
1.0E+00	7.920E-03	9.921E-01	1.226E-02	-4.410E+00

表4

$\beta = 0.5$ $C^0 = 0.00792$				
n	z	T	平均税率	限界税率
1.0E-01	2.505E-02	1.159E-02	4.626E-01	
2.0E-01	1.771E-02	5.100E-03	2.880E-01	8.842E-01
3.0E-01	1.446E-02	2.031E-03	1.405E-01	9.444E-01
4.0E-01	1.252E-02	1.668E-04	1.332E-02	9.625E-01
5.0E-01	1.120E-02	-1.118E-03	-9.978E-02	9.715E-01
6.0E-01	1.022E-02	-2.071E-03	-2.026E-01	9.770E-01
7.0E-01	9.466E-03	-2.815E-03	-2.974E-01	9.807E-01
8.0E-01	8.855E-03	-3.416E-03	-3.858E-01	9.834E-01
9.0E-01	8.348E-03	-3.915E-03	-4.690E-01	9.854E-01
1.0E+00	7.920E-03	-4.338E-03	-5.477E-01	9.870E-01

表5

$\beta = 1.0$ $C^0 = 0.00158$				
n	y	$1-y$	x	u
1.0E-01	1.584E-01	8.416E-01	4.668E-03	-5.539E+00
2.0E-01	3.960E-02	9.604E-01	4.370E-03	-5.473E+00
3.0E-01	1.760E-02	9.824E-01	4.321E-03	-5.462E+00
4.0E-01	9.900E-03	9.901E-01	4.304E-03	-5.458E+00
5.0E-01	6.336E-03	9.937E-01	4.296E-03	-5.456E+00
6.0E-01	4.400E-03	9.956E-01	4.292E-03	-5.455E+00
7.0E-01	3.233E-03	9.968E-01	4.290E-03	-5.455E+00
8.0E-01	2.475E-03	9.975E-01	4.288E-03	-5.454E+00
9.0E-01	1.956E-03	9.980E-01	4.287E-03	-5.454E+00
1.0E+00	1.584E-03	9.984E-01	4.286E-03	-5.454E+00

表6

$\beta = 1.0$ $C^0 = 0.00158$				
n	z	T	平均税率	限界税率
1.0E-01	1.584E-02	1.117E-02	7.053E-01	
2.0E-01	7.920E-03	3.550E-03	4.482E-01	9.623E-01
3.0E-01	5.280E-03	9.592E-04	1.817E-01	9.814E-01
4.0E-01	3.960E-03	-3.440E-04	-8.686E-02	9.872E-01
5.0E-01	3.168E-03	-1.128E-03	-3.561E-01	9.902E-01
6.0E-01	2.640E-03	-1.652E-03	-6.258E-01	9.921E-01
7.0E-01	2.263E-03	-2.027E-03	-8.956E-01	9.933E-01
8.0E-01	1.980E-03	-2.308E-03	-1.166E+00	9.942E-01
9.0E-01	1.760E-03	-2.527E-03	-1.436E+00	9.949E-01
1.0E+00	1.584E-03	-2.702E-03	-1.706E+00	9.955E-01

$\beta > 0$ のときは，n の小さい人に課税し，n の大きい人に補助金を与えるという結果になった。この結果は $\beta \longrightarrow \infty$ の場合，効用ベースで見たロールズ原理に矛盾するように見える。これは社会厚生 W を最大にする C^0 が選ばれ，β が大きくなるにつれて C^0 が小さくなるためである。

β が大きくなるに従って絶対値で見た効用水準のレインジ（範囲）は縮小している。$\beta = 0$ で 0.464，$\beta = 0.5$ で 0.186，$\beta = 1$ のとき 0.085 である。この意味で β が大きくなるにつれてロールズ原理を満たしているとも解釈できる。

経済的な意味は別にして，参考のために $\beta < 0$ の場合の計算も行ってみた。y は(52)によって，n の

増加ともに減少するが，$\beta > 0$ のときより減少は緩やかである。n の増加とともに z，T，x，u はそれぞれ増加する。β が約－0.7 以上のときは②のときと同様(63) の条件で (75) を極大にする C^0 は存在しないが，β がそれより小さいときは(63) の条件を満たし (75) を極大にする C^0 が存在することがわかった。

本稿ではモデルの定式化とその方程式の解の解析に重点を置いた。残された問題点はつぎのとおりである。

① 本モデルについて，さらにパラメータの値をいろいろ変えて数値実験を行う。効用関数 $u = \alpha \log(1-y) + \log x$ で $\alpha > 1$ とすれば異なった結果が得られる可能性もある。

② 最大値原理の最適解（full optimum）を与える個人の効用関数および個人の稼得能力の密度関数はどんな形をしているか検討する。

③ 所得税以外の最適課税問題への応用を考える。

④ 最大値原理のかわりに Bellman の動的計画法（Dynamic Programming）を利用して解く。

参考文献

［1］ 入谷純著（1986）『課税の最適理論』，東洋経済新報社。

［2］ 山田雅俊著（1991）『現代の租税理論——最適課税理論の展開——』，創文社。

［3］ 小西砂千夫著（1997）『日本の税制改革——最適課税論によるアプローチ——』，有斐閣。

［4］ 大阪大学財政研究会編（1985）『現代財政』第６章「最適課税論」，創文社。

［5］ Mirrlees, J. A.（1971）An exploration in the theory of optimum income taxation, Review of Economic Studies, 31, pp.175-208.

［6］ Stern, N. H. (1976)On the specification of models optimum income taxation, Journal of Public Economics, vol. 6, pp.123-162.

［7］ Tuomala, M. (1984) On the optimal income taxation, Journal of Public Economics, vol. 23, pp.351-366.

［8］ Tuomala, M. (1990) Optimal Income Tax and Redistribution, Clarendon Press, Oxford.

［9］ Tarkiainen, R. and Tuomala, M. (1999) Optimal nonlinear income taxation with a two-dimensional population, Computational Economics, vol. 13, pp.1-16.

［10］ 田近栄治, 古谷泉生稿（2000）「日本の所得税——現状と理論——」『フィナンシャル・レビュー』，４月号，pp.129-161.

［11］ ピェール N. V. チュー著，永田 良他訳（1997）『経済分析とダイナミカルシステム』，文化書房博文社。

注

1）$u, v, \lambda, \theta, y, T$ はすべて n の関数である。

2）［5］では $u(x, y) = \alpha \log x + \log(1-y)$ としているが，ここでは $\alpha = 1$ とした。なお，log は自然対数を表す。

3）$\beta = -1$ のときは (43)(46) から $y = C^0$ で一定となるが，x を一意的に定めることはできない。ただしロピタルの定理を利用して計算することはできる。

４）このとき㊲で $T=$ 一定から $T'=0$ とすると，形式的に $n-ny=ny-T$ から $n=ny+ny-T=C^0+x^0=$ 一定となるが，$x=x^0$ のときは⑶で $u_1=0$ となって，⑶から導出された㊲は成り立たない。しかし，⑷従って㊶は成り立つ。

５）式の導出は異なるが Mirrlees も同様の結果を述べている［５, p.201］。

On the Optimal Income Taxation

Kozo ICHIDA

Isamu ASAI

Abstract

Since the pioneering work of Mirrlees there have been published a number of papers concerning optimal income taxation for both linear and nonlinear models. This paper treated the nonlinear model along with Mirrlees in some details using the maximum principle of Pontryagin and gave numerical simulations.

Keywords : optimal income tax, nonlinear model, utility function, social welfare function, maximum principle, simulation