固定効果のあるロジットモデルにおける重み付 LS 推定値の漸近特性

片　岡　佑　作

要　　旨

ある確率 p_{it} は $0 < p_{it} < 1$ によって制限を受けるが、それが説明変数 x''_{it} に依存するとしよう。多くの場合、そのもっとも簡単な表現方法は

（1）　$p_{it} = \exp(x''_{it}\theta)/[1 + \exp(x''_{it}\theta)]$

（2）　$1 - p_{it} = 1/[1 + \exp(x''_{it}\theta)]$

と書くことである。ここで x''_{it} は既知の変数の行ベクタ、θ は未知パラメタの列ベクタである。この（1）、（2）は

（3）　$f_{it} = \log(p_{it}/(1 - p_{it})) = x''_{it}\theta$

あるいは TN 個 $(i = 1, \cdots, N : t = 1, \cdots, T)$ を集めて

（4）　$f = x''\theta$

と書くことができる。

ここで $f_{it} = \log(p_{it}/(1 - p_{it}))$ を確率 p_{it} のロジスティック変換、（4）を線形ロジスティックモデルとよぶ。

もし

（5）　$U_{it} = \log(\hat{p}_{it}/(1 - \hat{p}_{it}))$

とすれば、以下のように表現できるであろう。つまり、

（6）
$$U_{it} = x''_{it}\theta + \epsilon_{it}$$
$$= \alpha + \mu_i + \delta_t + x_{it}\beta + \epsilon_{it}$$
$$\sum c_i \mu_i = 0$$
$$\sum c'_t \delta_t = 0$$
$$\epsilon_{it} = \log(\hat{p}_{it}/(1 - \hat{p}_{it})) - \log(p_{it}/(1 - p_{it}))$$
$$\cong (p_{it}/(1 - p_{it}))^{-1}(\hat{p}_{it} - p_{it})$$

ここで ϵ_{it} はたがいに独立、近似的に $N(0, \sigma^2_{it}/n_{it})$ にしたがう。これは本質的に正規回帰モデルである

が、ϵ_{it} の分散は不均一、かつ未知のパラメタに依存する。もしσ_{it}^{2} が既知であれば、（6）を

（7）　　$U_{it}/\omega_{it}=(\alpha+\mu_i+\delta_t+x_{it}\beta)/\omega_{it}+\epsilon''_{it}$

と書くことができる。ただし$\omega_{it}=\sigma_{it}\Big/\sqrt{n_{it}}$、そうして$\epsilon''_{it}$ は独立かつ $N(0,1)$ にしたがう。

この論文の目的は2通りある。第1に、ω_{it} をその最尤推定値$\hat{\omega}_{it}=\hat{\sigma}_{it}\Big/\sqrt{n_{it}}=(\hat{p}_{it}/(1-\hat{p}_{it}))^{-1/2}\Big/\sqrt{n_{it}}$ におきかえ、（7）に最小2乗法を適用することである。

第2に T、N、n_{it} が大きい場合、その結果としてみちびかれるLS推定値の漸近的分散－共分散をあたえることである。

キーワード：ロジットアプローチ、固定効果、パネルデータモデル、最小2乗、漸近的分散－共分散

内容目次：

1　序

ロジットと固定効果のあるパネルが重なる回帰モデルを

（1.1）　　$U_{it}=\alpha+\mu_i+\delta_t+\beta' X_{it}+\epsilon_{it}$

$$i=1,\cdots,N;t=1,\cdots,T$$

と書こう。ここで$U_{it},X_{it},\epsilon_{it}$ はそれぞれ対数オッズ。説明変数、誤差項、そうして$\alpha,\mu_i,\delta_t,\beta$がデータから推定したい未知パラメタ。$\epsilon_{it}$ は近似的に

（1.2）　　$\epsilon_{it}\sim N(0,\omega_{it}),\epsilon_{it}:i,t$ について独立、$\omega_{it}\neq\omega_{js}$

である。U_{it} を構成するには第 i 地点、第 t 期において n_{it} 個の観測が必要である（佐和［6］を見る）。またパラメタμ_i,δ_tには適当な制約をおかないとモデルを識別できない。例えば

（1.3）　　$\sum_t^T c_t\delta_t=0,\ \sum_i^N c'_i\mu_i=0$

とするのがのちの計算には都合がよい。

以上のモデルを想定して［4］であたえた点は（1.1）のLS（最小2乗）推定、WLS（重み付最小2乗）推定の方法、および、みちびかれる2通りの推定値がともに一致性をもつということであった。そこでの仮定はNT、n_{it}（$=nc_{it}$、c_{it}：くいちがいを補正する項）がともに大きいというものである。

ところで以下この論文でLS推定値、WLS推定値の漸近的な意味での分散－共分散をみちびく。これらの推定値はともに漸近的正規だから母数検定にはこの分散－共分散に再度分散－共分散の推定値を代入して検定量を作ればよい。結果は

1）計算された分散－共分散はLSの場合でさえも［3］にあたえるものよりもいく分複雑な形をとる。その理由は ϵ_{it} の分散がすべて i、t に依存して $\omega_{it} \neq \omega_{js}$ となっているからである。
2）WLS推定値の分散については紙面の関係もあって β の次数を 1×1 にとどめ、α、β のWLS推定値のみに対象をしぼった。分散－共分散の最終的な形は簡単であるが､計算過程はやっかいである。［4］ではプロセスをすべて直接計算に頼ったが、この論文では ϵ_{it}（誤差項）、$\epsilon^{r}_{.t}\,\epsilon^{r}_{i.}$（誤差項についての部分的加重平均）をすべて ϵ（ϵ_{it} の $NT \times 1$ ベクタ）で書くことによって、全体の計算量をかなり少なくおさえた（これが本論文の利点でもある）。

［4］にも述べたが固定効果のあるパネルデータモデルについては畠中［2］、Stock-Watson［1］に簡単な説明がある。また、北村のサーベイ［5］にはパネルデータとロジットの重なるケースが出てくるが、簡単な推定値についてさえもそこでの議論は十分ではない。この論文はそうした空白の部分をうめる点に意味がある。

2　展　　開

以下の回帰式を考えよう。

(2.1)
$$U_{it} = \alpha + \mu_i + \delta_t + \beta' X_{it} + \epsilon_{it}$$
$$U_{it} = \log \frac{\hat{p}_{it}}{1 - \hat{p}_{it}}$$
$$\epsilon_{it} = \frac{\hat{p}_{it} - p_{it}}{p_{it}\, q_{it}}\ ,\ q_{it} = 1 - p_{it}\, ,\ \hat{q}_{it} = 1 - \hat{p}_{it}$$

(2.2)
$$E(\epsilon_{it}) = 0$$
$$\mathrm{Var}(\epsilon_{it}) = \frac{1}{n_{it}\, p_{it}\, q_{it}} = \omega_{it}$$
$$\epsilon_{it} \simeq \text{normal}\ (\simeq は近似をあらわす)$$

ここで $\alpha, \mu_i, \delta_t, \beta$ が推定したいパラメタ、また

(2.3)
$$\sum_i \mu_i = 0$$
$$\sum_t^T \delta_t = 0$$

の制約がある。

［3］から（2.1）を以下のように変形することができる。

$$(2.4)\quad U_{it} - U_{.t} - U_{i.} + U_{..} = \sum_{it} (X'_{it} - X'_{.t} - X'_{i.} + X'_{..})\beta + \epsilon''_{it}$$

$$\epsilon''_{it} = \epsilon_{it} - \epsilon_{.t} - \epsilon_{i.} + \epsilon_{..}$$

ただし

$$\epsilon_{i.} = \frac{1}{T}\sum_t \epsilon_{it},\ \epsilon_{.t} = \frac{1}{N}\sum_i \epsilon_{it}$$

などである。

［3，p.20］と同一の表現を用いて（2.4）を

$$(2.5)\quad z_{it} = \sum_{i,t} x'_{it}\beta + \epsilon''_{it}$$

と書く。さらに t、i をプールした表現は

$$(2.6)\quad z' = x\beta + \epsilon''$$

$$z' = (z_{11}, \cdots, z_{1T}, \cdots, z_{N1}, \cdots, z_{NT})$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix},\ \dim(x_i) = T \times m$$

$$x_i = \begin{pmatrix} x'_{i1} \\ \vdots \\ x'_{iT} \end{pmatrix},\ \dim(x'_{it}) = 1 \times m$$

である。このとき、β の OLS 推定値は

$$(2.7)\quad \hat{\beta} = (x'x)^{-1} x'z = \beta + (x'x)^{-1} x'\epsilon''$$

となる。$\hat{\beta}$ のモーメントは

$$(2.8)\quad E(\hat{\beta}) = 0$$

$$\mathrm{Cov}(\hat{\beta}) = (x'x)^{-1} x'E(\epsilon''\epsilon''')x(x'x)^{-1}$$

ここで $E(\epsilon''\epsilon''')$ を考える。［3］にあるように

$$(2.9)\quad \begin{pmatrix} \epsilon''_1 \\ \vdots \\ \epsilon''_N \end{pmatrix} = \left\{ \left(I_N - \frac{1}{N} l_N l'_N\right) \otimes \left(I_T - \frac{1}{T} l_T l'_T\right) \right\} \epsilon = J\epsilon$$

$$\dim(\epsilon) = TN \times 1,\ \dim(\epsilon_i) = T \times 1$$

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_N \end{pmatrix}$$

ϵ_{it} は近似的に

（2.10）　$$\epsilon_{it} \sim N\left(0, \frac{1}{n_{it}\, p_{it}\, q_{it}}\right)$$

であり、$\epsilon_i (T \times 1)$ は以下のようになる。

$$\epsilon_i (T \times 1) \sim N(0, \Omega_i)$$

$$\dim(\Omega_i) = T \times T$$

$$\Omega_i = \begin{pmatrix} \omega_{i1} & \ddots & O \\ O & & \omega_{iT} \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{diag}(\omega_{i1}, \cdots, \omega_{iT})$$

$$= \frac{1}{n} \mathrm{diag}\left(\cdots, (c_{it}\, p_{it}\, q_{it})^{-1}, \cdots\right)$$

ここで $nc_{it} = n_{it}$ と書く。そうすると

（2.11）　$$E(\epsilon''\epsilon''') = JE(\epsilon\epsilon')J'$$

$$= JE(\epsilon\epsilon')J,\quad J = J'$$

$$E(\epsilon\epsilon') = E\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_N \end{pmatrix}(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_N)$$

$$= \begin{pmatrix} \Omega_1 & \ddots & O \\ O & & \Omega_N \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{diag}(\Omega_1, \cdots, \Omega_N)$$

$$= \Omega_*$$

$$\dim(\Omega_i) = T \times T$$

したがって β の LS 推定値 $\hat{\beta}$ の covariance 行列は

（2.12）　$$\mathrm{Cov}\left(\hat{\beta}\right) = (x'x)^{-1} x'J\Omega_* J'x(x'x)^{-1}$$

$$= O(n^{-1} N^{-1} T^{-1})$$

となる。Ω_* が等分散であれば

$$\mathrm{Cov}\left(\hat{\beta}\right) = \omega\left(x'x\right)^{-1}x'Jx\left(x'x\right)^{-1}$$

$$\omega = \omega_{it}, i = 1, \cdots, N; t = 1, \cdots, T$$

となる。これは［3，（2.11)］の表現に等しい。

つぎにα, μ_i, δ_tの LS 推定の形式は［3］と同様である。ちがいはϵ_{it}が不等分散をもつだけである。

（2.13）　$$\hat{\alpha} = \frac{1}{NT}\sum_{i,t}\left(U_{it} - X'_{it}\hat{\beta}\right) = \frac{1}{NT}\sum_{i,t}U^*_{it} = U^*_{..}$$

さらに

$$U^*_{i.} \doteqdot \alpha + \mu_i$$

から

（2.14）　$$\begin{aligned}\hat{\mu}_i &= U^*_{i.} - \hat{\alpha}\\ &= U^*_{i.} - U^*_{..}\\ &= U_{i.} - X'_{i.}\hat{\beta} - (U_{..} - X_{..}\hat{\beta})\\ &= U_{i.} - U_{..} - \left(X'_{i.} - X'_{..}\right)\hat{\beta}\end{aligned}$$

δ_tの LS 推定については

$$U^*_{it} \doteqdot \alpha + \delta_t$$

から

（2.15）　$$\begin{aligned}\hat{\delta} &= U^*_{.t} - \hat{\alpha}\\ &= U^*_{.t} - U^*_{..}\\ &= U_{it} - U_{..} - \left(X'_{it} - X'_{..}\right)\hat{\beta}\end{aligned}$$

期待値の計算も［3，（2.14)］と同様である。

（2.16）　$$\begin{aligned}&E\left(\hat{\alpha}\right) = \alpha\\ &E\left(\hat{\delta}_t\right) = \delta_t\\ &E\left(\hat{\mu}_i\right) = \mu_i\end{aligned}$$

2 次モーメントについては結果はいく分異なるが計算プロセスはほぼ［ 3 ］と同じである。

（ 2 .17）　$E(\hat{\alpha}-\alpha)^2=\left(\frac{1}{NT}\right)^2 E\left\{\sum_{i,t}\left(X_{it}'\left(\beta-\hat{\beta}\right)+\epsilon_{it}\right)\right\}^2$

ここで $-X_{it}(x'x)^{-1}x'=-\tilde{X}_{it}'$ と書いて、また　$\epsilon_{it}''=\epsilon_{it}-\epsilon_{.t}-\epsilon_{i.}+\epsilon_{..}$ から

$$(NT)^2 E(\hat{\alpha}-\alpha)^2=E\left(\sum_{i,t}\left(-\tilde{X}_{it}'\epsilon''+\epsilon_{it}\right)\right)^2$$

$$=E\left\{\sum_{i,t,j,s}\left(\tilde{X}_{it}'\epsilon''\epsilon'''\tilde{X}_{js}+\epsilon_{it}\epsilon_{js}-\tilde{X}_{it}'\epsilon''\epsilon_{js}-\cdots\right)\right\}$$

ここで先の結果（ 2 .11）から

（ 2 .18）　$E(\epsilon''\epsilon''')=J\Omega_* J'$

要素ワイズで書くと

$$\epsilon_{it}=\left(e_i^{N'}\otimes e_t^{T'}\right)\epsilon$$

$$\epsilon_{js}=\left(e_j^{N'}\otimes e_s^{T'}\right)\epsilon$$

$$E\left(\epsilon_{it}\epsilon_{js}\right)=\left(e_i^{N'}\otimes e_t^{T'}\right)\Omega_*\left(e_j^N\otimes e_s^T\right)$$

また $E\left(\epsilon_{it}''\epsilon_{js}\right)$ の部分は

$$E\left(\epsilon''\epsilon_{js}\right)=JE\left(\epsilon\epsilon_{js}\right)$$

$$=JE\left(\epsilon\epsilon'\left(e_j^N\otimes e_s^T\right)\right)$$

$$=J\Omega_*\left(e_j^N\otimes e_s^T\right)$$

　したがって

（ 2 .19）　$\sum_{i,t,j,s}-\tilde{X}_{it}'E\left(\epsilon''\epsilon_{js}\right)=-\sum_{i,t}\tilde{X}_{it}\sum_{j,s}J\Omega_*\left(e_j^N\otimes e_s^T\right)$

ここで　$\sum_{j,s}\left(e_j^N\otimes e_s^T\right)=\sum_j\left(e_j^N\otimes l_T\right)=l_N\otimes l_T$

だから（ 2 .19）はまず

$$-\sum_{i,t}\tilde{X}_{it}'J\Omega_*\left(l_N\otimes l_T\right)$$

そうして

$$\tilde{X}_{it}'=X_{it}'(x'x)^{-1}x'$$

$$\dim\left(X'_{it}\right) = 1 \times m$$

$$\dim\left(x\right) = TN \times m$$

に気づいて $\sum_{i,t} X'_{it}$ を計算すると、［3］から

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'_{11} \\ \vdots \\ X'_{NT} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i,t} X'_{it} = l'_{NT} X$$

$$= \left(l'_N \otimes l'_T\right) X$$

$$\sum_{i,t} \tilde{X}'_{it} = \sum_{i,t} l'_{NT} X \left(x'x\right)^{-1} x'$$

$$= l'_{NT} X \left(X'JX\right)^{-1} x'J'$$

ゆえに

$$-\sum_{i,t,j,s} \tilde{X}'_{it} E\left(\epsilon'' \epsilon_{js}\right) \tag{2.20}$$

$$= -\sum_{i,t} \tilde{X}'_{it} J\Omega_* \left(l_N \otimes l_T\right)$$

$$= -\sum_{i,t} X'_{it} \left(x'x\right)^{-1} x'J\Omega_* l_{NT}$$

$$= -l'_{NT} X \left(x'x\right)^{-1} x'J\Omega_* l_{NT}$$

$$= -l'_{NT} X \left(x'Jx\right)^{-1} x'J\Omega_* l_{NT}$$

$$\neq 0$$

(2.17) を展開した第1項の部分は

$$E\left(\sum_{i,t,j,s} \tilde{X}'_{it} \epsilon'' \epsilon''' \tilde{X}_{js}\right) \tag{2.21}$$

$$= \sum_{i,t,j,s} \tilde{X}'_{it} J\Omega_* J' \tilde{X}_{js}$$

$$= l'_{NT} X \left(X'JX\right)^{-1} X'J\Omega_* J'X \left(X'JX\right)^{-1} X' l_{NT}$$

となる。したがって $\hat{\alpha}$ の分散は以上を整理して

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\alpha}\right) = \left(\frac{1}{NT}\right)^2 \left\{ l'_{NT} X \left(X'J\,X\right)^{-1} X'J\Omega_* J'X \left(X'JX\right)^{-1} X' l_{NT} \right\} \tag{2.22}$$

$$
\begin{aligned}
&- l'_{NT} X (X'JX)^{-1} X'J\Omega_* l_{NT} \\
&- l'_{NT} \Omega_* JX (X'JX)^{-1} X' l_{NT} \\
&+ l'_{NT} \Omega_* l_{NT}
\end{aligned}
$$

となる。ここで $\Omega_* = \omega I_{NT}$ であれば（2.22）の第2、3項はおちて［3］の結果に一致する。
$\hat{\delta}_t (1 \times 1)$ の2次モーメントは以下のようになる。［3］から

（2.23）
$$
\begin{aligned}
E\left(\hat{\delta}_t - \delta_t\right)^2 = E\left(U_{.t} - U_{..} - \delta_t\right)^2 \\
+ Z'_{.t} E\left(\hat{\beta}\hat{\beta}'\right) Z_{.t} \\
+ 2E\left(U_{.t} - U_{..} - \delta_t\right) Z'_{.t} \hat{\beta} \\
Z'_{.t} = X'_{..} - X'_{.t}
\end{aligned}
$$

（2.23）の右辺の計算も［3］と同様である。

（2.24）
$$
E\left(U_{.t} - U_{..} - \delta_t\right)^2 = \left\{\left(X'_{.t} - X'_{..}\right)\beta\right\}^2 + E\left(\epsilon_{.t} - \epsilon_{..}\right)^2
$$

この第3項は

$$
\begin{aligned}
E\left(\epsilon_{.t} - \epsilon_{..}\right)^2 &= \frac{1}{N^2} E\left\{\left\{l'_N \otimes \left(e_i^{T'} - \frac{1}{T} l'_T\right)\right\}\epsilon\epsilon'\left\{l_N \otimes \left(e_t^T - \frac{1}{T} l_T\right)\right\}\right\} \\
&= \frac{1}{N^2}\left\{l'_N \otimes \left(e_t^{T'} - \frac{1}{T} l'_T\right)\right\}\Omega_*\left\{l_N \otimes \left(e_t^T - \frac{1}{T} l_T\right)\right\}
\end{aligned}
$$

ここで Ω_* は対角である。つまり

$$
\begin{aligned}
E(\epsilon\epsilon') &= \Omega_* \\
&= \mathrm{diag}\left(\Omega_1, \cdots, \Omega_N\right)
\end{aligned}
$$

（2.23）の R.H.S. の第2項は

$$
E\left(\hat{\beta}\hat{\beta}'\right) = \mathrm{Cov}\left(\hat{\beta}\right) + \beta\beta'
$$

（2.23）の R.H.S. の第3項については

（2.25）
$$
\begin{aligned}
&E\left(U_{.t} - U_{..} - \delta_t\right) Z'_{.t} \hat{\beta} \\
&= -\left(Z'_{.t}\beta\right)^2 + E\left(\epsilon_{.t} - \epsilon_{..}\right) Z'_{it} \hat{\beta}
\end{aligned}
$$

ここで

$$Z'_{.t} = X'_{..} - X'_{.t}$$

$$Z'_{.t}\hat{\beta} = Z'_{.t}(x'x)^{-1}x'(x\beta + \epsilon'')$$

$$= Z'_{.t}\left(\beta + (x'x)^{-1}x'\epsilon''\right)$$

$$\epsilon_{.t} - \epsilon_{..} = \frac{1}{N}\left(l'_N \otimes \left(e_t^{T'} - \frac{1}{T}l'_T\right)\right)\epsilon$$

したがって（2.25）の R.H.S. の第 2 項は

$$E\left\{\frac{1}{N}Z'_{.t}\left(\beta + (x'x)^{-1}x'\epsilon''\right)\epsilon'\left(l_N \otimes \left(e_t^T - \frac{1}{T}l_T\right)\right)\right\} \tag{2.26}$$

となる。

けっきょく

$$E(\epsilon''\epsilon') = JE(\epsilon\epsilon')$$

$$= J\Omega_*$$

だから（2.26）は

$$\frac{1}{N}Z'_{it}(x'x)^{-1}x'J\Omega_*\left(l_N \otimes \left(e_t^T - \frac{1}{T}l_T\right)\right)$$

そうすると $\hat{\delta}_t$ の分散は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\left(\hat{\delta}_t\right) = &\frac{1}{N^2}\left\{l'_N \otimes \left(e_t^{T'} - \frac{1}{T}l'_T\right)\right\}\Omega_*\left\{l_N \otimes \left(e_t^T - \frac{1}{T}l_T\right)\right\} \\ &+ Z'_{.t}\left\{\mathrm{Cov}\left(\hat{\beta}\right)\right\}Z_{.t} \\ &+ \frac{2}{N}Z'_{.t}(x'x)^{-1}x'J\Omega_*\left(l_N \otimes \left(e_t^T - \frac{1}{T}l_T\right)\right) \end{aligned} \tag{2.27}$$

（2.27）の R.H.S. の最後の項はスカラーであり、また Ω_* が等分散であれば、おちてそれは 0 になる。

最後に $\hat{\mu}_i$ については以下のようになる。［3,（2.35)］から

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\left(\hat{\mu}_i\right) = &Z'_{i.}\left\{\mathrm{Cov}\left(\hat{\beta}\right)\right\}Z_{i.} \\ &+ 2E\left(Z'_{i.}\left(\hat{\beta} - \beta\right)\right)(\epsilon_{i.} - \epsilon_{..}) \\ &+ E(\epsilon_{i.} - \epsilon_{..})^2 \end{aligned} \tag{2.28}$$

ここで

(2.29)　$E\left\{\left(\hat{\beta}-\beta\right)(\epsilon_{i.}-\epsilon_{..})\right\}$

$$=E\left\{(x'x)^{-1}x'\epsilon''(\epsilon_{i.}-\epsilon_{..})\right\}$$

$$=(x'x)^{-1}x'E\left\{\epsilon''\epsilon'\left\{\frac{1}{T}\left(e_i^N\otimes l_T\right)-\frac{1}{TN}\left(l_N\otimes l_T\right)\right\}'\right\}$$

$$=(x'x)^{-1}x'J\Omega_*\left\{\frac{1}{T}\left(e_i^N-\frac{1}{N}l_N\right)\otimes l_T\right\}'$$

(2.28) の R.H.S. の第 3 項については

(2.30)　$E(\epsilon_{i.}-\epsilon_{..})^2$

$$=\left\{\frac{1}{T}\left(\left(e_i^N-\frac{l_N}{N}\right)\otimes l_T\right)\right\}'E(\epsilon\epsilon')\{\qquad\qquad\}$$

$$=\left\{\frac{1}{T}\left(\left(e_i^N-\frac{l_N}{N}\right)\otimes l_T\right)\right\}'\Omega_*\{\qquad\qquad\}$$

したがって (2.28) から (2.30) によって $\hat{\mu}_i$ の分散は

(2.31)　$\mathrm{Var}(\hat{\mu}_i)=Z_{i.}'\left\{\mathrm{Cov}\left(\hat{\beta}\right)\right\}Z_{i.}$

$$+2Z_{i.}'(x'x)^{-1}x'J\Omega_*J_{i.}$$

$$+J_{i.}'\Omega_*J_{i.}$$

となる。ただし $J_{i.}=\frac{1}{T}\left(\left(e_i^N-\frac{l_N}{N}\right)\otimes L_T\right)$ である。
以上で LS 推定値 $\left(\hat{\beta},\hat{\alpha},\hat{\delta}_t,\hat{\mu}_i\right)$ の分散をすべて計算した。

つづいて WLS を考える。(2.1) をもう一度書くと

(2.32)　$U_{it}=\alpha+\mu_i+\delta_t+\beta'X_{it}+\epsilon_{it}$

ここで [4] にあるように w_{it} (w_{it} は推定値を含む) を左からかけて

(2.33)　$w_{it}U_{it}=w_{it}\alpha+w_{it}\mu_{it}+w_{it}\delta_t+\beta'w_{it}X_{it}+w_{it}\epsilon_{it}$

つづいて (2.33) を最小化すればよい。$w_{it}U_{it}-w_{it}\epsilon_{it}$ の 2 乗和を微分した表現が [4,p.13] にある。

簡単化のために $\dim(\beta)=1\times1$ としたとき、WLS 推定値、$\tilde{\alpha},\tilde{\beta}$ の表現は [4,p.18] から

(2.34)　$\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\end{pmatrix}=M^{-1}\begin{pmatrix}m_{10}\\ m_{20}\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\end{pmatrix}+M^{-1}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}$$

となる。ただし

(2.25)
$$M=\|m_{ij}\|$$
$$m_{11}=\sum_{i,t}w_{it}^2$$
$$m_{12}=-m_{21}=\sum_{i,t}w_{it}^2 x_{it}$$
$$m_{22}=\sum_{i,t}w_{it}^2 x_{it}\left(x_{it}-x_{i.}^w-x_{.t}^w\right)$$
$$A=\sum_{i,t}w_{it}^2\epsilon_{it}$$
$$B=\sum_{i,t}w_{it}^2 x_{it}\left(\epsilon_{it}-\epsilon_{i.}^w-\epsilon_{.t}^w\right)$$

x_{it}: $\dim(\beta)=1\times 1$ のケースで β にかかる変数

$$x_{i.}^w=\frac{1}{\sum_t w_{it}^2}\sum_t^T w_{it}^2 x_{it}$$

また、$\left(x_{i.}^w,\epsilon_{i.}^w,\epsilon_{.t}^w\right)$ の定義は $x_{i.}^w$ のそれと同様である（[4]）。

けっきょく（2.34）の $\tilde{\alpha},\tilde{\beta}$ の漸近分散を計算するには

$$\tilde{\theta}-\theta=\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}-\alpha\\ \tilde{\beta}-\beta\end{pmatrix}$$

として

(2.36)
$$nE\left(\tilde{\theta}-\theta\right)\left(\tilde{\theta}-\theta\right)'=E\left\{M^{-1}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}(A',B')M^{-1}\right\}$$
$$=E\left\{\left(n^{-1}M\right)^{-1}n^{-1}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}(A',B')\left(n^{-1}M\right)^{-1}\right\}$$

を考えればよい。さらに、$n\to+\infty$ で $n^{-1}M\to$ 定数だから $n\to+\infty$ で $E\left\{n^{-1}\left(AA',AB',BB'\right)\right\}$ を計算すれば十分である。

$n\to+\infty$ のとき、$w_{it}^2/n\to r_{it}$、そうすると

(2.37)
$$E\left(\sum_{i,t}r_{it}\epsilon_{it}\right)^2$$
$$E\left(\sum_{i,t}r_{it}\epsilon_{it}\right)\left(\sum_{j,s}r_{js}x_{js}\left(\epsilon_{js}-\epsilon_{j.}^r-\epsilon_{.s}^r\right)\right)$$
$$E\left\{\sum_{i,t}r_{it}x_{it}\left(\epsilon_{it}-\epsilon_{i.}^r-\epsilon_{.t}^r\right)\right\}^2$$

を見るだけでよい。ただし

$$(2.38)\quad \epsilon_{it}^{r}=\frac{\sum_t r_{it}\epsilon_{it}}{\sum_t r_{it}}$$

そうして、以下 ϵ_{it} などをすべて$\epsilon\,(NT\times 1)$で書くことを考える。
　はじめに

$$(2.39)\quad \epsilon_{it}=\left\{\left(e_i^{N'}\otimes e_t^{T'}\right)\right\}\epsilon$$
$$=e_{it}^{NT'}\epsilon$$
$$\epsilon\sim N\left(0,\Omega_*\right)$$

である。

(2.38) の$\sum_t r_{it}\epsilon_{it}$ については

$$\sum_t^T r_{it}\epsilon_{it}=r_i'\epsilon_i,\dim\left(\epsilon_i\right)=T\times 1$$

であるが、

$$\epsilon=\begin{pmatrix}\epsilon_1\\ \vdots\\ \epsilon_N\end{pmatrix}$$

$$\epsilon_i=(0,\cdots,1,\cdots,0)\begin{pmatrix}\epsilon_1\\ \vdots\\ \epsilon_N\end{pmatrix}$$
$$=\left(e_i^{N'}\otimes I_T\right)\epsilon$$

だから

$$(2.40)\quad \sum_t^T r_{it}\epsilon_{it}=r_i'\epsilon_i=r_i'\left(e_i^{N'}\otimes I_T\right)\epsilon$$

これで ϵ で書いたことになる。つづいて

$$\sum_i r_{it}=l_T'r_i,\dim\left(r_i\right)=T\times 1$$

は $\left(r_1',\cdots,r_N'\right)=r'$ と書くと $r_i=\left(0,\cdots,I_T,\cdots,0\right)r=\left(e_i^{N'}\otimes I_T\right)r$ 、したがって (2.38) の $\epsilon_{i.}^{r}$ は

$$\epsilon_{i.}^{r}=\frac{\sum_t^T r_{it}\epsilon_{it}}{\sum_t r_{it}}$$
$$=\frac{r_i'\left(e_i^{N'}\otimes I_T\right)\epsilon}{l_T'r_i}$$
$$=\frac{r'\left(e_i^{N}\otimes I_T\right)\left(e_i^{N'}\otimes I_T\right)\epsilon}{l_T'\left(e_i^{N'}\otimes I_T\right)r}$$

ここで

$$\frac{r_i'(e_i^{N'}\otimes I_T)\,l_{NT}}{l_T'\,r_i}=\frac{r_i'(0,\cdots,I,\cdots,0)\,l_{NT}}{l_T'\,r_i}=\frac{r_i'\,l_T}{l_T'\,r_i}=1$$

に気づくとよい。

（2.41）　$$\epsilon_{.t}^{r}=\frac{\sum_i r_{it}\,\epsilon_{it}}{\sum_i r_{it}}$$

についても同様に考えればよい。つまり

$$\sum_i r_{it}\epsilon_{it}=r_{(t)}'\,\epsilon_{(t)},\dim\left(\epsilon_{(t)}\right)=N\times 1$$

ここでもし N=2 であれば

$$\begin{pmatrix}0\cdots1\cdots0, & 0\\ 0, & 0\cdots1\cdots0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\epsilon_1\\ \epsilon_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\epsilon_{1t}\\ \epsilon_{2t}\end{pmatrix}$$

$$\left\{I_2\otimes(0\cdots1\cdots0)\right\}\begin{pmatrix}\epsilon_1\\ \epsilon_2\end{pmatrix}=\epsilon_{(t)}$$

したがって、一般の N について

$$\left\{I_N\otimes(0\cdots1\cdots0)\right\}\begin{pmatrix}\epsilon_1\\ \vdots\\ \epsilon_N\end{pmatrix}=\epsilon_{(t)}$$

つまり

（2.42）　$$\left\{I_N\otimes e_t^{T'}\right\}\epsilon=\epsilon_{(t)}$$

である。

また、$\sum_i^N r_{it}=l_N'\,r_{(t)},\dim\left(r_{(t)}\right)=N\times 1$ については

$$r_{(t)}=\left\{I_N\otimes e_t^{T'}\right\}r$$

$$r'=\left(r_1',\cdots,r_N'\right)$$

そうすると（2.41）は

$$(2.43)\quad \epsilon^r_{.t} = \frac{\sum_i^N r_{it}\epsilon_{it}}{\sum_i r_{it}}$$

$$= \frac{r'_{(t)}\epsilon_{(t)}}{l'_N r_{(t)}}$$

$$= \frac{r'\left(I_N \otimes e^T_t\right)\left(I_N \otimes e^{T'}_t\right)\epsilon}{l'_N\left(I_N \otimes e^{T'}_t\right)r}$$

$$= \frac{r'\left(I_N \otimes e^T_t\, e^{T'}_t\right)\epsilon}{l'_N\left(I_N \otimes e^{T'}_t\right)r}$$

となる。

こうして（2.39）の $E\left(r'\epsilon\right)^2$ については

$$(2.44)\quad E\left(r'\epsilon\right)^2$$

$$= r'E\left(\epsilon\epsilon'\right)r$$

$$= r'\Omega_* r$$

$$= \sum_{i,t} r^2_{it}\,\omega_{it}$$

$$= \sum_{i,t} r^2_{it}\frac{1}{nr_{it}}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i,t} r_{it}$$

となる。

以上から（2.37）の $\epsilon_{it} - \epsilon^r_{i.} - \epsilon^r_{.t}$ を $\epsilon\left(NT \times 1\right)$ で書くとそれは

$$(2.45)\quad \epsilon_{it} - \epsilon^r_{i.} - \epsilon^r_{.t} = \left\{\left(e^{N'}_i \otimes e^{T'}_t\right) - \frac{r'\left(e^N_t\, e^{N'}_t \otimes I_T\right)}{l'_t\left(\ \right)r} - \frac{r'\left(I_N \otimes e^T_t\, e^{T'}_t\right)}{l'_N\left(\ \right)r}\right\}\epsilon$$

$$= g^r_{it}\,\epsilon, \dim\left(\delta^r_{it}\right) = 1 \times NT$$

の表現をもつ。（2.45）で例えば、右辺の第 2 項については

$$e^N_i\, e^{N'}_i = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}\left(0, \cdots, 1, \cdots, 0\right)$$

$$= \mathrm{diag}\left(0, \cdots, 1, \cdots, 0\right)$$

$$\left(e^N_i\, e^{N'}_i \otimes I_T\right) = \mathrm{diag}\left(0, \cdots, 0 I_T\, 0, \cdots, 0\right)$$

である。

そうすると（2.37）の3番目の表現を以下のように書くことができる。

（2.46）
$$E\left\{\sum\nolimits_{i,t} r_{it}\, x_{it}\, g_{it}^{r}\, \epsilon\right\}^2$$
$$= E\left\{\sum\nolimits_{i,t} k_{it}^{r}\, \epsilon\right\}^2 \quad \dim\left(k_{it}^{r}\right) = 1 \times NT,\ k_{it}^{r} = r_{it}\, x_{it}\, g_{it}^{r}$$
$$= \sum\nolimits_{i,t,j,s} k_{it}^{r}\, \Omega_{*}\, k_{js}^{r'}$$
$$= \left(\sum\nolimits_{i,t} k_{it}^{r}\right)\Omega_{*}\left(\sum\nolimits_{j,s} k_{js}^{r'}\right)$$

ただし
$$\Omega_{*} = \frac{1}{n}\,\mathrm{diag}\left(\cdots,\left(c_{it}\, p_{it}\, q_{it}\right)^{-1},\cdots\right)$$
$$= \frac{1}{n}\,\mathrm{diag}\left(0,\cdots,0 r_{it}^{-1}\, 0,\cdots,0\right)$$

（2.46）の表現は複雑に見えるがそうでもない。例えば

（2.47）
$$E\left(\sum\nolimits_{t,i} r_{it}\, \epsilon_{it}\right)^2$$
$$= E\left(r'\epsilon\epsilon' r\right), \dim\left(r\right) = TN \times 1$$
$$= r'\Omega_{*}\, r$$

であるが、クロネッカー積⊗をもちいる表現は次のようになる。

（2.48）
$$E\left(\sum\nolimits_{t,i} r_{it}\left(e_{i}^{N'} \otimes e_{t}^{T'}\right)\epsilon\right)^2$$
$$= E\left(\sum\nolimits_{i,t,s,j} r_{it}\left(e_{i}^{N'} \otimes e_{t}^{T'}\right)\epsilon\epsilon' r_{js}\left(e_{j}^{N'} \otimes e_{s}^{T'}\right)\right)$$
$$= \sum\nolimits_{t,s,i,j} r_{it}\, e_{it}^{NT'}\, \Omega_{*}\, e_{js}^{NT}\, r_{js}$$
$$= \left(\sum\nolimits_{t,i} r_{it}\, e_{it}^{NT'}\right)\Omega_{*}\left(\sum\nolimits_{j,s} e_{js}^{NT}\, r_{js}\right)$$

ここで

$e_{it}^{NT'}: (i,t)$ 要素のみが1で、あとは0である
$$\sum\nolimits_{i,t} r_{it}\, e_{it}^{NT'} = r_{11}\left(1,0\cdots0\right) + r_{12}\left(0,1,0,\cdots\right)$$
$$+ \cdots + r_{NT}\left(\cdots 0,1\right)$$
$$= \left(r_{11}\, r_{12},\cdots,r_{NT}\right)$$
$$= r', \dim\left(r'\right) = 1 \times NT$$
$$r' = \left(r_{1}',\cdots,r_{N}'\right), \dim\left(r_{i}'\right) = 1 \times T$$

だから（2.48）は $r'\Omega_* r$ となって（2.47）に一致する。（2.46）の k_{it}^r については最後の Appendix で詳しく述べる。

また、WLS $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ の共分散の部分は（2.37）において

（2.49）
$$
\begin{aligned}
&E\left(\sum\nolimits_{i,t} r_{it}\left(e_{it}^{NT}\right)' \epsilon \sum\nolimits_{j,s} r_{js}\, x_{js}\, g_{it}^{r}\, \epsilon\right)\\
&=\sum\nolimits_{j,s,i,t} r_{it}\left(e_{it}^{NT}\right)' E\left(\epsilon\epsilon'\right) g_{js}^{r'}\, r_{js}\, x_{js}\\
&=\sum\nolimits_{j,s,i,t} r_{it}\left(e_{it}^{NT}\right)'\Omega_*\, g_{js}^{r'}\, r_{js}\, x_{js}\\
&=\left(\sum\nolimits_{i,t} r_{it}\left(e_{it}^{NT}\right)'\right)\Omega_*\left(\sum\nolimits_{j,s} k_{js}^{r'}\right), \dim\left(k_{js}^{r}\right)=NT\times 1\\
&=r'\Omega_*\left(\sum\nolimits_{j,s} k_{js}^{r'}\right)
\end{aligned}
$$

となる。

けっきょく（2.44)、（2.46)、（2.49）から $n\to+\infty$ で（2.37）を n 倍したものは

（2.50）
$$
\begin{aligned}
&nE\left(\sum\nolimits_{i,t} r_{it}\,\epsilon_{it}\right)^2\\
&= nr'\Omega_* r\\
&= \sum\nolimits_{i,t} r_{it},\ r_{it} = c_{it}\, p_{it}\, q_{it}\\
&= l_{NT}'\, r\\
&= \psi_{11}\\
&nE\left\{\left(\sum\nolimits_{i,t} r_{it}\,\epsilon_{it}\right)\left(\sum\nolimits_{j,s} r_{js}\, x_{js}\left(\epsilon_{js}-\epsilon_{j.}^{r}-\epsilon_{.s}^{r}\right)\right)\right\}\\
&= nr'\Omega_*\left(\sum\nolimits_{j,s} k_{js}^{r'}\right)\\
&= \psi_{12}\\
&nE\left(\sum\nolimits_{i,t} r_{it}\, x_{it}\left(\epsilon_{it}-\epsilon_{i.}^{r}-\epsilon_{.t}^{r}\right)\right)^2\\
&= n\left(\sum\nolimits_{i,t} k_{it}^{r}\right)\Omega_* + \left(\sum\nolimits_{i,t} k_{it}^{r'}\right)\\
&= \psi_{22}
\end{aligned}
$$

となる。（2.50）で n 倍してあるものが n のオーダーに関して 0 である。（Ω_* のオーダーは n については -1 になっている)。

（2.36）の $n^{-1}M$ は $n\to+\infty$ で

$$\frac{1}{n}m_{11}=\frac{1}{n}\sum\nolimits_{i,t}w_{it}^{2}\rightarrow\sum\nolimits_{i,t}r_{it}=m_{11}' \tag{2.51}$$

$$\frac{1}{n}m_{12}=-\frac{1}{n}m_{21}=\frac{1}{n}\sum\nolimits_{i,t}w_{it}^{2}x_{it}\rightarrow\sum\nolimits_{i,t}r_{it}x_{it}=m_{12}'$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}m_{22}&=\frac{1}{n}\sum\nolimits_{i,t}w_{it}^{2}x_{it}\left(x_{it}-x_{i.}^{w}-x_{.t}^{w}\right)\\&\rightarrow\sum\nolimits_{i,t}r_{it}x_{it}\left(x_{it}-x_{i.}^{r}-x_{.t}^{r}\right)\\&=m_{22}'\end{aligned}$$

そうすると $n\rightarrow+\infty$ で $\tilde{\theta}=\left(\tilde{\alpha},\tilde{\beta}\right)'$ の漸近的な分散－共分散は次のようになる。

$$\begin{aligned}&nE\left(\tilde{\theta}-\theta\right)\left(\tilde{\theta}-\theta\right)'\\&=\begin{pmatrix}m_{11}' & m_{12}'\\-m_{21}' & m_{21}'\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\psi_{11} & \psi_{12}\\\psi_{12} & \psi_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_{11}' & -m_{21}'\\m_{12}' & m_{22}'\end{pmatrix}^{-1}\end{aligned} \tag{2.52}$$

この（2.52）のオーダーは n については 0、N、T については $O(NT)$ になっている。ψ_{ij},m_{ij}' はそれぞれ（2.50）、（2.51）であたえられる。

Appendix

本文の（2.45）で g_{it}^{r},k_{it}^{r} の定義は

$$\begin{aligned}k_{it}^{r}&=r_{it}x_{it}g_{it}^{r}\\&=r_{it}x_{it}\left(e_{it}^{NT'}-\frac{r'\left(e_{i}^{N}e_{i}^{N'}\otimes I_{T}\right)}{l_{T}'\left(e_{i}^{N'}\otimes I_{T}\right)r}-\frac{r'\left(I_{N}\otimes e_{t}^{T}e_{t}^{T'}\right)}{l_{N}'\left(I_{N}\otimes e_{t}^{T'}\right)r}\right)\end{aligned} \tag{A.1}$$

である。はじめに（A.1）の第 1 項については

$$\sum\nolimits_{i,t}r_{it}x_{it}e_{it}^{NT'}=\left(r_{11}x_{11},\cdots,r_{NT}x_{NT}\right) \tag{A.2}$$

（A.1）の第 2 項については

$$l_{T}'\left(e_{i}^{N'}\otimes I_{T}\right)r=l_{T}'r_{i},\dim\left(r_{i}\right)=T\times 1$$

$$\begin{aligned}r'\left(e_{i}^{N}e_{i}^{N'}\otimes I_{T}\right)&=r'\mathrm{diag}\left(\cdots,0I_{T}0,\cdots\right)\\&=\left(0,\cdots,r_{i}',\cdots,0\right)\\&\dim\left(r_{i}'\right)=1\times T\end{aligned}$$

だから例えば N=2 で t, i について加えたものは

$$\text{(A.3)}\qquad \sum_t^T \left\{ r_{1t}\, x_{1t} \frac{(r_1', 0)}{l_T' r_1} + \frac{r_{2t}\, x_{2t} (0, r_2')}{l_T' r_2} \right\}$$

$$= \frac{r_1' x_1 (r_1', 0)}{l_T' r_1} + \frac{r_2' x_2 (0, r_2')}{l_T' r_2}$$

$$= \frac{(r_1' x_1 r_1', 0)}{l_T' r_1} + \frac{(0, r_2' x_2 r_2')}{l_T' r_2}$$

$$= \left(\frac{r_1' x_1 r_1'}{l_T' r_1}, \frac{r_2' x_2 r_2'}{l_T' r_2} \right)$$

ここで $\sum_t^T r_{1t} / (l_T' r_1) = 1$ である。一般の N についての表現は

$$\text{(A.4)}\qquad \sum_{t,i}^T r_{it}\, x_{it} \frac{r' (e_i^N\, e_i^{N'} \otimes I_T)}{l_T' r_i}$$

$$= \left(\frac{r_1' x_1 r_1}{l_T' r_1}, \frac{r_2' x_2 r_2'}{l_T' r_2}, \cdots, \frac{r_N' x_N r_N'}{l_T' r_N} \right)$$

となっている。(A.4) の次数は $1 \times NT$ である。

(A.1) の第 3 項を見ると

$$\text{(A.5)}\qquad r' (I_N \otimes e_t^T\, e_t^{T'}) = (r_1', \cdots, r_N') \begin{pmatrix} e_t^T\, e_t^{T'} & & \\ & \ddots & \\ & & e_t^T\, e_t^{T'} \end{pmatrix}$$

$$= (r_1' e_t^T\, e_t^{T'} \cdots r_N' e_t^T\, e_t^{T'})$$

$$= (r_{1t}\, e_t^{T'} \cdots\ r_{Nt}\, e_t^{T'})$$

$$= (0 \cdots, r_{1t}\, 0, \cdots, 0, r_{NT}, \cdots 0)$$

$$l_N' (I_N \otimes e_t^{T'}) r = l_N' r_{(t)} \quad \dim (r_{(t)}) = N \times 1$$

ここで、例えば N=2 のとき、i, t についての和は

$$\text{(A.6)}\qquad \sum_t^T (r_{1t}\, x_{1t} + r_{2t}\, x_{2t}) \left(\frac{r' (I_N \otimes e_t^T\, e_t^{T'})}{l_N' r_{(t)}} \right)$$

$$= \sum_t^T r_{1t}\, x_{1t} \frac{(0 \cdots r_{1t}\, 0 \cdots 0 r_{2t}\, 0)}{l_N' r_{(t)}}$$

$$+ \sum_t^T r_{2t}\, x_{2t} \frac{(0\, r_{1t}\, 0 \cdots 0\, r_{2t}\, 0)}{l_N' r_{(t)}}$$

となる。

（A.6）の次数は 1 × 2*T* であるが、この（1,1）要素は

$$\text{(A.7)}\qquad \frac{r_{11}^2 x_{11}}{l'_N r_{(1)}} + \frac{r_{21} r_{11} x_{21}}{l'_N r_{(1)}} = \frac{r_{11}^2 x_{11} + r_{21} r_{11} x_{21}}{l'_N r_{(1)}}$$

$$= \frac{r'_{(1)} x_{(1)} r_{11}}{l'_N r_{(1)}}$$

そうして一般の *N* についてトップの要素は

$$\text{(A.8)}\qquad \frac{r'_{(1)} x_{(1)} r_{11}}{l'_N r_{(1)}}; \dim\left(r_{(1)}\right) = N \times 1, \dim\left(x_{(1)}\right) = N \times 1$$

となって、これは *i, t* を交換したときの（A.4）の（1,1）要素に等しい。

そうすると（A.1）を *i, t* について加えた 1 × *NT* ベクタのトップの要素は（A.2)、（A.4）から

$$\text{(A.9)}\qquad r_{11} x_{11} - \frac{r'_1 x_1}{l'_T r_1} r_{11} - \frac{r'_{(1)} x_{(1)}}{l'_N r_{(1)}} r_{11}$$

$$= r_{11}\left(x_{11} - \frac{\sum_t r_{1t} x_{1t}}{\sum_t r_{1t}} - \frac{\sum_i r_{i1} x_{i1}}{\sum_i r_{i1}} \right)$$

$$= r_{11}\left(x_{11} - x_{1.}^r - x_{.1}^r \right)$$

となっている。ここで $x_{1.}^r$ などは［4］ですでにあたえた記号である。

注）この論文はオープンリサーチセンター（地域部門）での研究成果（H16 ～ 17 年度）の一部分である。
田中寧教授（経済学部）からはコメントをいただいた。厚くお礼申し上げる。

参考文献

［1］ Stock, J. H. and M. W. Watson, *Introduction to Econometrics,* Addison Wesley, New York, 2003.

［2］ 畠中道雄『計量経済学の方法』創文社、1991 年。

［3］ 片岡佑作「フィクスト・エフェクト・モデルにおける生産関数の推定問題」経済経営論叢、Vol.35、No.1、2000 年、pp.16-33。

［4］ ――「固定効果のあるパネルデータモデルのロジット推定」京都産業大学論集、社会科学系列、No.22、2005 年、pp.1-28。

［5］ 北村行伸「パネルデータ分析の新展開」経済研究、Vol.54、No.1、2003 年、pp.74-93。

［6］ 佐和隆光『回帰分析』朝倉書店、1979 年。

Asymptotic Properties of Weighted LS Estimates in Some Logit Models with Fixed-Effects

Yusaku KATAOKA

Abstract

In many respects the simplest way of representing the dependence of a probability on explanatory variables so that the constraint $0 < p_{it} < 1$ is inevitably satisfied, is to postulate a dependence for i and t,

(1) $$p_{it} = \exp(x''_{it}\theta) / [1 + \exp(x''_{it}\theta)],$$

(2) $$1 - p_{it} = 1 / [1 + \exp(x''_{it}\theta)].$$

Here, x''_{it} is a row of known constants and θ is a column of unknown parameters. Equations (1) and (2) are equivalent to

(3) $$f_{it} = \log(p_{it} / (1 - p_{it})) = x''_{it}\theta$$

or, collecting the TN values $(i = 1, \ldots, N; t = 1, \ldots, T)$ together, we can write

(4) $$f = x''\theta.$$

We call $f_{it} = \log(p_{it} / (1 - p_{it}))$ the logistic transform of the probability , p_{it} and (4) a linear logistic model.

If we let

(5) $$U_{it} = \log(\hat{p}_{it} / (1 - \hat{p}_{it})) \qquad \hat{p}_{it} : \text{maximum likelihood estimates of } p_{it}$$

then we can write

(6) $$\begin{aligned} U_{it} &= x''_{it}\theta + \epsilon_{it} \\ &= \alpha + \mu_i + \delta_t + x_{it}\beta + \epsilon_{it} \\ \textstyle\sum c_i \mu_i &= 0 \\ \textstyle\sum c'_t \delta_t &= 0 \\ \epsilon_{it} &= \log(\hat{p}_{it} / (1 - \hat{p}_{it})) - \log(p_{it} / (1 - p_{it})) \\ &\cong (p_{it} / (1 - p_{it}))^{-1} (\hat{p}_{it} - p_{it}) \end{aligned}$$

where the ϵ_{it} are independent, approximately $N(0, \sigma^2_{it} / n_{it})$. This is essentially a normal regression model, but with variances unequal and depending on the unknown parameters. If we knew the σ^2_{it}, we could rewrite (6) as

(7) $$U_{it}/\omega_{it} = (\alpha + \mu_i + \delta_t + x_{it}\beta)/\omega_{it} + \epsilon''_{it}$$

where $\omega_{it} = \sigma_{it}/\sqrt{n_{it}}$ and the ϵ''_{it} are independent $N(0,1)$.

The purpose of this paper is twofold: first, to apply the method of least squares to (7) above by replacing ω_{it} with their maximum likelihood estimates, $\hat{\omega}_{it} = \hat{\sigma}_{it}/\sqrt{n_{it}} = (\hat{p}_{it}/(1-\hat{p}_{it}))^{-1/2}/\sqrt{n_{it}}$; second, to derive the asymptotic variance-covariances of rusulting LS estimates for large T, N and n_{it}

Keywords : logit approach, fixed-effects, panel data models, weighted least squares, asymptotic variance-covariances