投信基準価格の分散－共分散比への近似

片　岡　佑　作

要　　旨

投信基準価格 H の分散を $\mathrm{V}(H)$、そうして (H, P) 全体に対する H の分散－共分散比 v_1 を

$$v_1 = \frac{\mathrm{V}(H) + \mathrm{Cov}(H, P)}{\mathrm{V}(H + P)}$$

と定義する。ただし $\mathrm{Cov}(H, P)$ は、 H と P の共分散を表す。そのとき、 v_1 の値が大きければ、それはファンド H が全体に対して大きな影響をもつことを意味する。この論文の目的は 2 つある。1 つは 2006.4.27－2006.7.6 間のファンド価格のデータについて (H, P) 全体に対するファンド H の分散－共分散比を計算する点、もう一つは $(H + \Delta H, P + \Delta P)$ のセットに対する v_1 の近似計算方法を考えることである。

キーワード：投資信託、基準価格、分散－共分散比、近似方法、テーラー展開

内容目次：

1　序

投資家が複数のファンド（投資信託）を保有するとき、特定のファンドの変動が全体を極端に左右するのをさけるのが一般的である。あらかじめ１つのファンドの保有額に上限を決めておくなどの工夫がなされている。

問題は１つのファンドの全体に占める変動割合をいかに測るかであるが、ファンドの分散のみを見るのは不十分で、異なる複数のファンド間の共分散を知る必要があり、こうしたケースに適当な統計量として、分散－共分散比があるのは意外に知られていない。つまり、簡単のためいまファンド数 m を $m=2$ としてファンド１の分散－共分散比は

（１.１）　$$v_1=\frac{a_{11}+a_{12}}{a_{11}+a_{22}+2a_{12}}$$

となる。ここで

a_{ii}：ファンド i の標本分散

a_{ij}：ファンド i，j の標本共分散

$v_1+v_2=1$

である。v_1 が適切な統計量の他の例として、複数の入試科目があって、どの科目が入試科目全体をとくに左右しているかを知ろうとする場合などがある。([1]、[2] を見るとよい)。

こうしてこの論文の目的は以下である。

1°　複数ファンドを保有した場合、ファンドのそれぞれの基準価格（2006 年 4 月下旬から 7 月下旬の確定値）から特定ファンドの分散－共分散比 v_i を計算し、ファンドのちがいよって v_i は大きく異なることがあるかどうかを見る（結果はこれまでによく知られている常識をうら打ちするものとなっている)。

2°　つづいて保有わく全体を一定にして、変動幅の大きい特定のファンドわくを減らし、他のものへわく（保有単位）を移しかえたとき、新しい v''_i はどのように計算されるかを考える。また追加的に重要な点として、新しい v''_i を計算するのはわりとめんどうであるから、この場合の v''_i の近似計算方法を提案した。v''_i は

$v''_i=v_i+\Delta_i$

Δ_i：移しかえたことに対応する増分

と表現され、Δ_i は変更する保有割合を ε_i とすると、ε_i の１次式で書くことができる。

以下、2 でファンドについての背景を記述し、分散－共分散比 v_i を導入する。3 は実際のファン

ドデータに v_i を適用し、ここでの計算結果に解釈をあたえる。つづいて保有わくの変更、こうした場合の v_i の近似計算方法を議論する。これらの詳しい証明は Appendix に移した。

2　準　　備

ある投資信託の内容を簡単のために、保有銘柄数を２として

（２.１）　$p_1 q_1 + p_2 q_2 = p_0 q_0$

と書く。ここで p_1、p_2 は株価、p_0 は基準価格、q_1、q_2 は数量、q_0 は口数と言われるものである。$p_1 = 1$、$q_1 = 2$、$p_2 = 2$、$q_2 = 3$ とすると、

（２.２）　$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = p_0 q_0$

さらに $p_0 = 1$ とすると $q_0 = 8$ になる。一般的には初期に $p_0 = 1$、$q_0 = q_c$ で p_1、p_2 をファンドマネージャーが決めることはできない。彼が決めるのは q_1、q_2 の配分のみである。$q_0 = q_c$ で

（２.３）　$p_1 q_1 + p_2 q_2 = q_c$

さらに q_1、q_2 のいずれかに制約をおく。

例えば

（２.４）　$k_1 q_1 + k_2 q_2 = k > 0 \quad k > 0,\ k_1 > 0,\ k_2 > 0$

とおくと　（２.３）、（２.４）から q_1、q_2 は一意的に決まる。（２.３）、（２.４）をみたす q_1、q_2 を探すだけである。

q_1、q_2、q_0 が不変で、p_1、p_2 が変化すると、基準価格 p_0 の変化 (Δp_0) は

（２.５）　$(p_1 + \Delta p_1) q_1 + (p_2 + \Delta p_2) q_2 = (p_0 + \Delta p_0) q_0$

を Δp_0 について解けばよい。

（２.６）　$q_1 \Delta p_1 + q_2 \Delta p_2 = q_0 \Delta p_0$

$$\Delta p_0 = \frac{1}{q_0}(q_1 \Delta p_1 + q_2 \Delta p_2)$$

となる。

p_1 のみが変化したときは、つまり $\Delta p_2 = 0$ で（２.６）から Δp_0 は$\Delta p_0 = \frac{q_1}{q_0} \Delta p_1$ である。

また、$\Delta B / B$ を市場全体の株価変動を表すものとし、

$$\frac{\Delta p_1}{p_1} = \alpha_1 \cdot \frac{\Delta B}{B}$$

$$= \alpha_1 \cdot A$$

$$\frac{\Delta p_2}{p_2} = \alpha_2 \frac{\Delta B}{B}$$

とおけば（2.6）は

（2.7）
$$\frac{\Delta p_0}{p_0}=\frac{1}{p_0 q_0}\left(q_1\alpha_1 A p_1+q_2 p_2\alpha_2 A\right)$$
$$=\frac{A}{p_0 q_0}\left(\alpha_1 q_1 p_1+\alpha_2 q_2 p_2\right)$$

となる。ここで $\alpha_1=1+\varepsilon'_1$ 、$\alpha_2=1+\varepsilon'_2$ 、$\left|\varepsilon'_1\right|<1$、$\left|\varepsilon'_2\right|<1$ とすると（つまり ε'_1 、ε'_2 は小さい）、（2.7）を

（2.8）
$$\frac{\Delta p_0}{p_0}=\frac{A}{p_0 q_0}\left(q_1 p_1+q_2 p_2+\varepsilon'_1 q_1 p_1+\varepsilon'_2 q_2 p_2\right)$$
$$=A+\frac{\varepsilon'_1 q_1 p_1+\varepsilon'_2 q_2 p_2}{p_0 q_0}$$

と書くことができる。ここで A は index の上昇割合、そうして

$$\varepsilon'_1 q_1 p_1+\varepsilon'_2 q_2 p_2=0$$

になるように、q_2、q_1 を決めるファンドは、インデックスファンドと言われるものである。

p_1、p_2、q_1、q_2 はすべてプラスだから（2.8）の2番目の第2項を zero にするには $\varepsilon'_1=\varepsilon'_2=0$ か、ε'_1 を $\varepsilon'_1>0$ にとれば ε'_2 はかならず $\varepsilon'_2<0$ である。

以上は市場全体の株価変動とある特定のファンド価格（基準価格）の変化を見ているが、次に複数のファンドを保有した場合、ファンド全体に対するあるファンドの変動分を測ることを考える。ファンド数（m）が2で

（2.9）
$$v_1=\frac{\sum_t w_1\left(X_{1t}-\bar{X}_1\right)\left(w_1\left(X_{1t}-\bar{X}_1\right)+w_2\left(X_{2t}-\bar{X}_2\right)\right)}{\sum_t\left(w_1\left(X_{1t}-\bar{X}_1\right)+w_2\left(X_{2t}-\bar{X}_2\right)\right)^2}$$

$$w_1, w_2>0$$

とすると、X_1 の全体 $\left(X_1, X_2\right)$ に対する変動割合を測ることができる。ただし

$$\bar{X}_1=\frac{1}{T}\sum_t X_{1t}$$
$$\bar{X}_2=\frac{1}{T}\sum_t X_{2t}$$

X_{1t}：t 期、ファンド1の資産額（p、q の積）

$\bar{X}=\frac{1}{T}\sum_t\left(X_{1t}+X_{2t}\right)$、$\bar{X}$ ：すべての平均

$=\bar{X}_1+\bar{X}_2$

この v_1 は分散－共分散比といわれるものである。((2.9）の w_1、w_2 はファンドマネージャーが任意に選択するウェイトである。$w_1=w_2$ であれば $w_1=w_2=0.5$、$w_1+w_2=1$ となっている。ただし、分散－共分散比に w_i が入る場合は $w_1+w_2=k>0$ としても $w_1/k+w_2/k=1$ と書き、あらためて w_1/k を w_1 とすればよい。またオープンファンドを構成する要素が別の複数のオープンファンドに

なっているものもある。財産 3 分法ファンド毎月分配型（日興）のケースについては、構成要素はグローバル債券、国内株式、国内リートの 3 種であり、その対応するウェイトはそれぞれ 0.5、0.25、0.25 となっている)。

いま X_{it} の内容を

$X_{1t}=p_{1t}q_1$，q_1 は t について不変

$X_{2t}=p_{2t}q_2$

と分解し、簡単のために $w_1=w_2=1$ とおくと

$$\bar{X}_1=\frac{1}{T}\sum_t p_{1t}q_1$$
$$=q_1\bar{p}_1$$
$$X_{1t}-\bar{X}_1=q_1\left(p_{1t}-\bar{p}_1\right)$$
$$\bar{X}_2=q_2\bar{p}_2$$

$$X_{2t}-\bar{X}_2=q_2\left(p_{2t}-\bar{p}_2\right)$$

から（2.9）の v_1 は

（2.10）
$$v_1=\frac{\sum_t q_1\left(p_{1t}-\bar{p}_1\right)\left(q_1\left(p_{1t}-\bar{p}_1\right)+q_2\left(p_{2t}-\bar{p}_2\right)\right)}{\sum_t\left(q_1\left(p_{1t}-\bar{p}_1\right)+q_2\left(p_{2t}-\bar{p}_2\right)\right)^2}$$

となる。ここにおいても B_t を市場全体の指数（例えば日経平均）とし

（2.11）
$$p_{1t}-\bar{p}_1=\gamma_1\left(B_t-\bar{B}\right),\ \bar{B}=\frac{1}{T}\sum_t B_t$$
$$p_{2t}-\bar{p}_2=\gamma_2\left(B_t-\bar{B}\right)$$

とおくと（2.10）の v_1 は

（2.12）
$$v_1=\frac{\sum_t q_1\gamma_1\left(B_t-\bar{B}\right)\left(q_1\gamma_1\left(B_t-\bar{B}\right)+q_2\gamma_2\left(B_t-\bar{B}\right)\right)}{\sum_t\left(q_1\gamma_1\left(B_t-\bar{B}\right)+q_2\gamma_2\left(B_t-\bar{B}\right)\right)^2}$$
$$=\frac{\sum_t q_1\gamma_1\left(B_t-\bar{B}\right)^2\left(q_1\gamma_1+q_2\gamma_2\right)}{\sum_t\left(B_t-\bar{B}\right)^2\left(q_1\gamma_1+q_2\gamma_2\right)^2}$$
$$=\frac{q_1\gamma_1}{q_1\gamma_1+q_2\gamma_2}$$

となる。ただし $\sum_t\left(B_t-\bar{B}\right)^2\neq 0$。

つまりこの場合は、あるファンド i の全体 X_1、X_2 に対する変動分 v_i はこの i の大きさ q_i と市場に対する反応のつよさ γ_i によって決まることを言っている。

ところで（2.9）にもどり、分散－共分散比 v_1 を適用する場合の留意点を指摘しておこう。（2.9）を

（2.13）
$$v_1=\frac{\sum_t w_1^2\left(X_{1t}-\bar{X}_1\right)^2+\sum_t w_1w_2\left(X_{1t}-\bar{X}_1\right)\left(X_{2t}-\bar{X}_2\right)}{\sum_t\left(w_1\left(X_{1t}-\bar{X}_1\right)\right)^2+\sum_t\left(w_2\left(X_{2t}-\bar{X}_2\right)\right)^2+2\sum w_1w_2\left(X_{1t}-\bar{X}_1\right)\left(X_{2t}-\bar{X}_2\right)}$$
$$=\frac{a_{11}+a_{12}}{a_{11}+a_{22}+2a_{12}}$$
$$v_2=\frac{a_{22}+a_{12}}{a_{11}+a_{22}+a_{12}}$$
$$v_1+v_2=1$$

と書くことができる。ここで $a_{11}=T^{-1}\sum_t w_1^2\left(X_{1t}-\bar{X}_1\right)^2$ などである。ウェイトの w_1、w_2 がともに1で v_1 の符号を見ると $v_1=\frac{a_{11}+a_{12}}{a_{11}+a_{22}+2a_{12}}$ でこの場合の標本相関係数を $r=\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}$ とすると、v_1 の分子は $a_{11}+r\sqrt{a_{11}a_{22}}$、ここで
$$\sqrt{a_{11}}\left(\sqrt{a_{11}}+r\sqrt{a_{22}}\right)<0$$
のとき、$v_1<0$ となる。つまり r が
$$-1<r<-\sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}$$
をみたすと、v_1 はマイナスになる（ファンド1、2の相関係数がマイナス、かつファンド1の分散がファンド2の分散より相対的にかなり小さいと $v_1<0$ の可能性が高くなる）。

3　展　　開

いまファンドを1単位づつ、2種類保有したとき、ファンド1の全体に対する変動割合を

（3.1）
$$v_1=\frac{\sum_t\left(X_{1t}-\bar{X}_1\right)^2+\sum_t\left(X_{1t}-\bar{X}_1\right)\left(X_{2t}-\bar{X}_t\right)}{\sum_t\left(X_{1t}-\bar{X}_1+X_{2t}-\bar{X}_2\right)^2}$$

と表すことができる。ただし

X_{it}：ある時点 $t=t_0$ のときの基準価格を1とした場合の時点 t における指数化された基準価格、i はファンド i に関する添字である。この X_{it} は前節2の X_{it} とは異なる

ここで

$$a_{12}=\sum_t\left(X_{1t}-\bar{X}_1\right)\left(X_{2t}-\bar{X}_2\right)/T$$
$$a_i=\sum_t\left(X_{it}-\bar{X}_i\right)^2/T$$

とおいて v_1 を

（３．２）　$$v_1 = \frac{a_1 + a_{12}}{a_1 + a_2 + 2a_{12}}$$

と書くことも可能である。一般にファンド数が m の場合、 v_1 は

（３．３）　$$v_1 = \frac{a_1 + a_{12} + \cdots + a_{1m}}{\sum_i a_i + 2\sum_* a_{ij}}$$

ここで $\sum_*$ は $i < j$ の場合の和を表す。

以上の準備で、ファンド５本の分散－共分散比を計算したのが表５－１から表５－５までである。これ以前に表１は 2006.4.27 から 2006.7.6 まで、ほぼ１週間単位の投信の基準価格を示した。同時に 2006.5.11 の基準価格を１として指数化した数値もかかげてある。2006.5.11 を１とした理由は、ほぼこの時点でインド株式市場の平均株価指数（SENSEX30）が下降しはじめたからである。H、P はいずれもインド企業を投資対象とする投信であり、組入れ銘柄数は H、P でそれぞれ 87、47、SENSEX30 との連動性について H の方がつよく、また P の方が全体に占める大型株のウェイトが高くなっている。(PCA インド株式オープン、HSBC インドオープン週報、2006 年８月 25 日号)。

また、のこりの R、E、J はそれぞれロシア市場、国内の店頭市場、国内の東証（１部）を投資対象とするものである。

以下、順に簡単にコメントをしておこう。

１）５本の投信ともすべて 2006.5.11 ごろから基準価格は下落し、その下落幅も J を除いてあまりちがいはない。(投信の基準価格が下落した理由は米国の金利引上げ観測をきっかけに主として新興国市場へ投入された資金が一時的に急速に引きあげられたからである。国内市場を対象する E、J の価格下落も E については 2006 年５月よりも以前に国内新興市場（JASDAQ など）への信頼が極端に弱まった点、J についても 2006 年５月以降とくにインド株式市場との連動性が高まったことによる。また、2006 年１月以降国内公募投信でインド株式市場を投資対象とするものが急速にふえていた点もこれら投信価格の下落幅を拡大させた)。

２）表２、３、４から分かるように（H、P、R）と（E、J）はいく分動き方が異なる。(H、P、R) の方が価格下落幅はより大きく、分散も大きい。表３は P と E のあいだの距離がもっとも遠いことを示している。つまり P、E の相関係数 r のみが 0.83 であり、残りのほとんどは 0.9 をこえる。H、P の相関係数 r(H、P）が 0.99 となるのはこの２つのファンドの投資対象が似かよっているので当然である。

３）表４の分散－共分散表から分散－共分散比を計算すると表５－１から表５－５のようになる。複数のファンドを同時にかかえたとき、そのなかに H、P、R が入ると全体に対する H、P、R の変動の効果が大きくなっていることが分かる。例えば H、P、R、E、J ５本のファンドすべて

を保有した場合において、H、P、R の分散－共分散比はそれぞれ 0.2517、0.2196、0.2475 であるのに対して、E、J の分散－共分散比は 0.13 ～ 0.14 でしかない。(H、P、R、E、J のそれぞれが全体（H、P、R、E、J）に対して同一の変動効果を持つのであれば、その分散－共分散比はすべて 0.20 である。くり返すが、H、P、R の分散－共分散比は 0.20 をこえ、他方、E、J についてそれは 0.20 にはるか及ばない)。したがって、5 本の投信 H、P、R、E、J を持ったとき、先の計画として H、P、R の変動幅をおさえたければ、H、P、R の保有単位数を減らして、その減少分を E、J に移すのがよい。

4）H、P、R について詳しく見てみると、H、R はほぼ同一の分散－共分散をもち、最大である。通常は投信 R の方の分散あるいは、分散－共分散比がともに大きいが、この 2006 年 5 月～ 7 月においてはインド株式市場の振幅がとくに大きく、表 5 － 1 ～表 5 － 5 の結果につながったと思われる。P の分散、分散－共分散比がそれほど大きくない理由は、P がインド市場で優位を保つ巨大企業に集中投資している点によると考えてよい。SENSEX30 との連動性は通常 H の方が大きい。

以上は表 1 から表 5 までを見たときの内容解釈であるが、留意点として以下がうかぶであろう。

m=2 でファンド 1 の分散－共分散比は

（3．4）
$$v_1=\frac{\sum_t\left(X_{1t}-\bar{X}_1\right)^2+\sum_t\left(X_{1t}-\bar{X}_1\right)\left(X_{2t}-\bar{X}_2\right)}{\sum_t\left(X_{1t}-\bar{X}_1+X_{2t}-\bar{X}_2\right)^2}$$
$$=\frac{a_1+a_{12}}{a_1+a_2+2a_{12}}$$

であった。X_{it} はファンド i の t 時点での基準価格である。ここで v_1 の変動幅が大きければファンド 1 の保有単位を下げて、下げた分をファンド 2 へ移せばよい。

ただし、総単位数は一定としたい。この場合は $\varepsilon_1<0$ として 1 の分散－共分散比は

（3．5）
$$v_1(\varepsilon_i)=\frac{\left(1+\varepsilon_1^2\right)a_1+(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)a_{12}}{(1+\varepsilon_1)^2a_1^2+(1+\varepsilon_2)a_2^2+2(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)a_{12}}$$

となる。ただし $\varepsilon_1+\varepsilon_2=0\left(\varepsilon_2\text{は小さい}\right)$。$\varepsilon_1<0$ で $|\varepsilon_1|$ を大きくとるほど $v_1(\varepsilon_i)$ は小さくなる。

こうして $v_1(\varepsilon_i)=v_2(\varepsilon_i)$ となるような ε_1 を選べばファンド 1、2 の変動幅（分散－共分散比）は等しくなる。（3．5）の ε_2 を $-\varepsilon_1$ と書けば

（３．６）
$$v_1(\varepsilon_i)=\frac{(1+\varepsilon_1)^2a_1+(1-\varepsilon_1^2)a_{12}}{(1+\varepsilon_1)^2a_1+(1-\varepsilon_1)^2a_2+2(1-\varepsilon_1^2)a_{12}}$$

当然（３．６）の右辺は ε_1 の１次式で書けない。ファンドにふり向ける保有単位を変更した時、その変更後の $v_1(\varepsilon_i)$ の大きさを見るのはめんどうである。しかしながらこの先変更を考える期間が短く、ε_i が小さければ、次下のような $v_1(\varepsilon_i)$ に対する近似式を計算しておくのが有効である。つまり、ε_1 を小さいとして $v_1(\varepsilon_i)$ を

（３．７）
$$\begin{aligned}v_1(\varepsilon_i)&=\frac{a_1+a_{12}}{a_1+a_2+2a_{12}}+g(\varepsilon_i)\\&=v_1(0)+g(\varepsilon_i)\\&=v_1(0)+c_1\varepsilon_1\end{aligned}$$

と表現する。ただし $g(\varepsilon_i)$ は ε_1 の１次式である。c_1 は定数、当然 $\varepsilon_1=-\varepsilon_2$ である。

（３．７）の表現からもし $\varepsilon_1=-0.1$ であれば、

（３．８）　$v_1(\varepsilon_i)=v_1(0)+c_1(-0.1)$

から $v_1(\varepsilon_i)$ をただちに計算することができる。

Appendix ではこうした近似の方法を記述した。c_1 は一般にファンド１、２の分散、共分散によって簡単に書ける。m=2 で Appendix から

$$c_1=-2(\varepsilon_1)B_0^{-1}\{c_0(a_1-a_2)-a_1\}$$

である。ただし $c_0=v_0(0)$、B_0 は$v_1(0)$ を構成する分母、つまり $B_0=a_1+a_2+2a_{12}$、こうした近似式を Appendix では m=3 のケースまであたえてある。Appendix の表Ａ－１で見るように $\varepsilon_1=-0.1$ では v_1 の正確な値と近似にあまりちがいはない。近似方法は成功している。

表１　投信基準価格および指数

t(時点)	H		P		R		J		E	
06.7.6	18041	.8453	15225	.8818	8769	.8315	16503	.9185	14396	.8824
6.29	16988	.7959	14184	.8215	8398	.7963	16205	.9019	14134	.8663
6.22	16841	.7891	13952	.8081	7986	.7573	16180	.9005	14512	.8895
6.15	14957	.7008	12586	.7290	7710	.7311	15605	.8685	14429	.8844
6.8	16162	7572	13500	.7819	8607	.8162	15452	.8600	13878	.8506
6.1	17289	.8100	14281	.8272	8751	.8298	16533	.9202	14846	.9100
5.25	17698	.8292	14657	.8489	8463	.8025	16616	.9248	15124	.9270
5.18	20550	.9628	16558	.9591	9336	.8853	17119	.9528	15195	.9314
5.11	21342	1	17264	1	10545	1	17966	1	16314	1
5.1	20537	.9622	16562	.9593	10562	1.0016	18081	1.0064	16777	1.0283
4.27	20935	.9809	16917	.9799	10764	1.0207	18198	1.0129	16831	1.0316

時点	SENSEX30	
7.7	10509	.8554
6.30	10609	.8636
6.25	10412	.8475
6.16	9884	.8046
6.9	9810	.7985
6.2	10451	.8507
5.26	10809	.8799
5.19	10938	.8904
5.12	12285	1
5.5	12359	1.0060
4.24 (始値)	12063	.9819

注１）Ｈ：HSBC インドオープン

Ｐ：PCA インド株式オープン

Ｒ：DWS ロシア・欧州新興国株式投信

Ｅ：日興エボリューション

Ｊ：フィデリティ・日本成長株・ファンド

２）Ｈの 18041 は 2006.7.6 の基準価格、.8453 は 2006.5.11 を１としたときの同日の指数、以下、Ｐからｊまでは同様、時点はほぼ１週間単位であるが正確ではない（出所：日本経済新聞 2006.4.27 から 2006.7.6 までの紙面）

3）SENSEX30 ：ムンバイ証券取引所の株価指数、4.24 のみが始値、それ以外は終値。SENSEX 指数とファンド価格の対応する日付がいく分異なる。指数の終値は日本時間の翌日、22:00 の投信基準価格に反映する（出所： PCA インドウィークリー、2006.5.11 から 2006.7.12）

表 2　投信指数の統計量

	H	P	R	E	J	SENSEX30（参考）
平均	.8575	.8724	.8611	.9274	.9333	.8890
分散	0.009539	0.007372	0.009470	0.003765	0.002596	0.004999
変動係数	0.11389	0.09841	0.11301	0.06616	0.05459	0.07954

注 1）変動係数：標準偏差／平均

2）数値はすべて指数化した数値にもとづく、表 3 以下同様である。

表 3　基準価格の相関係数

	H	P	R	E	J
H	1	.9973	.9246	.8600	.9543
P		1	.9165	.8385	.9429
R			1	.9085	.9366
E				1	.9570
J					1

表 4　分散ー共分散行列

	H	P	R	E	J	
H	.009539	.008362	.008788	.005154	.004749	0.036592
P		.007372	.007658	.004418	.004125	0.023573
R			.009470	.0054249	.004645	0.019538
E				.003765	.002992	0.006757
J					.002596	0.002596
					0.019106	0.089056

表５－１　Ｈに関する分散－共分散比

	HP	HR	HE	HJ		
H	.5322	.5009	.6222	.6604		
	HPR	HPE	HPJ	HRE	HRJ	HEJ
H	.3511	.4077	.4196	.3818	.3981	.4663
	HPRE	HPRJ	HPEJ	HREJ		
H	.2901	.2976	.3355	.3176		
	HPPEJ					
H	.2517					

表５－２　分散－共分散比（P）

	PH	PR	PE	PJ		
P	.4678	.4674	.5903	.6307		
	PHR	PHE	PHJ	PRE	PRJ	PEJ
P	.3079	.3564	.3679	.3497	.3663	.4324
	PHRE	PHRJ	PHEJ	PREJ		
P	.2534	.2605	.2930	.2884		
	PHREJ					
P	.2196					

表５－３　分散－共分散比（R）

	RH	RP	RE	RJ		
R	.4991	.5325	.6185	.6610		
	HPR	HRE	HRJ	REP	RPJ	REJ
R	.3410	.3850	.3951	.4056	.4164	.4657
	RHPE	RHPJ	RHEJ	RPEJ		
R	.2855	.2893	.3187	.3328		
	RHPEJ					
R	.2475					

表５－４　分散－共分散比（E）

	HE	PE	RE	EJ		
E	.3778	.4097	.3815	.5473		
	EHP	EHR	EHJ	EPR	EPJ	ERJ
E	.2359	.2332	.2857	.2447	.3036	.2904
	HPRE	HPJE	EPJR	EJRH		
E	.1709	.1970	.2031	.1951		
	HPREJ					
E	.1496					

表５－５　分散－共分散比（J）

	JH	JP	JR	JE		
J	.3396	.3693	.3390	.4527		
	JHP	JHR	JHE	JPR	JRE	JPE
J	.2125	.2068	.2480	.2173	.2439	.2639
	HPRJ	HPEJ	PREJ	HREJ		
J	.1526	.1745	.1757	.1636		
	HPREJ					
J	.1314					

注１）表５－１で（H,HP）に対応する.5322 の意味は以下である。V(H）をファンド H の標本分散として、

$$.5322 = \frac{\mathrm{V}(H) + \mathrm{Cov}(H,P)}{\mathrm{V}(H+P)}$$

$$= \frac{\mathrm{V}(H) + \mathrm{Cov}(H,P)}{\mathrm{V}(H) + \mathrm{V}(P) + 2\mathrm{Cov}(H,P)}$$

これを(H,HP)と書くと

$$.5332 = (H,HP) = 1 - (P,HP)$$

である。H、P で分散－共分散比が著しいケース、つまりファンド H、P を保有したときその変動割合が同一になれば

$$.5 = (H,HP) = (P,HP)$$

である。

Appendix

m=2 で v_1 の近似を考える。

（A. 1）
$$v_1=\frac{\sum_t w_1^2\left(X_{1t}-\bar{X}_1\right)^2+\sum_t w_1 w_2\left(X_{1t}-\bar{X}_1\right)\left(X_{2t}-\bar{X}_2\right)}{\sum_t w_1^2\left(X_{1t}-\bar{X}_1\right)^2+\sum_t w_2^2\left(X_{2t}-\bar{X}_2\right)^2+2\sum_t w_1 w_2\left(X_{1t}-\bar{X}_1\right)\left(X_{2t}-\bar{X}_2\right)}$$

ここで $w_1=1+\varepsilon_1$、$w_2=1+\varepsilon_2$、$\sum_t\left(X_{1t}-\bar{X}_1\right)^2/T=a_1$ などとすると v_1 は

（A. 2）
$$v_1=\frac{\left(1+\varepsilon_1\right)^2 a_1+\left(1+\varepsilon_1\right)\left(1+\varepsilon_2\right)a_{12}}{\left(1+\varepsilon_1\right)^2 a_1+\left(1+\varepsilon_2\right)^2 a_2+2\left(1+\varepsilon_1\right)\left(1+\varepsilon_2\right)a_{12}}$$

と書ける。

いま $\left(1+\varepsilon_1\right)\left(1+\varepsilon_2\right)=1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_2$ だから（A. 2）の分母を D とすると

$$\begin{aligned}D &= a_1+a_2+2a_{12}+\varepsilon_1\left(2a_1+2a_{12}\right)+\varepsilon_2\left(2a_2+2a_{12}\right)\\ &\qquad +2\varepsilon_1\varepsilon_2 a_{12}+\varepsilon_1^2 a_1^2+\varepsilon_2^2 a_2^2\\ &= B_0+B\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2\right)\\ &= B_0\left(1+B_0^{-1}B\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2\right)\right)\end{aligned}$$

となる。ここで $B\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2\right)$ は ε_1、ε_2 について 2 次までのオーダーになっている。D^{-1} は

$$D^{-1}=B_0^{-1}\left\{1+B_0^{-1}B\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2\right)\right\}^{-1}$$

v_1 をコンパクトに書いて

（A. 3）
$$v_1=\frac{A_0+A\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2\right)}{B_0+B\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2\right)}$$

$$A_0=a_1+a_{12}$$

$$A\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2\right)=\left(2\varepsilon_1+\varepsilon_1^2\right)a_1+\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_2\right)a_{12}$$

となる。$\varepsilon_1=0$、$\varepsilon_2=0$ では当然

$$v_1=\frac{A_0}{B_0}$$

であり、

$$v_1=\left\{A_0+A\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2\right)\right\}B_0^{-1}\left\{1+B_0^{-1}B\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2\right)\right\}^{-1}$$

だから、この最後の項をテーラー展開すると

$$\text{(A. 4)}\qquad \left\{1+B_0^{-1}B\right\}^{-1}=1-B_0^{-1}B+\left(B_0^{-1}B\right)^2-\cdots$$

ここで B は ε_1、ε_2 について 2 次のオーダー、B^2 は ε_1、ε_2 について 2 次のオーダーである。

したがって、

$$\text{(A. 5)}\qquad v_1=B_0^{-1}\left(A_0+A\right)\left(1-B_0^{-1}B+B_0^{-2}B^2-\cdots\right)$$
$$=B_0^{-1}\left(A_0-A_0B_0^{-1}B+A_0B_0^{-2}B^2+A-AB_0^{-1}B+AB_0^{-2}B^2+\cdots\right)$$

（A. 5）を 1 次まで採用し、残りの項を無視すると

$$\text{(A. 6)}\qquad v_1=B_0^{-1}\left(A_0-A_0B_0^{-1}B+A\right)$$
$$A_0B_0^{-1}B=A_0B_0^{-1}\left(\varepsilon_1\left(2a_1+2a_{12}\right)+\varepsilon_2\left(2a_2+2a_{12}\right)\right)$$
$$A=2\varepsilon_1a_1+\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)a_{12}$$

から

$$-A_0B_0^{-1}B+A=-\varepsilon_1\left\{\left(2a_1+2a_{12}\right)A_0B_0^{-1}-2a_1-a_{12}\right\}+\varepsilon_2\left\{a_{12}-A_0B_0^{-1}\left(2a_2+2a_{12}\right)\right\}$$

そうして v_1 は

$$\text{(A. 7)}\qquad v_1=B_0^{-1}A_0+B_0^{-1}\left\{-\varepsilon_1\left(\left(2a_1+2a_{12}\right)c_0-2a_1-a_{12}\right)+\varepsilon_2\left(a_{12}-2c_0\left(a_2+a_{12}\right)\right)\right\}$$

ここで

$$a_1=\sum_t\left(X_{1t}-\bar{X}_1\right)^2/T$$
$$a_{12}=\sum_t\left(X_{1t}-\bar{X}_1\right)\left(X_{2t}-\bar{X}_2\right)/T$$

である。

ファンドのふり分け（いまの場合ファンドは 2 種類から成る）を調整するのだから当然 $\varepsilon_1+\varepsilon_2=0$ である。つまり $\varepsilon_1=-\varepsilon_2$ とすると（対称にとる）、v_1 は

$$\text{(A. 8)}\qquad v_1=c_0+B_0^{-1}\left\{-\varepsilon_1\left(\left(2a_1+2a_{12}\right)c_0-2a_1-a_{12}\right)-\varepsilon_1\left(a_{12}-2c_0\left(a_2+a_{12}\right)\right)\right\}$$

ここで $c_0=A_0/B_0$、（A. 8）のカッコの部分は

$$-\varepsilon_1\left\{2c_0\left(a_1+a_{12}\right)-2c_0\left(a_2+a_{12}\right)-2a_1-a_{12}+a_{12}\right\}$$
$$=-\varepsilon_1\left(2c_0\left(a_1-a_2\right)-2a_1\right)$$

計算を続けて v_1 は

(A. 9)
$$v_1 = c_0 - B_0^{-1}\varepsilon_1\left\{2c_0\left(a_1 - a_2\right) - 2a_1\right\}$$
$$= c_0 - 2\varepsilon_1 B_0^{-1}\left\{c_0\left(a_1 - a_2\right) - a_1\right\}$$
$$= c_0\left\{1 - 2\varepsilon_1 B_0^{-1}\left(a_1 - a_2\right)\right\} + 2\varepsilon_1 B_0^{-1} a_1$$

こうして v_1 を ε_1 の１次式で書くことができる。

$$-2\varepsilon_1 B_0^{-1}\left\{c_0\left(a_1 - a_2\right) - a_1\right\}$$

が追加する項である。ここで

$$B_0 = a_1 + a_2 + 2a_{12}$$
$$c_0 = A_0 B_0^{-1}$$
$$A_0 = a_1 + a_{12}$$
$$a_1 = \frac{1}{T}\sum_t \left(X_{1t} - \bar{X}_1\right)^2$$
$$a_2 = \frac{1}{T}\sum_t \left(X_{2t} - \bar{X}_2\right)^2$$
$$a_{12} = \frac{1}{T}\sum_t \left(X_{1t} - \bar{X}_1\right)\left(X_{2t} - \bar{X}_2\right)$$

いま、１、２をそれぞれ H、E のファンドとし、$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ で $\varepsilon_1 = -0.1$ としよう。そうすると v_1 は当然小さくなり、その正確な値は

(A.10)
$$v_1 = \frac{\left(1+\varepsilon_1\right)^2 a_1 + \left(1+\varepsilon_1\right)\left(1+\varepsilon_2\right)a_{12}}{\left(1+\varepsilon_1\right)^2 a_1 + \left(1+\varepsilon_2\right)^2 a_2 + 2\left(1+\varepsilon_1\right)\left(1+\varepsilon_2\right)a_{12}}$$
$$= \frac{\left(1+\varepsilon_1\right)^2 a_1 + \left(1-\varepsilon_1^2\right)a_{12}}{\left(1+\varepsilon_1\right)^2 a_1 + \left(1-\varepsilon_1\right)^2 a_2 + 2\left(1-\varepsilon_1^2\right)a_{12}}$$
$$= \frac{0.9^2 a_1 + 0.99a_{12}}{0.9^2 a_1 + 1.1^2 a_2 + 2\cdot 0.99a_{12}}$$
$$= \frac{0.0077265 + 0.0051024}{0.0077265 + 0.0045556 + 0.0102048}$$
$$= 0.570503$$
$$a_1 = .009539$$
$$a_{12} = .005154$$
$$a_2 = .003765$$

となる。他方 v_1 の近似は以下のようになる。

表４、表５－１より

$$c_0 = .6222$$

$$\begin{aligned} B_0 &= a_1 + a_2 + 2a_{12} \\ &= \mathrm{V}(H) + \mathrm{V}(E) + 2\mathrm{Cov}(H, E) \\ &= 0.023612 \end{aligned}$$

だから（A. 9 ）の近似式にこれらの数値を入れると

(A.11)
$$\begin{aligned} v_1 &= c_0 + 0.2c_0 B_0^{-1}(a_1 - a_2) - 0.2B_0^{-1} a_1 \\ &= .6222 + 0.2(0.023612)^{-1}\{.6222(a_1 - a_2) - a_1\} \\ &= 0.6222 - 0.0503684 \\ &= 0.57183 \end{aligned}$$

となるが、正確な v_1 の値は.57050 であり、２つのくいちがいはわずかである。近似は成功しているのがわかる（(A.11）で $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ のときの v_1 は 0.6222 であり、$\varepsilon_1 = -0.1$ にとり、ファンド H の保有分をへらした場合、v_1 はほぼ 0.0503 だけ下がる点がわかる)。

次にファンド数が 3 種類の場合、ファンド 1 の分散－共分散比は

(A.12)
$$v_1' = A'/B'$$

$$A' = (1+\varepsilon_1)^2 a_1 + (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)a_{12} + (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3)a_{13}$$

$$\begin{aligned} B' = (1+\varepsilon_1)^2 a_1 &+ (1+\varepsilon_2)^2 a_2 + (1+\varepsilon_3)^2 a_3 \\ &+ 2(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)a_{12} \\ &+ 2(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3)a_{13} \\ &+ 2(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)a_{23} \end{aligned}$$

となる。ここで ε_i が小さい場合の v_1' 近似を計算するために

$$\begin{aligned} A' &= a_1 + a_{12} + a_{13} \\ &\quad + 2\varepsilon_1 a_1 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)a_{12} \\ &\quad + (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)a_{13} + \cdots \\ &= A_0 + \varepsilon_1(2a_1 + a_{12} + a_{13}) + \varepsilon_2 a_{12} + \varepsilon_3 a_{13} + \cdots \\ &= A_0 + A(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B' &= a_1 + a_2 + a_3 + 2(a_{12} + a_{13} + a_{23}) \\ &\quad + 2(\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \varepsilon_3 a_3) \\ &\quad + 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)a_{12} \\ &\quad + 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)a_{13} \\ &\quad + 2(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)a_{23} \\ &\quad + \cdots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= B_0 + 2\varepsilon_1(a_1 + a_{12} + a_{13}) \\
&\qquad + 2\varepsilon_2(a_2 + a_{12} + a_{23}) \\
&\qquad + 2\varepsilon_3(a_3 + a_{13} + a_{23}) \\
&= B_0 + B(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)
\end{aligned}
$$

と書いて A'、B' を A_0、B_0 のまわりでテーラー展開すると、 v_1' は

(A.13)
$$
\begin{aligned}
v_1' &= \frac{A_0 + A}{B_0 + B} \\
&= (A_0 + A)(B_0 + B)^{-1} \\
&= B_0^{-1}(A_0 + A)\left(1 + B_0^{-1}B\right)^{-1} \\
&= B_0^{-1}(A_0 + A)\left(1 - B_0^{-1}B + \cdots\quad\right) \\
&= B_0^{-1}\left(A_0 - A_0B_0^{-1}B + A - \cdots\quad\right) \\
&= c_0 - c_0B_0^{-1}B + B_0^{-1}A \\
&= c_0 - B_0^{-1}(c_0B) - A
\end{aligned}
$$

となる。$c_0 = A_0/B_0$。(A.13) の $c_0B - A$ は

(A.14)
$$
\begin{aligned}
c_0B - A = 2c_0\{&\varepsilon_1(a_1 + a_{12} + a_{13}) + \varepsilon_2(a_2 + a_{12} + a_{13}) + \varepsilon_3(a_3 + a_{13} + a_{23})\} \\
&- \varepsilon_1(2a_1 + a_{12} + a_{13}) \\
&- \varepsilon_2a_{12} - \varepsilon_3a_{13}
\end{aligned}
$$

である。例として

1 ： H

2 ： R

3 ： E

で配分を例えば $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 < 0_1$、$\varepsilon_3 = -2\varepsilon_1$ とすると E の変動分は大きくなるはずである。実際、このケースはもとの E の変動部分は小さい。また、変更の制約は $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$ である。計算を続けると、

(A.15)
$$
\begin{aligned}
c_0B - A &= 2c_0\{\varepsilon_1(a_1 + a_{12} + a_{13}) - \varepsilon_1a_{23} + \varepsilon_2(a_2 + a_{12}) - (\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(a_3 + a_{13})\} \\
&\qquad - \varepsilon_1(2a_1 + a_{12} + a_{13}) \\
&\qquad - \varepsilon_2a_{12} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)a_{13} \\
&= 2c_0\{\varepsilon_1(a_1 + a_{12} - a_{23} - a_3) + \varepsilon_2(a_2 + a_{12} - a_3 - a_{13})\} \\
&\qquad - \varepsilon_1(2a_1 + a_{12}) \\
&\qquad - \varepsilon_2(a_{12} - a_{13})
\end{aligned}
$$

ここで $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ であれば、つまりこれは $\left\{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0_1, \varepsilon_1 = \varepsilon_2\right\}$ は $2\varepsilon_1 = \varepsilon_3$ を意味するが、この場合（A.15）は

(A.16)
$$c_0 B - A = 2c_0\left\{\varepsilon_1\left(a_1 + a_2 + 2a_{12} - a_{23} - 2a_3 - a_{13}\right)\right\}$$
$$- \varepsilon_1\left(2a_1 + 2a_{12} - a_{13}\right)$$

となる。

ここで１：H、２：R、３：E で H の変動分は表５－１より

(A.17)
$$c_0 = .38175 = \left(H \middle| HRE\right)$$

また

$$B_0 = \mathrm{V}(H) + \mathrm{V}(R) + \mathrm{V}(E)$$
$$+ 2\mathrm{Cov}(H,R) + 2\mathrm{Cov}(R,E) + 2\mathrm{Cov}(E,H)$$
$$= 0.0615078$$

数値例として $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -0.1$、つまり H の変動分を小さくしたいとしよう。この場合（A.16）の前半部分は

$$\varepsilon_1\left(a_1 + 2a_2 + 2a_{12} - a_{23} - 2a_3 - a_{13}\right)$$
$$= (-0.1)\left\{\mathrm{V}(H) + \mathrm{V}(R) + 2\mathrm{Cov}(H,R) - \mathrm{Cov}(R,E) - 2\mathrm{V}(E) - \mathrm{Cov}(H,E)\right\}$$
$$= (-0.1)\left\{0.0184761\right\}$$

となる。

さらに（A.16）の後半の部分は

$$-\varepsilon_1\left(2a_1 + 2a_{12} - a_{13}\right)$$
$$= (0.1)\left\{2\mathrm{V}(H) + 2\mathrm{Cov}(H,R) - \mathrm{Cov}(H,E)\right\}$$
$$= 0.1\left\{2 \cdot 0.009539 + 2 \cdot 0.008788 - 0.005154\right\}$$
$$= 0.1\left\{0.0315\right\}$$

となる。そうすると $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -0.1$、$\varepsilon_1 = -2\varepsilon_3$ で v_1' の近似は

(A.18)
$$v_1' = c_0 - B_0^{-1}\left(c_0 B - A\right)$$
$$= c_0 - B_0^{-1}\left\{2c_0(-0.1)(0.0184761) + 0.1(0.0315)\right\}$$
$$= c_0 - (0.0615078)^{-1}\left\{-0.2 \cdot 0.38175 \cdot 0.0184761 + 0.1 \cdot 0.0315\right\}$$
$$= 0.38175 - (.0615078)^{-1}\left\{-0.00141065 + 0.00315\right\}$$
$$= 0.38175 - 0.0282785$$
$$= 0.353471$$

と計算できる。$c_0 = 0.38175$ は $\varepsilon_i = 0$ のケースのファンドHの分散－共分散比であり、そうしてファンドH、Rの持ち分を10％へらしてEへ20％移すとHの分散－共分散比は0.35にまで低下したことを（A.18）は示している。その差はほぼ0.028であり、近似によれば差は ε_1、ε_2 の1次式で書くことができる。（この数値例では $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ とした）。

以上の確認のために正確な $v_1'\left(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -0.1, \varepsilon_3 = 0.2\right)$ を計算しておくと、v_1' の分子、分母を d、D と書いて $\left(v_1' = d/D\right)$、

（A.19）
$$d = \left(1+\varepsilon_1\right)^2 a_1 + \left(1+\varepsilon_1\right)\left(1+\varepsilon_2\right) a_{12} + \left(1+\varepsilon_1\right)\left(1+\varepsilon_3\right) a_{13}$$

$$\begin{aligned} D = {} & \left(1+\varepsilon_1\right)^2 a_1 + \left(1+\varepsilon_2\right)^2 a_2 + \left(1+\varepsilon_3\right)^2 a_3 \\ & + 2\left(1+\varepsilon_1\right)\left(1+\varepsilon_2\right) a_{12} + 2\left(1+\varepsilon_1\right)\left(1+\varepsilon_3\right) a_{13} \\ & + 2\left(1+\varepsilon_2\right)\left(1+\varepsilon_3\right) a_{23} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d &= \left(1+\varepsilon_1\right)^2 \left(a_1 + a_{12}\right) + \left(1+\varepsilon_1\right)\left(1+\varepsilon_3\right) a_{13} \\ &= 0.9^2 \left\{ \mathrm{V}\left(H\right) + \mathrm{Cov}\left(H, R\right) \right\} \\ &\qquad + \left(0.9\right)\left(1.2\right) \mathrm{Cov}\left(H, E\right) \\ &= 0.9^2 \left\{ 0.009539 + 0.008788 \right\} \\ &\qquad + \left(0.9\right)\left(1.2\right)\left(0.005154\right) \\ &= 0.0148448 + 0.0055663 = 0.0204111 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \left(1+\varepsilon_1\right)^2 \left(a_1 + a_2 + 2a_{12}\right) \\ &\quad + \left(1+\varepsilon_3\right)^2 a_3 \\ &\quad + 2\left(1+\varepsilon_3\right)\left(1+\varepsilon_1\right)\left(a_{13} + a_{23}\right) \\ &= \left(0.9\right)^2 \left\{ \mathrm{V}\left(H\right) + \mathrm{V}\left(R\right) + 2\mathrm{Cov}\left(H, R\right) \right\} \\ &\qquad + 1.2^2 \mathrm{V}\left(E\right) + 2 \cdot \left(1.2\right)\left(0.9\right)\left(\mathrm{Cov}\left(H, E\right) + \mathrm{Cov}\left(R, E\right)\right) \\ &= 0.81 \left\{ 0.009539 + 2\left(0.008788\right) + 0.009470 \right\} \\ &\qquad + \left(1.2\right)^2 \left(0.003765\right) \\ &\qquad + 2\left(1.2\right)\left(0.9\right)\left(0.005154 + 0.0054249\right) \\ &= 0.0579058 \end{aligned}$$

こうして v_1' の正確な値は（A.19）より

（A.20）
$$\begin{aligned} v_1' &= d/D \\ &= 0.352488 \end{aligned}$$

となる。v_1' の近似は0.35347となっている（(A.18)）。

この場合の E の分散－共分散比を見ておこう。v_3' を$v_3'(\varepsilon_i)$と書いて、正確な $v_1'(\varepsilon_i)$ は

(A.21)
$$v_3'(\varepsilon_i)=\frac{(1+\varepsilon_3)^2 a_3+(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_1)a_{13}+(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_2)a_{23}}{D(\varepsilon_i)}$$

ここで $D(\varepsilon_i)$ はファンド 1、つまり H に関するときと共通である。

$\varepsilon_2=\varepsilon_1=-0.1$、$\varepsilon_3=0.2$ とすると（A.21）の分子は

(A.22)
$$\begin{aligned}d_3'(\varepsilon_i)&=(1.2)\left\{1.2a_3+0.9(a_{13}+a_{23})\right\}\\&=(1.2)\left\{1.2\mathrm{V}(E)+0.9\left(\mathrm{Cov}(H,E)+\mathrm{Cov}(R,E)\right)\right\}\\&=(1.2)\left\{1.2(0.003765)+0.9(0.005154+0.0054249)\right\}\\&=(1.2)\left\{0.004518+0.009521\right\}\\&=0.0168468\end{aligned}$$

そうすると $v_3'(\varepsilon_i)$ は

(A.23)
$$\begin{aligned}v_3'(\varepsilon_i)&=\frac{0.0168468}{0.0579058}\\&=0.2909345\end{aligned}$$

となる。$\varepsilon_1=0$、$\varepsilon_2=0$、$\varepsilon_3=0$ で表 5 － 4 より $v_3'(0)=0.2332$ だから（A.23）の $v_3'(\varepsilon_i)$ は $\varepsilon_3=0.2$ の効果で $v_3'(0)$ より大きくなっているのがわかる。

$v_2'(\varepsilon_i)$ の正確な値は

(A.24)
$$\begin{aligned}v_2'(\varepsilon_i)&=1-v_3'(\varepsilon_i)-v_1'(\varepsilon_i)\\&=1-0.2909345-0.352488\\&=0.3565775\end{aligned}$$

である。

この場合の $v_3'(\varepsilon_i)$ への近似も先と同様に計算することができる。

(A.25)
$$v_3'(\varepsilon_1)=\frac{(1+\varepsilon_3)^2 a_3+(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)a_{13}+(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_1)a_{13}}{D(\varepsilon_i)}$$

$$D(\varepsilon_i)=B_0+B(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$$

$$\begin{aligned}d(\varepsilon_i)&=A_0+2\varepsilon_3 a_3+(\varepsilon_2+\varepsilon_3)a_{23}+(\varepsilon_1+\varepsilon_3)a_{13}+\cdots\\&=A_0+\varepsilon_3(2a_3+a_{23}+a_{13})+\varepsilon_2 a_{23}+\varepsilon_1 a_{13}\cdots\\&=A_0+A(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\end{aligned}$$

$B(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$、$A(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ を B、A と書く。計算を続けて

(A.26)
$$\begin{aligned} v_3'(\varepsilon_i) &= (A_0+A)(B_0+B)^{-1} \\ &= B_0^{-1}(A_0+A)\left(1+B_0^{-1}B\right)^{-1} \\ &= B_0^{-1}(A_0+A)\left(1-B_0^{-1}B\right) \\ &= B_0^{-1}\left(A_0-A_0B_0^{-1}B+A\right) \\ &= B_0^{-1}(A_0-c_0B+A) \\ &= c_0-B_0^{-1}c_0B+B_0^{-1}A \\ &= c_0-B_0^{-1}\{c_0B-A\} \end{aligned}$$

ここで c_0、B、A の数値は H の場合とは異なるが、B_0 については共通である。

(A.27)
$$c_0B-A=2c_0(-0.1)(0.0184761)-\left\{\varepsilon_3(2a_3+a_{23}+a_{13})+\varepsilon_2a_{23}+\varepsilon_1a_{13}\right\}$$

いま、 $\varepsilon_1=\varepsilon_2$、$2\varepsilon_1=-\varepsilon_3$ $\left(\varepsilon_1=\varepsilon_2=-0.1、\varepsilon_3=0.2\right)$ を選ぶと（A.27）の第 2 項は

$$\begin{aligned} &-\left\{-2\varepsilon_1(2a_3+a_{23}+a_{13})+\varepsilon_1(a_{23}+a_{13})\right\} \\ &=\varepsilon_1\{4a_3+2a_{23}+2a_{13}-a_{23}-a_{13}\} \\ &=\varepsilon_1\{4a_3+a_{13}+a_{23}\} \\ &=(-0.1)\left\{4\mathrm{V}(E)+\mathrm{Cov}(H,E)+\mathrm{Cov}(R,E)\right\} \\ &=(-0.1)\left\{0.003765\cdot 4+0.005154+0.0054249\right\} \\ &=(-0.1)\{0.0256384\} \end{aligned}$$

そうして $c_0=0.2932$ から

$$\begin{aligned} c_0B-A &= 0.2332(-0.2)(0.018476)-0.00256384 \\ &=-0.00256384 \end{aligned}$$

最終的に近似は

(A.28)
$$\begin{aligned} v_3'(\varepsilon_i) &= c_0-B_0^{-1}\{c_0B-A\} \\ &= 0.2332+(0.0615078)^{-1}(0.00342556) \\ &= 0.28889 \end{aligned}$$

となる。$v_3'(\varepsilon_i)$ の正確な値は（A.23）から $v_3'(\varepsilon_i)=0.2909345$ であった。

　また $v_1'(\varepsilon_i)$ の近似は 0.353471、近似により $v_2'(\varepsilon_i)$ を計算すると、

(A.29)
$$v_2'(\varepsilon_i)=1-0.353471-0.28889=0.357639$$

となっている。他方、 $v_2'(\varepsilon_i)$ の正確な数値は（A.24）より 0.35658 だから精密値と近似にあまりちがいはない。以上をまとめると表Ａ－１のようになる。

表Ａ－１

	$m=2$	$m=3$		
	v_1	v_1'	v_2'	v_3'
精密な数値	.57050	.35249	.35658	.29093
近　似	.57183	.35347	.35764	.28889

注１） $m=2$ で $\varepsilon_1=-0.1$、$\varepsilon_2=0.1$

２） $m=3$ において $\varepsilon_1=\varepsilon_2=-0.1$、$\varepsilon_3=0.2$

３） $v_1+v_2=1$、$v_1'+v_2'+v_3'=1$

注）論文の訂正については２人のレフェリーに厚くお礼申し上げる。以下留意点を記すと（留意点以外は本文に訂正を加えた)、

１．　問題はファンド間の回帰ではなく、またファンド間に方向はない。複数のファンドを保有した場合、１本のファンド価格の変動が全体の変動に占める割合をいかにとらえるかである。

２．　分散－共分散比のとりあつかいについては大学入試センターから出される資料に数多く見られるが、竹内啓氏によるもののみが入手可能であった。分散－共分散比をファンドに適用した例を私は知らない。例えばマン社のレポートによると、分散－共分散比にふれることなく 1996 年 12 月 18 日～ 2005 年 12 月 31 日間に関して以下のような記述がある。世界株式の収益率（リターン)、標準偏差（s.d.）はそれぞれ 6.5 %、15.0 %、日本株式の収益率、s.d.については 4.4 %、17.0 %、対応する相関係数は 0.53 である（出所：マン IP220 インターナショナル償還時元本確保型ファンド 2、販売用資料、三菱 UFJ 証券、2006 年 6 月)。

３．　データは時系列であるから、大標本のケースで何らかの確率モデルを仮定して問題の系列が単位根を持つか、また見せかけの回帰（spurious regression ：見せかけの相関ではない）になっているかを見るのは意味ある（田中勝人『計量経済学』岩波書店、1998 年、p.191）ただしこの論文では回帰をしているわけではない。また、標本のサイズがきわめて小さいのでここでの議論は記述統計の範囲にとどまる。

４．　クロスセクション、時系列データを問わず見せかけの相関はありえる。レフェリーの１人が指摘するように例えば PCA インド株式オープンと HSBC インドオープンには見せかけの相関があるだろう。しかしそれは問題ではなく、見せかけであってもなくても、ファンドマネージャーにとって複数のファンドを保有した場合、特定のファンドの価格変動割合を知っておくのは、きわめて重要であり、当該ファンドの分散のほかに共分散（見せかけの共分散の場合ももちろ

ん含む）の大きさが問題となってくる。見せかけの相関については、以下を見るとよい。森棟公夫『計量経済学』新世社、2005 年、pp.79-80。

参考文献

［1］竹内啓「大学入試センター資料」mineo。
［2］片岡佑作「配分と評価の統計的方法」『経済経営論叢』第 29 巻、第 3 号、1994 年、pp.16-34。

基準価格、SENSEX30 データ出所

・日本経済新聞、2006 年 4 月 27 日付から 2006 年 7 月 6 日付紙面
・ PCA インドウィークリー、2006 年 5 月 11 日号から 2006 年 7 月 12 日号
・ PCA インド株式オープン、週次レポート、2006 年 8 月 25 日
・ HSBC インドオープン、週報、2006 年 8 月 25 日

An Approximation to Variance-Covariance Ratios in a Fund's Per Share Net Asset Value

Yusaku KATAOKA

Abstract

Let V(*H*) be the variance of a fund's per share net asset value *H* and define the variance-covariance ratio v_1 of *H* to the whole set (*H*,*P*) by v_1=(V(*H*)+Cov(*H*,*P*))/(V(*H*+*P*))where Cov (*H*,*P*) is the covariance of *H* and *P*. Then large values of v_1 suggest that the corresponding fund *H* has due influence on the whole set (*H*,*P*). The purpose of this paper is twofold: first, to compute the variance-covariance ratio v_1 of the fund *H* to the whole set(*H*,*P*) for data on fund, '06.4.27-'06.7.6; second to consider an approximation to v_1 for some different sets (*H*+*ΔH*, *P*+*ΔP*).

Keywords : mutual funds

fund's per share net asset value

variance-covariance ratio

approximation method

Taylor expansio