GPAシステムの統計的性質について

片　岡　佑　作
朴　　　勝　俊

要　　旨

学業成績を評価するためにGPAの制度がもちいられるが、その説明として以下２つの例をあげる。

１）２項試行のケース

$t=1,2$ について成功 (S) 確率が p 、回数 $n(t)$ の２項トライアルを考える。具体的には $T(t,r)$ を個人 t 、科目 r のスコアとし、そのとりうる値は

$$T(t,r)=\begin{cases}4\cdots p\\3\cdots q=1-p,\ \ 0<p<1\end{cases}$$

あるいは

$$X(t,r)=T(t,r)-3=\begin{cases}1\cdots p\\0\cdots q\end{cases}$$

そうして $S(t)=X(t,1)+X(t,2)+,\cdots,+X(t,n(t))$ とする。この場合個人 t のGPA (t) は $3+n(t,4)/n(t)$ となる。ただし、 $n(t,4)$ は $n(t)$ のうちで成功した回数である。以下、$n(1)<n(2)$、ある p について何がおきるかを見る。次の不等式 1)、2) が同時に成立する。

１）$\mathrm{GPA}(1)>\mathrm{GPA}(2)$

２）$\Pr(S(1)>n(1,4))>\Pr(S(2)>n(2,4))$

これは $n(1)\neq n(2)$ のとき、学業成績を精密に評価するにはGPA制度が不適切である点を示している。

２）多項のケース

スコア $X(t,j,i)$ が t,j,i について確率 $p(v)=0.2$ で $v(=0,1,\cdots,4)$ をとるものとする。$t=1,2$ で科目総数 $m(t)$ について

*)　　$$\bar{X}(t,j)=\sum_{i=1}^{m(t)}X(t,j,i)/m(t)$$

を定義すると、公式 *) $\bar{X}(t,j)$ は集団 t に属する個人 j の GPA である。いま $m(1)=30$、$m(2)=35$ とする。そのときシミュレーションと正規近似理論は以下の結果をひき出す。つまり、

$$\Pr\left(\bar{X}(1,j)>2.667\right)=0.0044$$

$$\Pr\left(\bar{X}(2,j)>2.667\right)=0.0016$$

となる。するとこれは学業成績の評価に関して集団 2 が不利益をうけることを意味する。

キーワード：GPA、 2 項分布、多項分布、正規近似、シミュレーション

内容目次：

1　序

学生が履修した科目について定期試験を行い、成績の順位づけをすることを考える。一つの例として科目の score を

			T
score、	0 ～ 60（未満）	：	0
	60 ～ 70	：	1
	70 ～ 80	：	2
	80 ～ 90	：	3
	90 以上	：	4

とし、この $T = 0$ から 4 が変換した score として使われる。簡単のために、すべての科目について対応する単位数を同一としよう。通常成績の順位づけは履修した科目数を m とすると、

（1.1）　$$\mathrm{GPA} = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{4} jm_j$$

$$m = \sum_{j=0}^{4} m_j$$

によって示される。ここで m_j は T が j の科目数である。履修した科目がすべて $T = 4$ であれば GPA も 4 になる。学生が選択する科目間で試験の難易度に差はなく、科目選択の仕方そのものが GPA の計算に影響を及ぼすものではないとしても、学生間で m は異なるのがふつうであるから、その場合においても異なる m で成績を測る指標が（1.1）でよいかを考える。

1）学生間で m にあまりちがいがない場合問題は少ないだろう。

2）m の差が大きく、成績順位を GPA でつける場合、とくに成績上位に関して問題がおきる。

3）簡単のために上位の学生群について $T \leqq 2$ はないものとして

$$\Pr(T = 4) = p, \quad 0 < p < 1$$
$$\Pr(T = 3) = q = 1 - p$$

$T = 4$ の科目数：m_4

$T = 3$ の科目数：$m - m_4$

とすると、m_4 科目以上が $T = 4$ となる確率は

（1.2）　$$\Pr\left(m_4 \text{以上} \middle| m, p\right) = \sum_r {}_mC_r\, p^r q^{m-r}$$

$$\left(\sum_r \text{は } r = m_4 \text{ から } m \text{までの和を示す}\right)$$

である。他方　$\mathrm{GPA}=\frac{1}{m}\sum_{j=3}^{4}(m_j j)=\frac{1}{m}(3m_3+4m_4)$、いま異なる学生 A、B の成績について対応する m、m_4 を $m(A)$、$m_4(A)$、$m(B)$、$m_4(B)$ と書くとき

（1.3）　$m_4(A)/m(A)>m_4(B)/m(B)$

（1.4）　$\Pr\left(m_4(A)\text{以上}\,\middle|\,m(A),\ p\right)\le\Pr\left(m_4(B)\text{以上}\,\middle|\,m(B),\ p\right)$

であれば A の成績を上位におくことに問題はない。ここで（1.4）は（1.2）の確率である。つまり GPA が A と B では A の方が高く、かつ $m(A)$ の科目を履修したとき $T=4$ を $m_4(A)$ 個以上そろえる方が B のケースより困難であれば、通常の順位づけは許される。しかし（1.3)、（1.4）はつねに成立するだろうか。

本稿の第1の目的は m が異なるケースでこうした疑問に答えることである(第1節)。第2としては次のようなものである。つまり最近、朴［5］は成績に関する潜在的能力が同一であるが、m が異なる学生間で混在させて成績順位をつけると、上位には m の小さい学生群の成績が数多くリストアップされる点を簡単なシミュレーションで示した。この計算には適当な仮定がいるが、例えば異なる m で5000名ずつとり、成績上位30名の学生を選ぶと構成比は22：8となった。シミュレーションはもちろん限られた数値にもとづいているので、一般性をもたせる意味で［5］の結果に正規近似による統計理論をあたえようとするのが、第2の目的である(第2節)。

以下、簡単に得られた結果を紹介しておこう。2007年の春で示された3年次生の成績上位の score は最上位で、GPA がほとんど4に近く、8～12位で3点台の前半であった。また履修科目数は1年間でほぼ18以上（これは18以上を順位づけの対象にしていることから来る)。そうするとこれら成績上位の学生の潜在的能力は相当に高く、背後の母集団に関する仮定としては $T\le 2$ を無視して

（1.5）　$\Pr(T=4)=p,\ 0<p<1$

$\Pr(T=3)=q=1-p$

とすることができる。このとき、履修科目数を m、$T=4$ の科目数を m_4 とすると、$\mathrm{GPA}=\left\{4m_4+3(m-m_4)\right\}/m$ となる。ここで m =15, 18、p = 0.3, 0.6 を選ぶと（順位づけの対象として m を小さくするかが一時話題になった）学生 A、B について

（1.6）　$\mathrm{GPA}\left(m_A=15\,\middle|\,m_{4A}\right)>\mathrm{GPA}\left(m_B=18\,\middle|\,m_{4B}\right)$

にもかかわらず

（1.7）　$\Pr\left(T=4\text{が}\ m_{4A}\text{以上}\right)>\Pr\left(T=4\text{が}\ m_{4B}\text{以上}\right)$

となるケースがある。ここで m_A、m_{4A} などは学生 A に対応する変数である。つまり、（1.6)、（1.7）の意味は A、B 間で対応する GPA は B が低いにもかかわらず、この状況を維持するには B のケース $(m_B=18)$ の方がより難しいことを言っている（異なる m で GPA を成績の順位づけにもちいるには注意が必要であり、とくに m が大きい場合、その点のみで成績順位については不利になる)。

第 2 については［ 5 ］の仮定は成績上位の部分を説明するものではない。つまり、学生群全体について背後の母集団の性質を

（ 1 . 8 ）　$T = 0, 1, 2, 3, 4$

をとる確率が一様に 0.2 として、$m = 30, 35$（これはほぼ 2 年間で履修される科目数である）でシミュレーションによる score を［ 5 ］は示した。この論文では（ 1 . 8 ）以外の状況も考え、かつ、$m = 30, 35$ は正規近似が使えるので理論計算を行った。［ 5 ］の結果も含めて全体にわたりきわめて常識的な結果がえられた。つまり、学生群すべてを対象にした場合においても異なる m を混在させて成績の順位づけを行うと、上位には m の小さい GPA が入る。さらに m が小さければ能力以上に GPA が高く出現する確率が大きくなる（小さい m に対して、GPA の標本分布の形状はフラットになり、その両サイドに実現値がおちるケースがよくおきるということである）。

2　成績上位間での順位づけ

いま簡単のために $T \leq 2$ はないものとして、変数を

（ 2 . 1 ）

$$\begin{aligned} X &= 1\cdots,\ T = 4\cdots,\ p \\ &= 0\cdots,\ T = 3\cdots,\ q = 1 - p \end{aligned}$$

と書く。ただし $\Pr(X = 1) = p,\ 0 < p < 1$ である。また、履修科目数が、15 と 18 の場合を考える。かりに 15 科目のケースで 11 科目が $T = 4$、残りの 4 科目が $T = 3$ とするとこの場合の GPA$(\mathrm{GPA}(A))$は

$$\begin{aligned} \mathrm{GPA}(A|15) &= (11 \cdot 4 + 4 \cdot 3)/15 \\ &= 3.73 \end{aligned}$$

となる。$T = 4$ の割合は 11/15 = 0.73、他方、18 科目のケースで 13 科目が $T = 4$、のこりの 5 科目が $T = 3$ とすると $\mathrm{GPA}(A|18) = (13 \cdot 4 + 5 \cdot 3)/18 = 3.72$、$T = 4$ の割合は 13/18 = 0.72、あきらかに

$$\mathrm{GPA}(A|15) = 3.73 > \mathrm{GPA}(A|18) = 3.72$$

で GPA で順位をつけると 15 科目のケースが上位になる。

しかしながら、15 科目をとって 11 科目以上が $T = 4$ と、18 科目をとり、13 科目以上が $T = 4$ では能力をはかる潜在的な確率が例えば $p = 0.6$ のとき、後者のケースはおこりにくい点を以下で示す。また $p = 0.6$ の仮定は 11/15 = 0.73、13/18 = 0.72 だから当該の個人にとって能力以上のケースに該当する。 2 項分布表［ 6 ］から以下のような計算が可能である。

（２.２）

$$
\begin{aligned}
&\Pr\left(11\text{科目以上},\ T=4 \,\middle|\, 15,\ p=0.6\right)\\
&\quad = 1-\Pr\left(10\text{科目以下},\ T=4 \,\middle|\, 15,\ q=0.4\right)\\
&\quad = 1-\Pr\left(5\text{科目以上},\ T=3 \,\middle|\, 15,\ q=0.4\right)\\
&\quad = 1-0.78272\\
&\quad = 0.21728
\end{aligned}
$$

他方、18 科目で 13 科目以上、$T=4$ の場合は

（２.３）

$$
\begin{aligned}
&\Pr\left(13\text{科目以上},\ T=4 \,\middle|\, 18,\ p=0.6\right)\\
&\quad = 1-\Pr\left(12\text{科目以下},\ T=4 \,\middle|\, 18,\ p=0.6\right)\\
&\quad = 1-\Pr\left(6\text{科目以上},\ T=3 \,\middle|\, 18,\ q=0.4\right)\\
&\quad = 1-0.79124\\
&\quad = 0.20876
\end{aligned}
$$

となる。（２.２）（２.３）からすぐ気づくように、これは 15 科目で 11 科目以上が $T=4$ より 18 科目で 13 科目以上、$T=4$ を取得するのがむずかしいことを言っている。

また、$p=0.6$ を維持して、$T=4$ の取得割合がちょうど 2/3 になる場合では（これも能力以上のケースである）

（２.４）

$$
\begin{aligned}
&\Pr\left(10\text{ 科目以上},\ T=4 \,\middle|\, 15,\ p=0.6\right)\\
&\quad = 1-\Pr\left(9\text{科目以下},\ T=4 \,\middle|\, 15,\ p=0.6\right)\\
&\quad = 1-\Pr\left(6\text{科目以上},\ T=3 \,\middle|\, 15,\ q=0.4\right)\\
&\quad = 1-0.59678\\
&\quad = 0.40322
\end{aligned}
$$

他方、

（２.５）

$$
\begin{aligned}
&\Pr\left(12\text{科目以上},\ T=4 \,\middle|\, 18,\ p=0.6\right)\\
&\quad = 1-\Pr\left(11\text{科目以下},\ T=4 \,\middle|\, 18,\ p=0.6\right)\\
&\quad = 1-\Pr\left(7\text{科目以上},\ T=3 \,\middle|\, 18,\ q=0.4\right)\\
&\quad = 1-0.62572\\
&\quad \fallingdotseq 0.37428
\end{aligned}
$$

である。ここにおいても 18 科目で 12 科目以上、$T=4$ をそろえる方がむずかしいことを言っている。

少し一般化すると、履修科目数が m で $T=4$ の個数が m_4 であれば

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{GPA}\left(A\left(m, m_4\right)\right)\\
&\quad=\overline{\mathrm{G}}\left(m, m_4\right)=\left\{4 \cdot m_4+3\left(m-m_4\right)\right\} / m\\
&\qquad\qquad=3+m_4 / m
\end{aligned}
$$

から $\overline{\mathrm{G}}$ は m_4, m に関係なく m_4/m で決まるから m_4/m が一定であれば m_4/m が動いても $\overline{\mathrm{G}}(m, m_4)$ は同一の値をとる。たとえば、$m=15,\ 18$、$m_4=10,\ 12$ のケースで m_4/m はそれぞれ一定だから

$$\overline{\mathrm{G}}(15,\ 10)=\overline{\mathrm{G}}(18,\ 12)$$

である。これは成績順位を標本平均によって測るとき $(m=15,\ m_4=10)$ と $(m=18,\ m_4=12)$ では同位になることを言っている。しかしながら、すでに見たように $m=18$ で $T=4$ となる科目数を $m_4=12$ 以上そろえる方がよりむずかしい（$p=0.6$ だからである）。この点は $\overline{\mathrm{G}}(15,\ 10)$、$\overline{\mathrm{G}}(18,\ 12)$ のときにおいては $\overline{\mathrm{G}}(18,\ 12)$ を $\overline{\mathrm{G}}(15,\ 10)$ よりも上位とすると、成績に関する順位のつけ方（学部規程）に定めてあるのであまり問題ではないが、当該規程にはその理論的理由が示されていない。

以上、分かった点は以下のようである。潜在的な能力がたとえば $p=0.6$ で、観測された成績結果がこれをいく分上まわる場合、

1．異なる $m,\ m_4$ で $\mathrm{GPA}\left(\overline{\mathrm{G}}(m,\ m_4)\right)$ が同一のとき、履修科目数 m が大きいケースを成績の上位とする理由は上に述べたとおりである。

2．$\overline{\mathrm{G}}(m,\ m_4)$ が $\overline{\mathrm{G}}(15,\ 11)$、$\overline{\mathrm{G}}(18,\ 13)$ のとき、$\overline{\mathrm{G}}(15,\ 11)=3.73>3.72=\overline{\mathrm{G}}(18,\ 13)$ で、GPA は $\overline{\mathrm{G}}(15,\ 10)$ が上位にくるが、確率的には履修科目数 18 で、$T=4$ を 13 科目以上そろえる方がより難しい。つまり m が異なるケースで GPA のみにより成績順位をつける方法には問題がある。以上のケースでは m が大きいと順位に関して不利になる。

以上は潜在的能力を決めるパラメタ p を $p=0.6$ としたが、一般に $p>0.5$ のときは

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Pr}\left(m_4 \text{ 科目以上},\ T=4 \mid m,\ p\right)\\
&\quad=1-\operatorname{Pr}\left(\left(m_4-1\right) \text{ 以下},\ T=4 \mid m,\ p\right)\\
&\quad=1-\operatorname{Pr}\left(\left\{m-\left(m_4-1\right)\right\} \text{ 以上},\ T=3 \mid m,\ q\right)\\
&\quad=1-\operatorname{Pr}\left(\left(m-m_4+1\right) \text{ 以上},\ T=3 \mid m,\ q\right)
\end{aligned}
$$

と計算する。$p \leq 0.5$ については、統計数値表［6］を直接読めばよい。

くりかえすと、履修科目数が m、

$T=4$ が m_4 科目

$T=3$ が $m-m_4$ 科目

とすると、

$$\overline{\mathrm{G}}(m, m_4) = \mathrm{GPA} = \left\{4m_4 + 3(m - m_4)\right\}/m$$
$$= 3 + m_4/m$$

そうしてこの場合の標本分散は

$$\left\{4 - (3 + m_4/m)\right\}^2 \cdot \frac{m_4}{m} + \left\{3 - (3 + m_4/m)\right\}^2 \frac{(m - m_4)}{m}$$
$$= (1 - m_4/m)^2 \cdot \frac{m_4}{m} + \left(\frac{m_4}{m}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{m_4}{m}\right)$$
$$= \frac{m_4}{m}\left(1 - \frac{m_4}{m}\right)$$

となる。

同じことであるが、内容を X で書くと、$X = 1$ が m_4 あり、$X = 0$ が $m - m_4$、あるから標本平均は

$$\left\{m_4 + 0(m - m_4)\right\}/m$$
$$= m_4/m$$

標本分散は

$$\left(1 - \frac{m_4}{m}\right)^2 \cdot \frac{m_4}{m} + \left(0 - \frac{m_4}{m}\right)^2 \cdot \frac{m - m_4}{m}$$
$$= \left(1 - \frac{m_4}{m}\right) \cdot \frac{m_4}{m}\left\{1 - \frac{m_4}{m} + \frac{m_4}{m}\right\}$$
$$= \left(1 - \frac{m_4}{m}\right)\frac{m_4}{m}$$

である。

他方、こうしたモデルの理論的な背景は

$$X = 1(T = 4) \cdots p$$
$$X = 0(T = 3) \cdots q = 1 - p$$

で $\mathrm{E}(X) = p,\ \mathrm{V}(X) = pq$ だから m_4/m は $\Pr(X = 1) = p$ の推定値になっている。つまり $\hat{p} = m_4/m$ と書くことができる。

以上の $p = 0.6, 0.3$ のケースで 2 項分布表（[6]）を参考にして以下の結果を得る。

表 2.1　$p = 0.6$

		15 科目		18 科目	
$T = 4$ の個数、	9 以上	(3.600)		(3.500)	
	10	.40322 (3.667)	**	(3.556)	
	11	.21728 (3.733 = (11/15) +3)	*	(3.611)	
	12	.09050 (3.800)		.37428 (3.667)	**)
	13	.02711 (3.867)		.20876 (3.722 = 13/18+3)	*)
	14			.09417 (3.778)	
	15			.03278 (3.833)	

注）数表の左上から 3 番目の 0.21728、3.733 の意味は以下のようである。つまり $\Pr\left(T = 4 \text{ が } 11 \text{ 以上} \,\middle|\, m = 15\right) = 0.21728$ 、他方 GPA は 3.733 になる。* と *）を比較すると、GPA は 18 科目履修で小さくなる。しかしながら

$$\Pr\left(T = 4 \text{ が } 13 \text{ 科目以上} \,\middle|\, m = 18\right) < \Pr\left(T = 4 \text{ が } 11 \text{ 科目以上} \,\middle|\, m = 15\right)$$

となり、$m = 18$ で $T = 4$ を 13 科目以上そろえる方がむずかしい。**、**）については GPA は同一の値をとるが、18 科目履修で $T = 4$ を 12 科目以上そろえる方がよりむずかしい。

表 2.2　$p = 0.3$

	15 科目		18 科目	
3 以上	.87317 (3.200)			
4	.70313 (3.267)		.83545 (3.222)	
5	.48451 (3.333)	**	.66735 (3.278)	
6	.27838 (3.400)	*	.46562 (3.333)	**)
7	.13114 (3.467)	†	.27830 (3.389)	*)
8	.05001 (3.533)		.14068 (3.444)	†)
9			.05959 (3.500)	

注）*、*）については、GPA は 18 科目履修の場合の方が下位にくる。しかしながら、この 18 科目ケースの方が 15 科目履修で $T = 4$ を 6 科目以上をそろえる場合よりも困難である。

†、†）では GPA は 15 科目のケースが高く、また 7 科目以上、$T = 4$ をそろえる方がより難しい（こうしたケースについては疑問はない）。

3　履修科目数が多いケースの正規近似

3 - 1

前節 2 において潜在的な能力を測るパラメタ p が 0.6, 0.3 で、履修科目数 m = 15, 18 を混在させて成績順位をつけると、GPA 基準では順位を正しく測れないケースを見た。

さらに m をいく分大きくしてこうした状況を調べる（ m が大きいとき、 2 項分布については正規近似が使える。この場合、佐和［ 3, p.141］にあるように $mp > 5$, $mq > 5$ の制約が入る。ここで $q = 1 - p$, $0 < p < 1$, p は 2 項確率である。m, p, q の制約については他のものもある。Johnson, Kotz and Kemp ［ 1 ］、木下［ 2 ］、竹内［ 4 ］を見るとよい）。

m を $m = 50$（$m = 50$ は大体 3 年間で履修する科目数である）とし、p(潜在的な能力)、p_0(境界の値)をそれぞれ $p = 0.6$, $p_0 = 0.63$ とすると GPA（3 をずらしたもの）が 0.63 をこえる確率は（能力以上を示すケースになる）

（ 3 . 1 ）

$$
\begin{aligned}
&\Pr\left(\hat{p} > 0.63 \middle| m = 50\right)\\
&= 1 - \Pr\left(\frac{r}{m} \le 0.63 \middle| m = 50\right)\\
&= 1 - \Pr\left(r \le 0.63m\right)\\
&= 1 - \Pr\left(\frac{r + 0.5 - mp}{\sqrt{mpq}} \le \frac{mp_0 + 0.5 - mp}{\sqrt{}}\right)\\
&= 1 - \Pr\left(z \le \frac{50\left(0.03\right) + 0.5}{\sqrt{50 \cdot 0.6 \cdot 0.4}}\right)\\
&= 1 - \Pr\left(z \le 0.57735\right)\\
&= 1 - \left\{1 - \Pr\left(z > 0.57735\right)\right\}\\
&= 0.28096
\end{aligned}
$$

となる。（ 3 . 1 ）で 0.5 の部分は正規近似の補正部分である。m を 60 に大きくすると

（ 3 . 2 ）

$$
\begin{aligned}
&1 - \Pr\left(z \le \frac{60\left(0.03\right) + 0.5}{\sqrt{60 \cdot 0.6 \cdot 0.4}}\right)\\
&= 1 - \Pr\left(z \le 0.60610\right)\\
&= 1 - \left\{1 - \Pr\left(z > 0.60610\right)\right\}\\
&= 0.27093
\end{aligned}
$$

（ 3 . 1 ）、（ 3 . 2 ）から $m = 60$ の方が境界値 0.63 をこえるのがより困難であるのがわかる。

以上は $p = 0.6$ で $p_0 = 0.63$ としたが、p_0 を 0.66（つまり 10 ％以上の能力を示すケース）にあげると $m = 50$ で p_0 をこえる可能性は小さくはなるが、$m = 60$ のケースと比較して減少幅が小さい。計算結果は以下のとおり。

（3.3）
$$\Pr\left(\hat{p} > 0.66 \middle| m = 50\right)$$
$$= 1 - \Pr\left(z \leq \frac{50\left(0.06\right) + 0.5}{\sqrt{50 \cdot 0.6 \cdot 0.4}}\right)$$
$$= 1 - \Pr\left(z \leq 1.01036\right)$$
$$= 1 - \left\{1 - \Pr\left(z > 1.01036\right)\right\}$$
$$= 0.15625$$

$m = 60$ のとき

（3.4）
$$\Pr\left(\hat{p} > 0.66 \middle| m = 60\right)$$
$$= 1 - \Pr\left(z \leq \frac{60\left(0.06\right) + 0.5}{\sqrt{60 \cdot 0.6 \cdot 0.4}}\right)$$
$$= 1 - \Pr\left(z \leq 1.08044\right)$$
$$= 1 - \left\{1 - \Pr\left(z > 1.08044\right)\right\}$$
$$= 0.14007$$

一般に

（3.5）
$$\Pr\left(\hat{p} > p_0 \middle| m\right)$$
$$= 1 - \Pr\left(\hat{p} \leq p_0 \middle| m\right)$$
$$= 1 - \Pr\left(r/m \leq p_0 \middle| m\right)$$
$$= 1 - \Pr\left(r \leq mp_0 \middle| m\right)$$
$$= 1 - \Pr\left(\frac{r + 0.5 - mp}{\sqrt{mpq}} \leq \frac{mp_0 + 0.5 - mp}{\sqrt{mpq}}\right)$$
$$= 1 - \Pr\left(z \leq \frac{m\left(p_0 - p\right) + 0.5}{\sqrt{mpq}}\right)$$
$$= \Pr\left(z > \frac{m\left(p_0 - p\right) + 0.5}{\sqrt{mpq}}\right)$$

で上側が問題だから $p_0 \geq p$ を仮定する。そうすると、$p_0 - p$ が大きければ $\Pr\left(\hat{p} > p_0 \middle| m\right)$ は小さくなる。（3.5）で言えることは

1）乖離の程度が大きくなるほど能力以上に平均得点が上に行く確率は小さくなる。

2）m が大きくなる場合も $\Pr\left(\hat{p} > p_0 \middle| m\right)$ は小さくなる。これは本来の能力がよく示されるケースである。

3）$p_0 - p \geq 0$ を保って p が大きくなると

$$A=\frac{m\left(p_0-p\right)+0.5}{\sqrt{mpq}}\rightarrow\frac{0.5}{\sqrt{mp_0q_0}}=\frac{0.5}{\sqrt{mp_0\left(1-p_0\right)}}$$

ここで補正がなければ分子は 0、また $0.5\left(mp_0\left(1-p_0\right)\right)^{-0.5}$ は m が大きいときは 0、ゆえに $p\rightarrow p_0$ で $\Pr\left(\hat{p}>p_0\middle|m\right)=0.5$ である。つまり p_0-p の大きさが 0 に近ければ m が大きいほど $\Pr\left(\hat{p}>p_0\middle|m\right)$ は 0.5 に近くなる。

3 - 2

次に $m=30, 35$ として朴［5］のケースに内容をそろえて考えよう。(［5］の内容はのちに述べるが、簡単に言うと、適当なモデルのもとで m を混在させて成績をランクすると成績上位の割合が $m=30, 35$ に対して 22 : 8 となり、履修科目数が多いとそれだけの理由で不利になる点があるということである)。統計的値表［6］に見る m の範囲は $m\leq 20$ だからここでも正規近似を適用する。成績の上位部分を考えるから、$p=0.6$, p_0(境界点) $=0.8$ とすると $\left(mp>5,\ mq>5\right)$、GPA (ずらしたもの)が 0.8 をこえる確率は $p=0.6$, $m=30$ のとき

(3.6)
$$\begin{aligned}
&\Pr\left(\hat{p}>0.8\middle|m=30\right)\\
&=1-\Pr\left(\hat{p}\leq 0.8\middle|m=30\right)\\
&=1-\Pr\left(r\leq 0.8m\right)\\
&=1-\Pr\left(\frac{r-mp+0.5}{\sqrt{mpq}}\leq\frac{0.8m-mp+0.5}{\sqrt{mpq}}\right)\\
&=1-\Pr\left(z\leq\frac{0.2m+0.5}{\sqrt{30\cdot 0.6\cdot 0.4}}\right)\\
&=1-\Pr\left(z\leq\frac{6.5}{\sqrt{7.2}}\right)\\
&=1-\Pr\left(z\leq 2.42240\right)\\
&=\Pr\left(z>2.42240\right)\\
&=0.00776
\end{aligned}$$

$m=35$ とすると

(3.7)
$$\begin{aligned}
&\Pr\left(\hat{p}>0.8\middle|m=35\right)\\
&=1-\Pr\left(z\leq\frac{0.2m+0.5}{\sqrt{35\cdot 0.8\cdot 0.4}}\right)\\
&=\Pr\left(z>\frac{7.5}{\sqrt{8.4}}\right)\\
&=\Pr\left(z>2.58774\right)\\
&=0.00479
\end{aligned}$$

ここで確率の比は 78 : 48 となっている。他方、［５］のケースは 22 : 8 だから $p_0 = 0.8$ の設定は低すぎるのがわかる。$p_0 = 0.9$ にあげて同様の確率を計算すると

（３.８）
$$\begin{aligned}
&\Pr\left(\hat{p} > 0.9 \middle| m = 30\right)\\
&= \Pr\left(z > \frac{0.3m + 0.5}{\sqrt{m \cdot 0.6 \cdot 0.4}}\right)\\
&= \Pr\left(z > \frac{9.5}{\sqrt{7.2}}\right)\\
&= \Pr\left(z > 3.54044\right)\\
&= 0.000200
\end{aligned}$$

である。$\Pr\left(z > 3.54044\right)$ の値は［６］によった。$m = 35$ で

（３.９）
$$\begin{aligned}
&\Pr\left(z > \frac{0.3m + 0.5}{\sqrt{m \cdot 0.6 \cdot 0.4}}\right)\\
&= \Pr\left(z > \frac{11}{\sqrt{35 \cdot 0.6 \cdot 0.4}}\right)\\
&= \Pr\left(z > 3.79536\right)\\
&= 0.000072
\end{aligned}$$

（３.８）、（３.９）の比はほぼ 20 : 7 で、これは［５］のシミュレーションによる 22 : 8 とよくあう。つまり［５］の 10000 名のうち上位 30 名となる境界点は 2.667 であるが、この数値はここで展開している $p = 0.6$ としたときの $p_0 = 0.9$ に対応する。ただし確率そのものは［５］とは異なり、はるかに小さい（理由はこれら 2 つのケースで標準偏差が異なるからである。詳しくはのちに述べる）。

次に潜在的な能力を示す p を 0.6 から 0.3 に下げるとどうなるか。$p_0 - p = 0.2$ として $p_0 = 0.5$ を選ぶと

（３.10）
$$\begin{aligned}
&\Pr\left(\hat{p} > 0.5 \middle| m = 30\right)\\
&= 1 - \Pr\left(z \leq \frac{0.5m - mp + 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.3 \cdot 0.7}}\right)\\
&= 1 - \Pr\left(z \leq \frac{0.2m + 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.3 \cdot 0.7}}\right)\\
&= 1 - \Pr\left(z \leq \frac{6.5}{\sqrt{30 \cdot 0.3 \cdot 0.7}}\right)\\
&= 1 - \left\{1 - \Pr\left(z > \frac{6.5}{\sqrt{30 \cdot 0.3 \cdot 0.7}}\right)\right\}\\
&= \Pr\left(z > 2.58966\right)\\
&= 0.00479
\end{aligned}$$

$m = 35$ で

(3.11)
$$\Pr\left(\hat{p} > 0.5 \middle| m = 35\right)$$
$$= \Pr\left(z > \frac{35 \cdot 0.2 + 0.5}{\sqrt{35 \cdot 0.3 \cdot 0.7}}\right)$$
$$= \Pr\left(z > 2.76641\right)$$
$$= 0.00280$$

となる。ここで $p_0 - p_2$, j=1, 2 は同一である。つまり

$$p_0 = 0.8,\ p_1 = 0.6,\ q_1 = 0.4,\ j = 1$$
$$p_0 = 0.5,\ p_2 = 0.3,\ q_2 = 0.7,\ j = 2$$

そうすると（3.10)、(3.11）の分母の部分では $\sqrt{mpq}$ が異なるのみである。

$$\sqrt{mpq} \leq \sqrt{m\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)}$$

だから p が 0.5 をはなれると mpq は小さくなり、$1/\sqrt{mpq}$ は大きくなるから

$$\Pr\left(\hat{p} > 0.5 \middle| (p = 0.6)\right) > \Pr\left(\hat{p} > 0.5 \middle| (p = 0.3)\right)$$

となるのは当然である。以上の結果をまとめると潜在的な能力を 0.2 だけをこえる確率は

(a)　$\Pr\left(\hat{p} > 0.8 \middle| (p = 0.6,\ m = 30)\right) = 0.00776$

(b)　$\Pr\left(\hat{p} > 0.5 \middle| (p = 0.3,\ m = 30)\right) = 0.00479$

(c)　$\Pr\left(\hat{p} > 0.8 \middle| (p = 0.6,\ m = 35)\right) = 0.00479$

(d)　$\Pr\left(\hat{p} > 0.5 \middle| (p = 0.3,\ m = 35)\right) = 0.00280$

ここで異なる p かつ同一の m に対してケース(a)>ケース(b)、ケース(c)>ケース(d)、同一の p かつ異なる m に関してケース(a)>ケース(c)、ケース(b)>ケース(d)、などとなっているのがわかる。

3-3

最近、朴［5］は履修科目数 m が異なる場合、混在させて成績順位をつけると m の小さい GPA が上位で多数を占める点を示した。[5] の内容は次のとおりである。つまり変数 X が $X = 0, 1, 2, 3, 4$ をとる多項分布にしたがい、$\Pr(X = j) = 0.2,\ j = 0,\ \cdots,\ 4$ とする。

このとき、$m = 30, 35$（この m は学生が大体 2 年間でとりうる科目数である）で標本平均

$$\bar{X}_j(m = 30) = \sum_{i=1}^{m} X_{ji}/30,\ j = 1,\ \cdots,\ 5000$$
$$\bar{X}_j(m = 35) = \sum_{i=1}^{m} X_{ji}/35,\ j = 1,\ \cdots,\ 5000$$

5000 : シミュレーション回数

を作り $\bar{X}_j(m=30)$、$\bar{X}_j(m=35)$ の性質を調べた。

$\bar{X}_j(m=30)$ の平均 =1.99668

$s.d.$（標準偏差）=0.25808

$\bar{X}_j(m=35)$ の平均 =1.99721

$s.d.$=0.23910

となり、また 10000 名のうち上位 30 名をリストすると、このうち 22 名は $m = 30$ の方から入った。［5］のリストは次のようである。

表 3.1　上位 30 名の平均点（シミュレーション［5］）

スコア	m
3.167	30
3.086	35
2.943	35
2.933	30
2.914	35
2.900	30
2.833	30
2.800	30
2.800	30
2.800	30
2.800	30
2.767	30
2.743	35
2.743	35
2.733	30
2.733	30
2.733	30
2.714	35
2.700	30
2.700	30
2.700	30
2.700	30
2.700	30
2.700	30
2.686	35
2.686	35
2.667	30
2.667	30
2.667	30
2.667	30

注）表 3.1 は履修科目数 $m = 30, 35$ のとき、それぞれ 5000 名のケースで平均点がどうなるかをシミュレーションで調べたものである。混在させて上位 30 名のスコアをリストしてある。$m = 35$ では 8 名のみが上位 30 位の中に入る。

このモデルはとりうる値が 0, 1, 2, 3, 4 で対応する確率が一様に 0.2 だから、変数を X と書くと

（3.12）
$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= 2 \\ \mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}(X-2)^2 \\ &= \left(2^2+1+1+2^2\right)\cdot 0.2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

したがって、標本平均 $\bar{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$ の期待値などは

（3.13）
$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\bar{X}) &= 2 \\ \mathrm{V}(\bar{X}) &= 2/m \\ \sqrt{\mathrm{V}(\bar{X})} &= \sqrt{2/m} \\ &= 0.25819,\ m = 30 \\ &= 0.23904,\ m = 35 \end{aligned}$$

となる。［5］のシミュレーションの数値は

（3.14）
$$\begin{aligned} &\bar{X} = 1.99668,\ s.d. = 0.25807,\ m = 30 \\ &\bar{X} = 1.99721,\ s.d. = 0.23909,\ m = 35 \end{aligned}$$

だから（3.13）、（3.14）はよく一致しているのがわかる。

くりかえすが成績結果について上から 30 名を並べると、$m = 30$ からは 22 名が入った。$m = 30$ のとき、確率は $^{22}\!/_{5000}$、$m = 30, 35$ で比は 22 : 8 となっている。［5］は一様の確率を仮定するからこの論文においても

$$\begin{aligned} &m = 30,\ p_0 = 0.8 \\ &\Pr(T=4) = p = 0.5,\ \Pr(T=3) = q = 0.5 \end{aligned}$$

を選ぶと $mp > 5,\ mq > 5,\ \hat{p} = r/m$ で

(3.15)
$$\Pr\left(\hat{p} > 0.8 \middle| m = 30\right)$$
$$= 1 - \Pr\left(\hat{p} \le 0.8 \middle| m = 30\right)$$
$$= 1 - \Pr\left(r \le 0.8m \middle| m = 30\right)$$
$$= 1 - \Pr\left(\frac{r - mp + 0.5}{\sqrt{mpq}} \le \frac{0.8m - mp + 0.5}{\sqrt{mpq}}\right)$$
$$= 1 - \Pr\left(z \le \frac{30 \cdot 0.3 + 0.5}{\sqrt{30\left(0.5\right)^2}}\right)$$
$$= 1 - \left\{1 - \Pr\left(z > \frac{9.5}{\sqrt{\ }}\right)\right\}$$
$$= \Pr\left(z > \frac{9.5}{0.5\sqrt{30}}\right)$$
$$= \Pr\left(z > 3.46890\right)$$
$$= 0.000260$$

となる。0.000260 は［6］による。(3.15) の確率は［5］の 0.00440 とは異なる。$m = 35$ で

(3.16)
$$\Pr\left(\hat{p} > 0.8 \middle| m = 35\right)$$
$$= \Pr\left(z > \frac{35 \cdot 0.3 + 0.5}{\sqrt{35\left(0.5\right)^2}}\right)$$
$$= \Pr\left(z > 3.71867\right)$$
$$= 0.0000996$$

この 0.0000996 も［5］の 0.0016 とは異なる。しかし比は 10 : 26 で［5］の 8 : 22 とよく一致している。2 つのモデルで確率そのものがちがうのは分散が異なるからである。つまり、2 項分布で $p = 0.5$ のとき、GPA の期待値、分散は

(3.17)
$$\mathrm{E}\left(\bar{X}\right) = 3.5$$
$$\mathrm{V}\left(\bar{X}\right) = \mathrm{V}\left(\hat{p}\right)$$
$$= pq/m$$
$$= \left\{2 \cdot \left(4 - 3.5\right)^2 \frac{1}{2}\right\} m^{-1}$$
$$= \left(0.5\right)^2 / m$$

であり、他方［5］の $\bar{X}$ の分散は $2/m$ だから問題の上側確率が 2 項モデルでははるかに小さくなるのは当然である。

ところで 2 項のケースで $m = 30$ のとき、上側確率が［5］の 0.0044 になるような横軸の値を探すことを考える。

(3.18)　$\Pr(z > a) = 0.00440$

の a を計算すればよい。ただし $p = 0.5$、書きかえて

(3.19)
$$\Pr\left(z > \frac{30(p_0 - p) + 0.5}{\sqrt{30(0.5)^2}}\right) = 0.00440$$
$$a = \frac{30(p_0 - p) + 0.5}{0.5\sqrt{30}}$$
$$= \frac{30(p_0 - 0.5) + 0.5}{0.5\sqrt{30}}$$

であり、p_0 について解くと

(3.20)
$$p_0 = \frac{0.5\sqrt{30}\,a - 0.5}{30} + 0.5$$
$$= \left\{\frac{\sqrt{30}\,a - 1}{30} + 1\right\} \cdot 0.5$$

ここで a は $a = 2.62$、そうして p_0 は $p_0 = 0.72250$ となる。

$m = 35$ で横軸の値はどうなるだろうか。

(3.21)　$\Pr(z > b) = 0.00160$

としてこれを解くと

(3.22)
$$p_0' = 0.5\left\{\frac{\sqrt{35}\,b - 1}{35} + 1\right\}$$
$b = 2.95$（統計数値表［6］）

から $p_0' = 0.73503$ となってこれはさきの $p_0 = 0.72250$ とあまりちがいはない。

つまり潜在的な能力が $p = 0.5$ のとき $m = 30$ で GPA(ずらしたもの)が 0.72250 をこえる確率は 0.00440、$m = 35$ で 0.73503 をこえる確率は 0.00160 である。

すでに見ているようにわれわれのモデルでは $T \leq 2$ は存在せず、

$$\Pr(T = 4) = p$$
$$\Pr(T = 3) = q = 1 - p$$

である。これは成績上位群の内容をよく示す。

他方、［5］のモデルは履修学生全体を考えるものであり、GPA は低い。また［5］はシミュレーションのみに頼るので補う意味もあって以下この場合の理論を展開しておこう。

以下、正規近似をすることを考える。(めんどうな点もあってここでは補正をしない。またもとの分布が対称だから補正の意味はあまりない。(佐和［3］))。

$m = 30$ で［5］の境界点は 2.667、そうして変数を X と書き、近似確率を計算すると

（3 .23）
$$\Pr\left(X > 2.667 \middle| (m = 30)\right)$$
$$= \Pr\left(\frac{X-2}{\sqrt{2/m}} > \frac{2.667-2}{\sqrt{2/m}}\right)$$
$$= \Pr\left(z > \frac{0.667}{\sqrt{2/30}}\right)$$
$$= \Pr\left(z > 2.58327\right)$$
$$= 0.00494$$

となる。$m = 35$ については

（3 .24）
$$\Pr\left(X > 2.686 \middle| (m = 35)\right)$$
$$= \Pr\left(\frac{X-2}{\sqrt{2/35}} > \frac{0.686}{\sqrt{2/35}}\right)$$
$$= \Pr\left(z > 2.86974\right)$$
$$= 0.0020524$$

ここで正規近似をした場合の比は 49：20、他方［5］の比は 22：8 である。シミュレーションによる分布のより上側では $m = 30$ のとき 2.700 以上は $18/5000 = 0.0036$ 、$m = 35$ で 0.714 以上は $6/5000 = 0.0012$ である。他方、正規近似による上側確率は $m = 30, 35$ に対して

（3 .25）
$$\Pr\left(z > \frac{2.700-2}{\sqrt{2/m}} \middle| (m = 30)\right)$$
$$= \Pr\left(z > \frac{0.7}{\sqrt{2/30}}\right)$$
$$= \Pr\left(z > 2.71108\right)$$
$$= 0.003364$$

（3 .26）
$$\Pr\left(z > \frac{2.714-2}{\sqrt{2/m}} \middle| (m = 35)\right)$$
$$= \Pr\left(z > \frac{0.714}{\sqrt{2/35}}\right)$$
$$= \Pr\left(z > 2.98687\right)$$
$$= 0.0013949$$

となる。以上を整理すると表 3 . 2 のようになる。

表 3.2　シミュレーション［5］と正規近似による上側確率の比較

	$m=30$		$m=35$	
境界点	2.667	2.700	2.686	2.714
シミュレーション［5］	0.00440	0.00360	0.00160	0.00120
正規近似	0.00494	0.00336	0.00205	0.00139

［5］のようなモデルについては様々なものを考えることができる。一般にこの場合の期待値は

(3.27)
$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \sum_{j=1}^{s} x_j p_j,\ \sum_{j=1}^{s} p_j = 1,\ 0 < p_j < 1 \\ &= \mu \\ \mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}(X-\mu)^2 \\ &= \sum_{j=1}^{s} (x_j-\mu)^2 p_j \end{aligned}$$

（ここで x_j はとりうる値を表す）、だから $\bar{X} = m^{-1}\sum_{j=1}^{m} X_j$ のモーメントは

$$\mathrm{E}(\bar{X}) = \mu,\ \mathrm{V}(\bar{X}) = \frac{1}{m}\sum_{j}^{s}(X_j-\mu)^2 p_j$$

である。［5］のケースで $s=5,\ x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2,\ x_4=3,\ x_5=4,\ p_j=0.2,$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\bar{X}) &= \left(\sum_{j=1}^{5} x_j\right)\cdot 0.2 = 2 \\ \mathrm{V}(\bar{X}) &= \sum_{j=1}^{s}(x_j-2)^2\cdot 0.2/m \\ &= 0.2\left\{2^2+1^2\right\}\cdot 2/m \\ &= 2/m \end{aligned}$$

ところで他の例として分布形は対称としても、両端の確率が小さくなるようなもの、例えば

$p_1=0.1,\ p_2=0.2,\ p_3=0.4,\ p_4=0.2,\ p_5=0.1$ を考えると $\mathrm{V}(\bar{X})$ は

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(\bar{X}) &= 2\left\{(0-2)^2\cdot 0.1+(1-2)^2\cdot 0.2\right\}\Big/m \\ &= 2\left\{0.4+0.2\right\}/m \\ &= 1.2/m \end{aligned}$$

となってこのケースの分散はより小さくなる。初等教育機関による点数振り分けについては集団を分布の中央に集中させるものが多い。

　こうした集中するケースでは $m=30, 35$ で上側確率はそれぞれ次のようになる。変数を X' と書くと

(3.28)
$$\Pr\left(X' > 2.667 \middle| m = 30\right)$$
$$= \Pr\left(\frac{X'-2}{\sqrt{1.2/m}} > \frac{0.667}{\sqrt{1.2/30}}\right)$$
$$= \Pr\left(z > 3.33500\right)$$
$$= 0.00042$$

(3.29)
$$\Pr\left(X' > 2.686 \middle| m = 35\right)$$
$$= \Pr\left(\frac{X'-2}{\sqrt{1.2/m}} > \frac{0.686}{\sqrt{1.2/35}}\right)$$
$$= \Pr\left(z > \frac{0.686}{\sqrt{1.2/35}}\right)$$
$$= \Pr\left(z > 3.70482\right)$$
$$= 0.00011$$

$$\Pr\left(X' > 2.667 \middle| m = 35\right)$$
$$= \Pr\left(z > \frac{0.667}{\sqrt{1.2/35}}\right)$$
$$= \Pr\left(z > 3.60221\right)$$
$$= 0.00016$$

以上の結果を整理して表 3.3 に示すことができる。

表 3.3　異なる分布形に対する上例確率

科目数	$m = 30$	$m = 35$	$m = 35$
境界点	2.667	2.667	2.686
$V(\bar{X}) = 2/m$ シミュレーション	0.00440		0.00160
$V(\bar{X}) = 2/m$ 正規近似	0.00494		0.00205
$V(\bar{X}) = 1.2/m$ 正規近似	0.00042	0.00016	0.00011

注）仮定する分布が一様なケース［5］では $m = 30, 35$ で上位 30 位にはそれぞれ 22 名、8 名が入る。しかし想定する分布が $X = 2$ に集中し、$X = 0, 4$ をとる確率が小さいとき、上位 30 位の内容は $m = 30, 35$ で 4 : 1 の割合になる。また、履修学生の潜在的能力が同一であれば、成績順位に関して履修科目数を多くすることは分布が集中するケースでよりいっそう不利になる。

参考文献

［1］Johnson, N.L., S. Kotz and A.W.Kemp Univariate Discrete Distributions, Second Edition, New York : John Wiley, 1992.

［2］木下宗七編『入門統計学』有斐閣､1996 年。

［3］佐和隆光『初等統計解析』新曜社､1974 年。

［4］竹内啓『確率分布と統計解析』日本規格協会､1975 年。

［5］朴勝俊 personal communication, 2007 年､8 月。

［6］統計数値表編集委員会編『統計数値表、コンサイス版』日本規格協会､1977 年。

Some Statistical Properties For Grade Point Averge Systems

Yusaku KATAOKA
Seung-Joon PARK

Abstract

To illustrate use of GPA systems in measurement of academic achievement we next examine two examples.

1) Binomial trial

Consider n(t) binomial trials with success(S) probability p. More specifically let T(t, r) be scores of an individual t associated with a subject r such that

T(t, r)=4 ⋯ p
　　3 ⋯ q=1-p

with 0 < p<1, or

X(t, r)=T(t, r)-3=1 ⋯ p
　　　　　　0 ⋯ q

and

S(t)=X(t, 1)+X(t, 2)+, ⋯, +X(t, n(t)).

Then GPA(t) of the individual t is 3+n(t, 4)/n(t) where n(t, 4) is the number of S's appearing in a sample point. We study what happens to GPA(t) for n(1)<n(2) and some p. The following exact inequalities 1), 2) hold simultaneously, i.e.,

1) GPA(1)>GPA(2)

2) Pr(S(1)>n(1, 4))>Pr(S(2)>n(2, 4)),

which tell us that the GPA systems are irrelevant to rigorous assessment of academic achievement for n(1) $\neq$ n(2).

2) Multinomial trial

Suppose that scores X(t, j, i)can take on v(=0, 1,⋯,4) with probabilities p(v)=0.2 for t, j and i. Defining *) $\bar{X}(t, j)=\sum_{i=1}^{m(t)} X(t, j, i)/m(t)$ for m(t)(the number of subjects) with t=1, 2, formula *) is the GPA of an individual j that belongs to the population t. Let m(1)=30 and m(2)=35. Then an simulation as well

as normal approximation theorem yields the assertions $\Pr(\bar{X}(1, j)>2.667)=0.0044$ and $\Pr(\bar{X}(2, j)>2.667)=0.0016$, which in turn imply that the population 2 suffers an unreasonable loss in measurement of academic achievement.

Keywords : GPA, binomial distribution, multinomial distribution, normal approximation, simulation