

GPA 得点に関する統計的分析

——優秀学生に対する優遇措置と履修科目数との関係について——

朴 勝 俊

要 旨

近年、日本においても大学生の学業成績に関して、厳格な成績評価と学生の主体的な学習意欲の喚起のために GPA (Grade Point Average) 制度を導入する大学が増えている。GPA という量的指標に基づいて成績評価を行っている場合、優・良・可・不可という質的指標に基づくよりも、学生のトータルな順位付けが行いやすい。この指標に基づき、上位学生に対する奨励金の授与やなどの優遇措置をとることも可能である。ただし、この場合、単純な平均に過ぎない GPA だけでなく、履修科目数や単位取得数にも注意せねばならない。

本稿では、個別科目の成績を S、A、B、C、F という 5 つの値をとる離散的確率変数 X (期待値 μ 、分散 σ^2)、GPA を履修科目数 (n 個) の X の平均として、学生の成績を定式化する。中心極限定理に基づけば、GPA は正規分布 $N(\mu, \sigma^2/n)$ に従う。このことから、理論的には、履修科目数が少ないほど分散が大きくなり、偶然にも高い GPA を獲得する可能性が高まる。

また、上記の知見は PC による数値シミュレーションによって確認された。すなわち、優遇措置の要件となる単位取得数下限が低く設定された場合、学生が単位を落とす確率が小さいケースでは、たくさんの科目を履修した学生ほど、一学年全体の上位者集団 (720 人のうちの 10 位、20 位、30 位) の中に占める数が小さくなる。

このような傾向が存在することが知られれば、学生の学習態度・履修態度に対して、好ましくない動機付けを与えるおそれがある。以上の理由から、上位の成績優秀者に対する何らかの報奨制度を GPA 得点に基づいて設定する場合には、その条件となる単位取得数を高めに設定する必要があると考えられる。

キーワード：GPA、優遇措置、履修科目数、中心極限定理、シミュレーション

1. はじめに

(1) 本稿の趣旨

近年、日本においても大学生の学業成績に関して、厳格な成績評価と学生の主体的な学習意欲の喚起のために GPA (Grade Point Average) 制度を導入する大学が増えている。これは、米国で一般に導

入されている成績評価方式であるが、文部科学省でも「学生の卒業時の質の確保」のためにこれを推奨している。

GPA という量的指標に基づいて成績評価を行っている場合、優・良・可・不可という質的指標に基づくよりも、学生のトータルな順位付けが行いやすい。この指標に基づき、上位学生に対する奨励金の授与や、下位学生に対する個別指導や補修の提供、留学対象者の選別や、人数制限された科目に対する優先的履修などの優遇措置をとることが可能となり、このような形で大学の教育制度を合理化することができる。

但し、上位学生に対する奨励を行う場合には、単純な平均に過ぎない GPA だけでなく、履修科目数や単位取得数にも注意せねばならない。なぜなら、本稿に示すように、奨励の要件とする単位取得数が低いほど、「熱心な」学生が上位にくる可能性が小さくなるからである。この点に十分に配慮が行われない場合には、履修単位数が少なく、偶然に高い GPA 得点を実現した学生が優遇されることとなり、悪い動機付けと不公平が生じるおそれがある。

(2) GPA 得点について

GPA 制度においては通常、一つの科目の成績に対し、秀 (S、90 点以上) に 4 点、優 (A、80 点以上) に 3 点、良 (B、70 点以上) に 2 点、可 (C、60 点以上) に 1 点、不可 (しばしば E や F で表記される、60 点未満) に 0 点、という形で点数 (GP; Grade Point) が割り当てられ、半期または通年、あるいは複数年の全履修科目の GP の平均点 (GPA) によって学生の成績を評価する。大学では、可 (C) 以上の成績で単位が認定されるため、例えば卒業単位数だけを見ても総合的成績はよく分からないのに対し、GPA はより良い成績をより重視した総合的な評価を可能とする。GPA の計算式は以下のとおりである：

$$GPA = \frac{4.0 \times S \text{の単位数} + 3.0 \times A \text{の単位数} + 2.0 \times B \text{の単位数} + 1.0 \times C \text{の単位数}}{\text{総履修登録単位数}}$$

このさい、分母の総履修登録単位数では、履修をしたが不合格となった単位も含まれる。GPA の導入前には、履修不合格と不履修はほぼ同じ取扱いを受けており、学生はより多くの科目を履修し、より多くの科目の試験を放棄するインセンティブがあったが、GPA 制度の下ではその点が改められることになる。なお、これに合わせて、学期の途中に履修科目を履修中止する制度を導入したり、留学や他大学との単位互換制度を通じて、具体的な成績が不明のまま単位が認定された科目 (単位認定科目) については、この計算に含めない措置をとっている大学も少なくない。

もちろん、実際には授業や教員によって難度が異なり、成績が示された時点でそのような差異は捨象される。また、優 (A) は可 (C) の 3 倍の価値があるなどという根拠はどこにもない。とはいえ、GPA は学生の成績の良否を客観的な数値として表示するのに簡便であり、同じ目的に用いるもっ

と優れた尺度が存在するわけではない。

(3) GPA と履修科目数の関係についての統計学的示唆

GPA 制度は、大学のさまざまな教育措置（成績上位者の表彰や人数制限科目の割当）に応用することが可能であるが、GPA は平均値に過ぎないので、特に一部の学生に優遇措置を与える場合の尺度として用いる場合には注意が必要となる。端的に言えば、多数の科目を履修した学生は GPA を高めるのが比較的困難であるのに対し、少数の科目を履修した学生は偶然にも高い GPA を達成する可能性が高くなる。もちろん、少数の科目を履修した学生の GPA が低くなる可能性も高いのであるが、優遇措置にまつわる問題点を考える上では、偶然に GPA が高くなる問題点に着目すべきである。

この問題を考える上で、簡単な統計的シミュレーション分析を行う。ここでは、通年または半期の GPA を尺度として、成績上位者（10 人～30 人）を選定し、表彰とともに学費免除や奨励金を与えるような制度を念頭においている。通年または半期の全履修科目の GPA の統計学的特徴を明らかにするために、以下の仮定を導入する。

- ・全ての学生の学力は等しい
- ・学生が履修する全教科の難易度は等しく、その成績は互いに独立である
- ・全ての科目の単位数は等しい

そうすれば、学生が一つの履修科目で獲得する成績（GP）は、5つの値をとる確率変数の離散的確率分布で表現でき（表1）、全履修科目の平均である GPA はその確率変数の算術平均として表現できる。なお、全ての科目の単位数を等しいと仮定しているのは、計算を簡単化するためである。実際には、科目によって1単位、2単位、4単位など単位数の違いが生じるのが普通であるが、ここでは、全ての科目を2単位として考える。従って、1科目＝2単位と換算ができる。

全学生にとっての、すべての個別教科の GP の確率変数（X）は表1のように表現される。X は 0 から 4 の値をとる確率変数であり、ここでは各 GP 得点に対応して添字を付けてある。P_i (i=0...4) は任意の固定された確率（0<P_i<1）であるが、総計は1である：

$$\sum_{i=0}^4 P_i = 1$$

表1：GP の確率変数 X

成績 (得点)	S (≥90)	A (≥80)	B (≥70)	C (≥60)	E (<60)
各 GP 値 (X _i)	X ₀ =4	X ₁ =3	X ₂ =2	X ₃ =1	X ₄ =0
発生確率 (P _i)	P ₄	P ₃	P ₂	P ₁	P ₀

そのとき、この期待値（ μ ）と分散（ σ^2 ）は以下の式で表される：

$$\mu = \sum_{i=0}^4 P_i X_i$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=0}^4 P_i (X_i - \mu)^2$$

ところで、中心極限定理から、確率変数 X の分布の形状とは無関係に、 X の標本平均は正規分布に従うことが知られている。ここでは、 X は表 1 に示した 5 通りの GP 値をとる確率変数である。ある学生が履修した科目数を n とするとき、この学生の GPA は全履修科目の GP の算術平均であるから、以下の式で表される（ただし、 j は履修科目番号（1... j ... n ）を示す）：

$$GPA = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X^j$$

そのさい、 \bar{X} の期待値（ $E(\bar{X})$ ）と分散（ $V(\bar{X})$ ）は、 X の分布の形状によらずに期待値（ μ ）と分散（ σ^2 ）のみから、以下の値をとる。言い換えれば、 \bar{X} は $N(\mu, \sigma^2/n)$ の正規分布に従う（豊田 1991、p.48 および pp.65-66）。

$$E(\bar{X}) = \mu$$

$$V(\bar{X}) = \sigma^2/n$$

数値例として、 X の分布を単純な一様分布と仮定する（表 2）。 X は 0 ～ 4 の整数値をそれぞれ 0.2 の確率で実現する。

表 2：単純な一様分布に従う X

成績 (得点)	S (≥ 90)	A (≥ 80)	B (≥ 70)	C (≥ 60)	E (< 60)
GPA 得点 (X_i)	4	3	2	1	0
発生確率 (P_i)	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

その時、 X の期待値と分散は以下の計算に基づいてそれぞれ 0.2 となる：

$$\mu = \sum_{i=0}^4 P_i X_i = 4 \times 0.2 + 3 \times 0.2 + 2 \times 0.2 + 1 \times 0.2 + 0 \times 0.2 = 2.0$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_{i=0}^4 P_i (X_i - \mu)^2 \\ &= 0.2 \times (4 - 2)^2 + 0.2 \times (3 - 2)^2 + 0.2 \times (2 - 2)^2 + 0.2 \times (1 - 2)^2 + 0.2 \times (0 - 2)^2 = 2 \end{aligned}$$

ここで、学生が 24 科目（48 単位に対応）を履修した場合には、GPA の期待値は 2.0、分散は $2.0 \div 24 \approx 0.833$ となる。また、学生が 18 科目（36 単位に対応）を履修した場合には、GPA の期待値は 2.0、分散は $2.0 \div 18 \approx 0.111$ 、15 科目を履修した場合には GPA の期待値は 2.0、分散は $2.0 \div$

15 \div 0.133 となる。ある期間における学生の GPA に関して、期待値は履修科目数にかかわらず等しいものの、分散は履修科目数が少ないほど大きくなる。つまり、履修科目数が少ない学生群の中には、GPA の極端に高い学生が発生する頻度が高い（もちろん、平均 GPA の低い学生の頻度も高い）と言える。この3つのケースについて、確率密度関数のグラフを描いたものが、図1である。この図から分かるように、科目数が少ないほど裾野の広い分布となる。従って、少数の成績上位者を抽出する上で GPA が用いられる場合、履修科目数の少ない学生のグループから成績上位者が現れる可能性が高くなることが分かる。

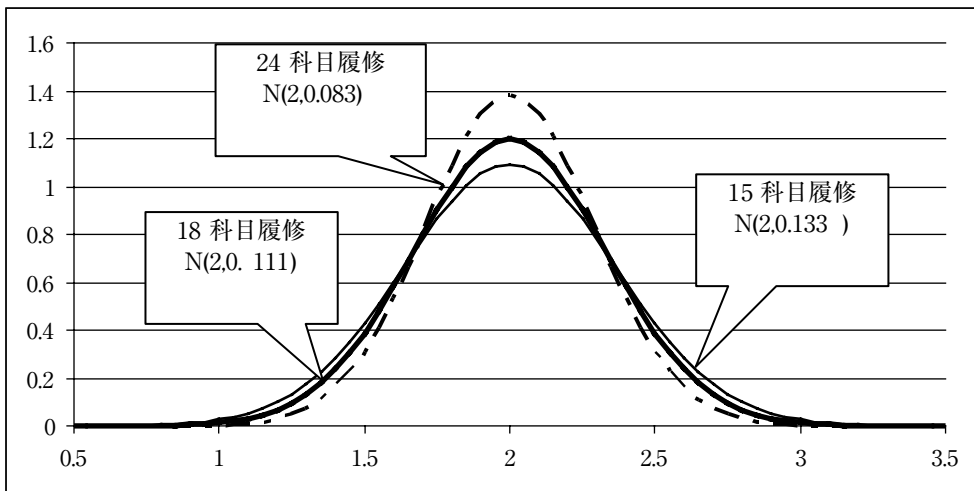


図1：GPA の確率密度関数

（4）数値シミュレーションによる上記の示唆の確認

ここで、上記の示唆を確認するために、具体的な数値シミュレーションを行う。

ある大学の一学年の学生を720人とし、そのうち年間GPAの上位30人（もちろん、上位10人でも20人でもよい）に対して報奨金を与える制度を想定する。その際、常識的に考えても、GPAだけで判断されるならば、履修教科数が極端に少ない学生が、少数の科目に集中した勉強を行うことができるなど有利になるから、報奨金を受ける資格として単位取得数の下限を設定するなどの措置が必要となる。ここでは、例えば、一年間の履修可能数が48単位（半期24単位、年間履修可能科目数は24科目）の大学において、取得単位数の下限が30単位（15科目）に設定された場合と、36単位（18科目）に設定された場合にどのような差異が生じるかを確認したい。

まず、720人の学生を均等に3つのグループに分類する。最初の240人（Aグループ）は年間履修可能上限いっぱいの24科目（1科目2単位として48単位に相当する）を履修し、次の240人（Bグループ）は18科目（36単位をちょうど取得しうる）を受け、最後の240人（Cグループ）は15科目（30単位をちょうど取得しうる）を受講するとしよう。ここでは、グループAを「熱心な」学

生と定義づける。

次に、学生の学力についての仮定として、以下の3つのケースを設定する。これらのケースでは、個別科目の成績（GP）に相当する確率変数 X の分布の形状、および期待値と分散が異なってくる。

ケース1（表3）：S、A、B、C、Eのいずれの成績も、ともに20%の確率で生じうるとする。

ケース2（表4）：Aを獲得する可能性が高く、C、Eの可能性が低い。成績上位を争う学生について妥当な仮定といえる。

ケース3（表5）：Aを獲得する可能性が高く、Eの可能性はない。成績上位を争う学生について、より妥当な仮定といえる。

表3：ケース1の学力仮定（確率分布 X ）

成績 (得点)	S (≥ 90)	A (≥ 80)	B (≥ 70)	C (≥ 60)	E (< 60)
GPA得点 (X_i)	4	3	2	1	0
発生確率 (P_i)	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
累積境界	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8

表4：ケース2の学力仮定（確率分布 X ）

成績 (得点)	S (≥ 90)	A (≥ 80)	B (≥ 70)	C (≥ 60)	E (< 60)
GPA得点 (X_i)	4	3	2	1	0
発生確率 (P_i)	0.2	0.4	0.2	0.1	0.1
累積境界	0.0	0.2	0.6	0.8	0.9

表5：ケース3の学力仮定（確率分布 X ）

成績 (得点)	S (≥ 90)	A (≥ 80)	B (≥ 70)	C (≥ 60)	E (< 60)
GPA得点 (X_i)	4	3	2	1	0
発生確率 (P_i)	0.2	0.4	0.2	0.2	0.0
累積境界	0.0	0.2	0.6	0.8	1.0

ケース1におけるGPの期待値 μ と分散 σ^2 は、前節ですでに計算したものと同一である。

同様に、ケース2におけるGPの期待値 μ と分散 σ^2 は：

$$\mu = \sum_{i=0}^4 P_i X_i = 4 \times 0.2 + 3 \times 0.4 + 2 \times 0.2 + 1 \times 0.1 + 0 \times 0.1 = 2.5$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum_{i=0}^4 P_i (X_i - \mu)^2 \\ &= 0.2 \times (4 - 2.5)^2 + 0.4 \times (3 - 2.5)^2 + 0.2 \times (2 - 2.5)^2 + 0.1 \times (1 - 2.5)^2 + 0.1 \times (0 - 2.5)^2 = 1.45\end{aligned}$$

同様に、ケース 3 における GP の期待値 μ と分散 σ^2 は：

$$\begin{aligned}\mu &= \sum_{i=0}^4 P_i X_i = 4 \times 0.2 + 3 \times 0.4 + 2 \times 0.2 + 1 \times 0.2 + 0 \times 0.0 = 2.6 \\ \sigma^2 &= \sum_{i=0}^4 P_i (X_i - \mu)^2 \\ &= 0.2 \times (4 - 2.6)^2 + 0.4 \times (3 - 2.6)^2 + 0.2 \times (2 - 2.6)^2 + 0.2 \times (1 - 2.6)^2 + 0.0 \times (0 - 2.6)^2 = 1.04\end{aligned}$$

となる。

これに基づいて、具体的なシミュレーション計算を行う。ここでも、全ての学生の学力は等しく、学生が履修する全教科の難易度は等しく、その成績は互いに独立である、という仮定をおく。

計算の手順は以下のとおりである。

1. Microsoft Excel のセルを一つ用いて 0 ～ 1 の範囲の乱数を発生させ、表 3 ～ 表 5 の確率分布に基づいて GP を決定する。具体的には、if 関数を用いて、表 3 ～ 表 5 に示した、成績の累積境界（発生確率を積み上げたもの）を基準として場合分けを行うことによって、小数で表現された成績を 0 ～ 4 の GP 成績に換算することができる。
2. 同じことを、履修教科数だけ横に並んだセルを用いて一挙に行う。そして、履修各科目の GP を、合計して履修科目数で割ることによって平均をとれば、当該学生の年間 GPA を求めることができる。
3. この操作を、 $240 \times 3 = 720$ 人の学生について実施する（Excel 表の上では、縦に 720 行分のセルに、720 人の学生の成績が並ぶことになる）。この成績を用いて、彼らの GPA の分散と標本平均値を計算する（VARP 関数と AVERAGE 関数を利用）。
4. この 720 人の学生の取得単位数と平均 GPA にもとづいて、成績上位者を決める。まずは、取得単位数の多い順にソートする。次に、単位取得数の下限（30 単位または 36 単位）以上の単位を持った学生について平均 GPA に基づいてソートすれば、単位取得数の条件を満たした平均 GPA の高得点者上位 30 人を抽出することができる。

以上の計算を行った結果は以下のとおりである。

表 6 の最上段は、ケース 1 に関して、個別科目の GP 成績（X）の期待値と分散の理論値を示している。これは、上で計算したものである。それに対し、次の段では、グループごとに GPA（ \bar{X} ）の期

期待値と標本平均値および分散（理論値および計算値）を示している（勿論、計算値はシミュレーション計算をやり直すたびに変わる）。 \bar{X} の期待値と分散の理論値はそれぞれ μ および σ^2/n であり、 \bar{X} の期待値は X の期待値に等しいが、 \bar{X} の分散は履修科目数が増えるにつれて小さくなることが分かる。

表 6：ケース 1 の結果

個別科目のGP(X)の期待値(理論値) μ		2.0000					
個別科目のGP(X)の分散(理論値) σ^2		2.0000					
		GPAの期待値 (μ)		GPAの標本平均値		GPAの分散 (理論値 σ^2/n)	
グループA (24科目)		2.000		1.994097		0.083333	
グループB (18科目)		2.000		2.002315		0.111111	
グループC (15科目)		2.000		2.026111		0.133333	
単位取得数下限 30単位 (GPA境界)	グループA (24科目) 人数	グループB (18科目) 人数	グループC (15科目) 人数	単位取得数下限 36単位 (GPA境界)	グループA (24科目) 人数	グループB (18科目) 人数	グループC (15科目) 人数
10位まで (2.611)	4	3	3	10位まで (2.542)	8	2	0
20位まで (2.556)	6	11	2	20位まで (2.375)	18	2	0
30位まで (2.500)	12	14	4	30位まで (2.333)	28	2	0

最下段は、このような条件のもとで、履修科目数に応じて分けられたグループ A、B および C から、成績優秀者（上位 10 位、20 位、または 30 位まで）に入る学生の人数がどのようなになるかを示している。このケースでは、単位取得数下限 30 単位（15 科目）の制限がなされた場合に、10 位以内（GPA は 2.611 以上）に入るのは、グループ A から 4 人、グループ B から 3 人、グループ C から 3 人となる。20 位以内（GPA は 2.556 以上）に入るのは、グループ A から 6 人、グループ B から 11 人、グループ C から 2 人となる。30 位以内（GPA は 2.500 以上）に入るのは、グループ A から 12 人、グループ B から 14 人、グループ C から 4 人となる。従って、30 位以内に入る学生の比率が最も高いのがグループ B であり、次にグループ A であり、グループ A（「熱心な」学生たち）よりもグループ B のほうがやや有利であることが分かる。グループ C の学生が少ないのは、単位を落とす可能性が 20% もあると仮定されているために多くの学生が 30 単位取得という要件を満たせないからだと思われる。

単位取得数の要件を 36 単位まで厳しくすれば、結果は大きく変わる。10 位以内（GPA は 2.542 以上）に入るのは、グループ A から 8 人、グループ B から 2 人、グループ C から 0 人となる。20 位以内（GPA は 2.375 以上）に入るのは、グループ A から 18 人、グループ B から 2 人、グループ C から 0 人となる。30 位以内（GPA は 2.333 以上）に入るのは、グループ A から 28 人、グループ B から 2 人、グループ C から 0 人となる。このように、グループ C の学生は当然ながら単位数の要件を満たせずに上位に入ることが出来ず、グループ B の学生も、ようやく単位数要件を満たして上位に入ることができるのはわずかである。

以上から、単位数要件が厳しくなるほど、十分に多くの科目を履修している学生が有利になること、逆に言えば、単位数の要件が緩ければ、履修科目数の少ない学生が偶然に上位に来る可能性が高まることわかる。図2を見ればこのことがよく理解できる。なお、図は \bar{X} の期待値と分散を、連続的な正規分布に代入することによって描いた、あくまで理論的な図である。真の正規分布に基づけば、グループ1のGPAの場合、 $\bar{X} \sim N(2, 0.833)$ ならば、 $\bar{X} > 2.500$ となる確率は4.16%であるが、表6に示した計算結果によれば、グループAから12人(5%)発生したことがわかる。同様に、GPA>2.5となる比率の理論値は、グループBでは6.68%、グループCでは8.55%であるが、実際1230位以内に入った人数は、単位数要件が効いてそれぞれ14人(5.8%)、4人(1.7%)となっている。

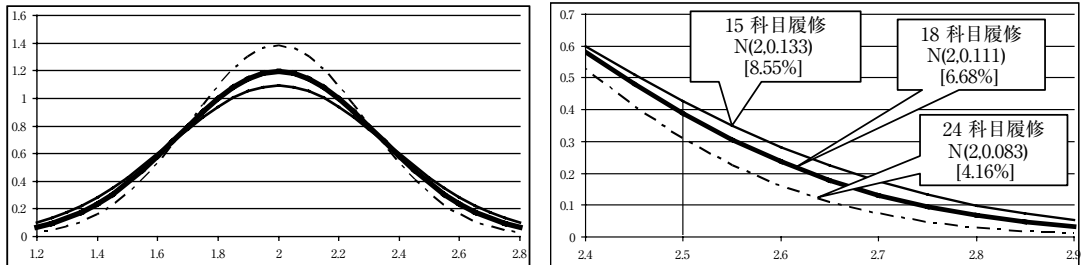


図2：ケース1のGPAの分布。

注：左図は全体を見たもの、右図はGPAが2.4を超える部分について拡大したもの。[]内はGPA>2.500となる比率の理論値を示している。

表7：ケース2の結果

個別科目のGP(X)の期待値(理論値)		2.5000					
個別科目のGP(X)の分散(理論値)		1.4500					
		GPAの期待値 (μ)		GPAの標本平均値		GPAの分散 (理論値 σ^2/n)	
グループA (24科目)		2.5000		2.4975694		0.060417	
グループB (18科目)		2.5000		2.4810185		0.085556	
グループC (15科目)		2.5000		2.4883333		0.096667	
単位取得数下限 30単位 (GPA境界)	グループA 24科目	グループB 18科目	グループC 15科目	単位取得数下限 36単位 (GPA境界)	グループA 24科目	グループB 18科目	グループC 15科目
10位まで (3.067)	0	6	4	10位まで (3.042)	2	8	0
20位まで (3.000)	6	9	5	20位まで (2.944)	9	11	0
30位まで (2.958)	7	14	9	30位まで (2.889)	14	16	0

ところで、ケース1では、学生のGP得点は0、1、2、3、4がいずれも0.2の確率で生じるという一様分布であった。しかし、実際には、上位を争う学生たちは、より高い得点をとる可能性が高く、単位を落とす(不可となる)可能性は低いはずである。よりその実際に近づけた、ケース2およびケース3について、同様の分析を行った結果を示す。

ケース 2 では、 X の期待値は 2.5、分散は 1.45 となる。GPA (\bar{X}) の期待値・分散の理論値および計算値が表の中段に示されている。

最下段を見れば分かるように、このケースでは個別科目が不合格となる確率が 10 % まで低下していることから、履修科目数が少なくても単位の要件を満たす学生が多く発生する。そうすると、「熱心な」グループ A の学生が上位 30 位に入る比率は相当に小さくなる。ここでも、もっとも上位に入る比率が高いのはグループ B の学生であるが、グループ C から相当数の学生が上位に入り込んでくる。例えば、単位取得数下限 30 単位 (15 科目) の制限がなされた場合に、10 位以内 (GPA は 3.067 以上) に入るのは、グループ A から 0 人、グループ B から 6 人、グループ C から 4 人となる。20 位以内 (GPA は 3.000 以上) に入るのは、グループ A から 6 人、グループ B から 9 人、グループ C から 5 人となる。30 位以内 (GPA は 2.958 以上) に入るのは、グループ A から 7 人、グループ B から 14 人、グループ C から 9 人となる。なお、理論的に $GPA > 2.958$ となるのは、順に 3.12%、5.87%、7.04% である。

単位取得数の要件を 36 単位まで厳しくすれば、結果は大きく変わる。10 位以内 (GPA は 3.042 以上) に入るのは、グループ A から 2 人、グループ B から 8 人、グループ C から 0 人となる。20 位以内 (GPA は 2.944 以上) に入るのは、グループ A から 9 人、グループ B から 11 人、グループ C から 0 人となる。30 位以内 (GPA は 2.889 以上) に入るのは、グループ A から 14 人、グループ B から 16 人、グループ C から 0 人となる。結果的に、グループ C の学生は当然ながら単位数の要件を満たせずに上位に入ることが出来ない。しかし、ケース 1 とはことなり、ここで上位 30 人の大部分を占めるのは、グループ A の学生ではなく、グループ B の学生である。つまり、学生の学力が高くなれば、必要最小限の数の科目を履修する学生たちの中から、上位の学生が多く生まれてくることが示唆される。

このことをさらにはっきりさせるのが、ケース 3 の実験である。

ケース 2 では、 X の期待値は 2.5、分散は 1.45 となる。GPA (\bar{X}) の期待値・分散の理論値および計算値が表の中段に示されている。ケース 3 においては、個別科目が不合格となる確率が 0 % と想定されている。この場合には、グループ C の学生も全員、報奨金を受ける前提条件を満たしている。ここで、もっとも上位に入る比率が高いのはグループ C の学生となり、グループ B がそれに続く。「熱心な」グループ A の学生が上位 30 位に入る比率はさらに小さくなる。例えば、単位取得数下限 30 単位 (15 科目) の制限がなされた場合に、10 位以内 (GPA は 3.200 以上) に入るのは、グループ A から 0 人、グループ B から 5 人、グループ C から 5 人となる。20 位以内 (GPA は 3.067 以上) に入るのは、グループ A から 3 人、グループ B から 7 人、グループ C から 6 人となる。30 位以内 (GPA は 3.042 以上) に入るのは、グループ A から 4 人、グループ B から 11 人、グループ C から 15 人となる。なお、理論的に $GPA > 3.042$ となるのは、順に 1.69%、3.30%、4.66% である。

表 8 : ケース 3 の結果

個別科目のGP(X)の期待値(理論値)		2.6000					
個別科目のGP(X)の分散(理論値)		1.0400					
GPAの期待値 (μ)		GPAの標本平均値	GPAの分散 (理論値 σ^2/n)	GPAの分散 (計算値)			
グループA (24科目)		2.6000	2.606250	0.043333	0.042921		
グループB (18科目)		2.6000	2.607407	0.057778	0.060917		
グループC (15科目)		2.6000	2.600278	0.069333	0.071463		
単位取得数下限 30単位 (GPA境界)	グループA 24科目	グループB 18科目	グループC 15科目	単位取得数下限 36単位 (GPA境界)	グループA 24科目	グループB 18科目	グループC 15科目
10位まで (3.200)	0	5	5	10位まで (3.125)	3	7	0
20位まで (3.067)	3	7	6	20位まで (3.000)	6	14	0
30位まで (3.042)	4	11	15	30位まで (2.917)	10	20	0

単位取得数の要件を 36 単位まで厳しくすれば、結果は変わる。10 位以内 (GPA は 3.125 以上) に入るのは、グループ A から 3 人、グループ B から 7 人、グループ C から 0 人となる。20 位以内 (GPA は 3.000 以上) に入るのは、グループ A から 6 人、グループ B から 14 人、グループ C から 0 人となる。30 位以内 (GPA は 2.917 以上) に入るのは、グループ A から 10 人、グループ B から 20 人、グループ C から 0 人となる。結果的に、ケース 2 と同様、グループ C の学生は単位数の要件を満たせずに上位に入ることが出来ない。しかし、ここで上位 30 人の大部分を占めるのは、グループ A の学生ではなくグループ B の学生であり、その比率はケース 2 よりも高い。つまり、学生の学力がより高くなり、単位を落とす可能性が無くなれば、必要最小限の数の科目を履修するグループ B の学生たちが、上位の学生の大部分を占めることが示唆される。

(5) 結論

以上の結果から、以下のようなことが言えよう。

ケース 1 の結果より、個別科目が不合格となる確率が比較的高く設定されている場合 (ケース 1 では 0.2)、必要最小限の単位数をギリギリ獲得できるほどの、少ない科目を履修しているグループは、多くが単位取得数下限の条件を満たすことができないため、上位に入ることが難しい。

ケース 2 およびケース 3 の結果より、どの場合もグループ B の学生が最も多く上位に入っていること、およびケース 3 では単位取得数下限が 30 単位の場合に、グループ C の学生が最も多く上位に入っていることから、個別科目が不合格となる確率が小さく (またはゼロに) 設定されている場合には (いわば、学生たちの学力が高い場合には)、必要最小限の単位数を十分に獲得できる範囲内で、少なめの科目を履修している学生の方が、たくさんの科目を履修した「熱心な」学生たちよりも上位を占める比率が高くなる傾向にあると言える。

これは、個人個人の学生の立場から見れば小さな差異かもしれないが、大学・学部全体で考えればそのように言うことはできない。とりわけ、大学の教育措置として、一部の成績優遇者に金銭的なメリットも含めた優遇制度をとるような場合には、注意せねばならない。例えば、高学年者（四年生など）の中から優秀者を選抜する場合、たとえすでに卒業要件単位を満たしている場合でも、興味をもってたくさんの科目を履修しているような学生が選ばなければならないであろう。そのためには、優遇制度の要件となる履修科目数を多めに設定する必要がある。さもないと、本稿で示したような、履修科目数による有利・不利が存在することとなり、卒業要件単位をほぼ満たした高学年者は、あえて多くの科目を履修しようとはしなくなるであろう。すなわち、単位取得数下限が低く設定された場合、学生が単位を落とす確率が小さいケースでは（これは相対的に「全学生が優秀である」場合と見なすことができる）、たくさんの科目を履修した学生（これらの学生は相対的に「熱心な学生」と見なすことができる）ほど、一学年全体の上位者集団の中に占める数が小さくなるということは、また、そのような傾向が存在するところが知られれば、学生の学習態度・履修態度に対して、好ましくない動機付けを与えるおそれがある。

以上の理由から、上位の成績優秀者に対する何らかの報奨制度を GPA 得点に基づいて設定する場合には、その条件となる単位取得数下限を高めに設定する必要があると考えられる。

参考文献

豊田利久（1991）『基本統計学』東洋経済新報社

Statistical Analysis on Grade Point Average (GPA) The Relationship between Special Treatment on Excellent Students and the Number of Registered Classes

Seung-Joon PARK

Abstract

Recently, more and more universities adopt the GPA (Grade Point Average) System, which is regarded to be strict evaluation system and to motivate students to better choice and learning of subjects. Some educational schemes often accompany the GPA system, such as monetary bonus for excellent (e.g. top 10) students. But we should be careful enough to use the annual or semester's GPA, a mere average value, as a criterion for select the best students.

Our simple statistical analysis has proved: the more the number of registered classes of a group of students, the smaller the probability that some of them are included in the best 10, 20 or 30 students. The reason is that the GPA, average of the individual grade point, is distributed as a normal variable, and the variance becomes smaller and smaller as the number of registered classes increase. Therefore, in order to give an incentive for excellent students, the GPA system must be backed up by additional criteria such as minimum standard of credits or number of registered classes, which should be as high as possible.

Keywords : GPA, bonus and incentive, number of registered classes, central limit theorem, simulation

