従業員の業績とその評価時点間の統計的推測

片　岡　佑　作

目　　次

要　　旨

$S(i,\ j)$ を個人 i、時点 j のスコアとしよう。ただし

$$S(i,\ j) = \begin{cases} 1 & \cdots\cdots \quad p_1 \\ 0 & \cdots\cdots \quad p_2 \\ -1 & \cdots\cdots \quad p_3 \end{cases}$$

$p+1 \leqslant j \leqslant n-1$、$p_1+p_2+p_3 = 1$、$0 < p_i < 1$ である。さらに以下がわかっているものとする。つまり $i = 1$ で

$$S(1,\ 0) = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$$

そうして $1 \leqslant j \leqslant p$ については $S(1,\ j) = 0$、また $i = 2$ で

$$S(2,\ p) = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$$

$0 \leqslant j \leqslant p = 1$ に対して $S(2,\ j) = 0$ である。

このとき $S(i,\ j)$、$j \leqslant p$ が所与で個人 $i(= 1,\ 2)$ の給与の（条件付）上乗せ分 $B(i,\ n)$ は

$$B(i,\ n) = T_i + \textstyle\sum_{j=p+1}^{n-1} (n-j)\ (1+r)^{-j} S_{n-j}^{(i)}$$

$T_1 - T_2\ (>0)$

$= p,\ n,\ (2n-p),\ (n-p)$

> 0

となる。ただし r（>0）は将来給与に関する割引率である。

こうして以下 $S(i,\ j),\ j \leqq p$ があたえられたときの上乗せ差額分 D_n に関する逆転確率（$Pr(D_n < 0)$）を計算する。つまり $D_n = B(1,\ n) - B(2,\ n)$ と書いてそれは

$$Pr(D_n < 0 \mid S(i,\ j),\ j \leqq p)$$

である。ただし、これらの計算は Lindeberg-Feller（Fisz［5］）の中心極限定理を経由する。結果から次の点がわかる。

⑴　p が n に近づくにしたがい $Pr(D_n < 0 \mid S(i,\ j),\ j \leqq p)$ は小さくなる。

⑵　（$S(1,\ i),\ S(2,\ j)$）の相関係数 $\rho = 0,\ 0.1$ について

$$Pr(D_n < 0,\ \rho = 0.1 \mid S(i,\ j),\ j \leqq p) \leqq Pr(D_n < 0,\ \rho = 0 \mid S(i,\ j),\ j \leqq p)$$

である。

⑶　$S(1,\ 0) = 1,\ S(2,\ p) = -1$ のとき $Pr(D_n < 0 \mid S(i,\ j),\ j \leqq p)$ は最小になる。

キーワード：正規分布、中心極限定理、不利益変更、3項選択、割引率

1　序

従業員の業績をある基準について評価し、それによって年間給与総額を変動させるとすると、以下のような統計モデルを考えることができる。

$$(1.1)\quad B_n^{(1)} = n + \textstyle\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)g^j S_j^{(1)}$$
$$B_n^{(2)} = \textstyle\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)g^j S_j^{(2)}$$

ここで⑴、⑵は異なる個人に対応する番号、$B_n^{(i)}$ は給与の上乗せ分を示す（一般性を失うことなく上乗せ幅は1とする)。

また $S_j^{(i)}\ i = 1,\ 2$ は雇用主による従業員への評価関数であり、以下のような確率構造をもつ。

$$S_j^{(i)} = \begin{cases} 1 & \cdots\cdots\ p_1 \\ 0 & \cdots\cdots\ p_2 \\ -1 & \cdots\cdots\ p_1 \end{cases}$$

あきらかに $P_r(S_j^{(i)} = -1) = p_1 > 0$ だからこのモデルは不利益変更につながる（[1]）。さらに $\sum p_j = 1,\ 0 < p_j < 1,\ g = (1+r)^{-1},\ 0 < r < 1$（$r$ は割引率）である。(1.1）の意味は $j = 0$ で個人 (1)、(2) はそれぞれ+1、0 の評価を受け、とくに+1 の場合はその効果が、$j = n-1$ まで持続するというものである。もちろん時点が $j \geqslant 1$ にずれると効果は（$n-j$）の大きさに減る。また j の中途で評価はどうなるかは不明である。こうした前提で朴［ 3 ］、片岡－朴［ 2 ］は時点 0 で (1) が優位に立ったとき、個人 (2) は残りの $n-1$ 期間で給与に関し (1) を追い抜くことができるかと言う問題を考えた。つまり $D_n = B_n^{(1)} - B_n^{(2)}$ として

$$(1.2)\quad Pr(D_n < 0)$$

の値を計算した（[3]、［ 2 ］の内容はそれぞれシミュレーション、理論による近似計算からなる)。結果は次のようなものであった。つまり

1 ）$n = 29$、$r = 0$、$p_1 = 0.03$ で（1.2）の逆転確率はおよそ 17％である。
2 ）r（割引率）を 0.01 程度にするとその確率はもちろんいく分下がる。
3 ）$p_2\downarrow$、$n\downarrow$、$r\uparrow$ で逆転確率は下がる。

ところで（1.1）のようなモデルについては多様な拡張が考えられるが、自然なものの 1 つとして

1′）個人 1)、2)について評価時点がずれると結果はどうなるか。
2′）評価結果には+1、0、−1 があるが、時点のずれとこれらが組み合わされるケースをどう考えるか。

こうした 1′)、2′)を考えるにはモデルを以下のように書くとよい。

$$(1.3)\quad \begin{aligned} B_n^{(1)} &= T_n^{(1)} + \textstyle\sum_{j=p+1}^{n-1}(n-j)g^j S_j^{(1)} \\ B_n^{(2)} &= T_n^{(2)} + \textstyle\sum_{j=p+1}^{n-1}(n-j)g^j S_j^{(2)} \\ & p' \geqslant 0 \end{aligned}$$

ここで時点 0 から p までのあいだに個人 1)、2)は 1 回のみ +1、0、−1 の評価を受け、他の時点では 0（中立）としよう。また時点 $p+1$ 以後は不明とする。さらに一般性を失うことなく個人 1)、2)はそれぞれ時点 0、p で 1、0、−1 の評価を受けるものとしよう。そこで 1、0、−1 に対応して給与

の上乗せ分とその差を表にすると次のようになる。

表 1－1　$T^{(1)}-T^{(2)}$ の値

(1) ＼ (2)		1 $n-p$	0 0	-1 $-(n-p)$
1	n	p	n	$2n-p$
0	0		0	$n-p$
-1	$-n$			$-p$

こうして $B_n^{(1)}-B_n^{(2)}$ について

$$
\begin{aligned}
(1.4)\quad D_n &= B_n^{(1)}-B_n^{(2)} \\
&= T^{(1)}-T^{(2)}+\textstyle\sum_{j=p+1}^{n-1}(n-j)g^j\delta^{(j)},\ \ \delta^{(j)}=S_j^{(1)}-S_j^{(2)} \\
&= T+\textstyle\sum_{j=p+1}^{n-1}(n-j)g^jS^{(j)}
\end{aligned}
$$

から $Pr(D_n<0)$ を見ればよい。$n\to+\infty$ で D_n は正規になるから（Fisz［5］、Rao［6］、片岡 - 朴［2］）

$$z=(D_n-T)\,(Var(D_n))^{-1/2}\sim N(0,\ 1)$$

より逆転確率（近似）は

$$
\begin{aligned}
(1.5)\quad & Pr((D_n-T)\,(Var(D_n))^{-1/2}<-T(Var(D_n))^{-1/2}) \\
&= Pr(z<-T(Var(D_n))^{-1/2}) \\
&= Pr(z\geqq T(Var(D_n))^{-1/2})
\end{aligned}
$$

となる。

　こうして以下 2 で（1.5）の逆転確率を計算してみるのが本稿の主なねらいである。（1.5）から明らかなようにこの確率は T、p、n、$g(=(1+r)^{-1})$ に依存する。言うまでもなくここで得られた結果は［3］のケース（$T=n=29$、$p=0$、$r=0,\ 0.01$）の自然な拡張になっている。続いて 3 において同時点で個人 1)、2)の評価に相関があるケースをとり上げ、何点かのコメントを加えた。

2　展　開

$B_n^{(1)}$ は時点 0 である値（$S_0=1,\ 0,\ -1$）をとり、その後時点 p までは 0、$p+1$ 以降は不明とする。また、$B_n^{(2)}$ は時点 0 から $p-1$ までは 0、p で $S_j^{(2)}=1,\ 0,\ -1$ をとり、$p+1$ 以降は不明とすると、$B_n^{(2)}$ の増分は

$$(2.1)\quad B_n^{(1)} = T_1 + \textstyle\sum_{j=p+1}^{n-1}(n-j)g^j S_j^{(1)},\quad g<1$$
$$B_n^{(2)} = T_2 + \textstyle\sum_{j=p+1}^{n-1}(n-j)g^j S_j^{(2)}$$

と表すことができる。その差は

$$(2.2)\quad D_n = B_n^{(1)} - B_n^{(2)}$$
$$= T_1 - T_2 + \textstyle\sum_{j=p+1}^{n-1}(n-j)g^j(S_j^{(1)} - S_j^{(2)})$$

である。ここで差に関する T_1-T_2 の表を作ると

表 2－1

(1) ＼ (2)	$n-p$	0	$-(n-p)$
n	p	n	$2n-p$
0	$-(n-p)$	0	$(n-p)$
$-n$	$-2n+p$	$-n$	$-p$

となる。くりかえすと表 2－1 から

1）$T_1=n$ のとき、$T_1-T_2=p,\ n,\ 2n-p$

2）$T_1=0$ のとき、$T_1-T_2=-(n-p),\ 0,\ n-p$

3）$T_1=-n$ のとき、$T_1-T_2=-2n+p,\ -n,\ -p$

こうして T_1-T_2 は

$$T_1 - T_2 = c_0 p + c_1 n$$
$$= T^{n,p}(c_0,\ c_1)$$

とすることができる。

そうすると給与の逆転は $T^{n,p} > 0$ で $D_n < 0$ となることを意味する。具体的には $Pr(D_n < 0 \mid T^{n,p} > 0)$ を計算すればよい。実際［2］では $p = 0$、$T_1 - T_2 = n$ のケースを考えた。これは時点 0 で個人 1、2 がそれぞれ＋1、0 の評価を受けるケースである。

D_n の期待値などを以下計算すると

(2.3)　$$D_n = B_n^{(1)} - B_n^{(2)}$$
$$= T^{n,p} + \sum_{j=p+1}^{n-1}(n-j)g^j(S_j^{(1)} - S_j^{(2)})$$

において

(2.4)　$$E(D_n) = T^{n,p}$$
$$Var(D_n) = E(\sum_{j=p+1}^{n-1}(n-j)g^j\delta_j)^2,\ \ \delta_j = S_j^{(1)} - S_j^{(2)}$$
$$= \sum_{j=p+1}^{n-1}(n-j)^2 g^{2j} E(\delta_j^2)$$

となる。ここで $S_j^{(1)},\ S_j^{(2)}$ の相関を許して $E(\delta_j^2)$ を計算すると

(2.5)　$$E(S_j^2) = E(S_j^{(1)2} + S_j^{(2)2} - 2S_j^{(1)}S_j^{(2)})$$
$$= 4p_1 - 2E(S_j^{(1)}S_j^{(2)})$$
$$= 4p_1 - 2\rho(2p_1)$$
$$= 4p_1(1-\rho)$$

となる。ただし時点について δ_j は独立、また ρ は $S_j^{(1)},\ S_j^{(2)}$ の相関係数を表す（相関についてはのちに議論をする)。

そうすると $Var(D_n)$ は

(2.6)　$$Var(D_n) = \sum_{j=p+1}^{n-1}(n-j)^2 g^{2j}\{4p_1(1-\rho)\}$$

となる。こうして逆転の確率は近似的に以下のようになる。

(2.7)　$Pr(D_n < 0 \mid T^{n,p} > 0)$

$$= Pr(D_n - T^{n,p} < -T^{n,p})$$
$$= Pr(z < -T^{n,p}(Var(D_n))^{-1/2})$$
$$= Pr(z > T^{n,p}(Var(D_n))^{-1/2}) \qquad p = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-2$$

ただし、z は $z \sim N(0,\ 1)$ である。

$Var(D_n)$ にあらわれる $\sum_{j=p+1}^{n-1}(n-j)^2 g^{2j}$ の closed form を得るには以下に気づくとよい。

(2.8)　$\sum_{j=p+1}^{n-1} a_j = \sum_{j=0}^{n-1} a_j - \sum_{j=0}^{p} a_j$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} a_j - \sum_{j=1}^{p} a_j, \quad 1 \leqslant p \leqslant n-2$$

$$\sum_{j=p+1}^{n-1} a_j = \sum_{j=1}^{n-1} a_j, \quad p = 0$$

ここで $\sum_*$ を $p+1$ から $n-1$ の和を表すものとして、$p \geqslant 1$ で（森口－宇田川－一松［4］）

(2.9)　$\sum_* g^{2j} = \dfrac{g^2(1-g^{2(n-1)})}{1-g^2} - \dfrac{g^2(1-g^{2p})}{1-g^2}$

$$= \frac{g^2(g^{2p}-g^{2(n-1)})}{1-g^2}$$

$$\sum_* jg^{2j} = \frac{g^2(1-g^{2(n-1)})}{(1-g^2)^2} - \frac{(n-1)g^{2n}}{1-g^2} - \frac{g^2(1-g^{2p})}{(1-g^2)^2} - \frac{pg^{2(p+1)}}{1-g^2} \qquad p \leqslant n-2$$

$$= \frac{g^2(g^{2p}-g^{2(n-1)})}{(1-g^2)^2} + \frac{g^{2(p+1)}(p-(n-1)g^{2(n-(p+1))})}{1-g^2}$$

$$\sum_* j^2 g^{2j} = \frac{g^2(1+g^2)\ (1-g^{2(n-1)})}{(1-g^2)^3} - \frac{2(n-1)g^{2n}}{(1-g^2)^2} - \frac{(n-1)^2 g^{2n}}{1-g^2}$$

$$-\frac{g^2(1+g^2)\ (1-g^{2p})}{(1-g^2)^3} + \frac{2pg^{2(p+1)}}{(1-g^2)^2} + \frac{p^2 g^{2(p+1)}}{1-g^2}$$

$$= \frac{g^2(1+g^2)\ (g^{2p}-g^{2(n-1)})}{(1-g^2)^3} + \frac{2g^{2(p+1)}(p-(n-1)g^{2(n-(p+1))})}{(1-g^2)^2}$$

$$+ \frac{g^{2(p+1)}(p^2-(n-1)^2 g^{2(n-(p+1))})}{1-g^2}$$

そうすると上の 3 項の和は

(2.10)　$\sum_{*}(n^2-2nj+j^2)g^{2j}$

$$
\begin{aligned}
&= n^2g^2(g^{2p}-g^{2(n-1)})\,(1-g^2)^{-1}\\
&\quad -2ng^2(g^{2p}-g^{2(n-1)})\,(1-g^2)^{-2}\\
&\quad -2ng^{2(p+1)}(p-(n-1)g^{2(n-p-1)})\,(1-g^2)^{-1}\\
&\quad +g^2(1+g^2)\,(g^{2p}-g^{2(n-1)})\,(1-g^2)^{-3}\\
&\quad +2g^{2(p+1)}(p-(n-1)g^{2(n-p-1)})\,(1-g^2)^{-2}\\
&\quad +g^{2(p+1)}(p^2-(n-1)^2g^{2(n-p-1)})\,(1-g^2)^{-1}\\
&= g^{2(p+1)}\{n^2-n^2g^{2(n-(p+1))}-2np+2n(n-1)g^{2(n-p-1)}+p^2-(n-1)^2g^{2(n-p-1)}\}\,(1-g^2)^{-1}\\
&\quad +2g^{2(p+1)}\{-n+ng^{2(n-p-1)}+p-(n-1)g^{2(n-p-1)}\}\,(1-g^2)^{-2}\\
&\quad +g^{2(p+1)}(1+g^2)\,\{1-g^{2(n-p-1)}\}\,(1-g^2)^{-3}\\
&= g^{2(p+1)}\{(n-p)^2-((n-1)^2-2n(n-1)+n^2)g^{2(n-p-1)}\}\,(1-g^2)^{-1}\\
&\quad +2g^{2(p+1)}\{p-n+g^{2(n-p-1)}\}\,(1-g^2)^{-2}\\
&\quad +g^{2(p+1)}(1+g^2)\,\{1-g^{2(n-p-1)}\}\,(1-g^2)^{-3}\\
&= g^{2(p+1)}\{(n-p)^2-g^{2(n-p-1)}\}\,(1-g^2)^{-1}\\
&\quad +2g^{2(p+1)}\{-p+n-g^{2(n-p-1)}\}\,(1-g^2)^{-2}\\
&\quad +g^{2(p+1)}(1+g^2)\,\{1-g^{2(n-p-1)}\}\,(1-g^2)^{-3}\\
&= O(n^2)+O(n)+O(1)
\end{aligned}
$$

となる。$p=1$、$n=4$ で

$\sum_{j=p+1}^{n-1}(n-j)^2g^{2j}$ は

$$
\begin{aligned}
&= \textstyle\sum_{j=2}^{3}(4-j)^2g^{2j}\\
&= 4g^4+g^6
\end{aligned}
$$

であるが、closed form をチェックすると

$$
\begin{aligned}
&g^4\{(4-1)^2-g^4\}\,(1-g^2)^{-1}\\
&\quad +2g^4\{(1-4)-g^4\}\,(1-g^2)^{-2}\\
&\quad +g^4(1+g^2)\,\{1-g^4\}\,(1-g^2)^{-3}\\
&\qquad = g^4(1-g^2)^{-1}\,\{9-g^4+2(-3+g^4)\,(1-g^2)^{-1}+(1+g^2)^2\,(1-g^2)^{-1}\}\\
&\qquad = g^4(1-g^2)^{-2}\,\{(9-g^4)\,(1-g^2)+2(-3+g^4)+(1-g^2)^2\}\\
&\qquad = g^4(1-g^2)^{-2}\,\{(g^2-1)\,(g^4+3g^2-4)\}
\end{aligned}
$$

となってこれは $\sum_{j=2}^{3}(4-j)^2 g^{2j}$ に一致する。

もう一度書くと

$$(2.11)\quad \sum_{j=p+1}^{n-1}(n-j)^2 g^{2j}$$

$$= g^{2(p+1)}\sum_{j=1}^{3} b_j(n-p,\ g)$$

$$b_j(n-p,\ g) = a_j\{(n-p)^{j-1} - g^{2(n-p-1)}\}\ (1-g^2)^{j-4}$$

$$a_3 = 1$$

$$a_2 = -2$$

$$a_1 = 1+g^2$$

$$p \geqq 1$$

となる。b_j は $n-p$, g によって決まる。

$p=0$ のケースは以下のようになる。

$$(2.12)\quad \sum_{j=1}^{n-1} g^{2j} = \frac{g^2(1-g^{2(n-1)})}{1-g^2}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} jg^{2j} = \frac{g^2(1-g^{2(n-1)})}{(1-g^2)^2} - \frac{(n-1)g^{2n}}{1-g^2}$$

$$\sum j^2 g^{2j} = \frac{g^2(1+g^2)\ (1-g^{2(n-1)})}{(1-g^2)^3} - \frac{2(n-1)g^{2n}}{(1-g^2)^2} - \frac{(n-1)^2 g^{2n}}{1-g^2}$$

から

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)^2 g^{2j} &= \frac{n^2(1-g^{2(n-1)})g^2}{1-g^2} - \frac{2ng^2(1-g^{2(n-1)})}{(1-g^2)^2} + \frac{2n(n-1)g^{2n}}{1-g^2} \\
&\quad + \frac{g^2(1+g^2)\ (1-g^{2(n-1)})}{(1-g^2)^3} - \frac{2(n-1)g^{2n}}{(1-g^2)^2} - \frac{(n-1)^2 g^{2n}}{1-g^2} \\
&= \{n^2(1-g^{2(n-1)})g^2 + 2n(n-1)g^{2n} - (n-1)^2 g^{2n}\}\ (1-g^2)^{-1} \\
&\quad + \{-2ng^2(1-g^{2(n-1)}) - 2(n-1)g^{2n}\}\ (1-g^2)^{-2} \\
&\quad + g^2(1+g^2)\ (1-g^{2(n-1)})\ (1-g^2)^{-3} \\
&= g^2\{n^2(1-g^{2(n-1)}) + (n-1)\ (n+1)g^{2(n-1)}\}\ (1-g^2)^{-1} \\
&\quad + g^2\{-2n(1-g^{2(n-1)}) - 2(n-1)g^{2(n-1)}\}\ (1-g^2)^{-2}
\end{aligned}$$

$$+g^2(1+g^2)(1-g^{2(n-1)})(1-g^2)^{-3}$$
$$=g^2\{n^2-g^{2(n-1)}\}(1-g^2)^{-1}$$
$$+2g^2\{-n+g^{2(n-1)}\}(1-g^2)^{-2}$$
$$+g^2(1+g^2)(1-g^{2(n-1)})(1-g^2)^{-3}$$

これは形式的には $p \geqslant 1$ のケースの公式と同一である。したがって（2.11）は $p=0$ に拡張することができる。（2.6）の $Var(D_n)$ は

$$(2.13)\quad Var(D_n)=\{4p_1(1-\rho)\}g^{2(p+1)}\textstyle\sum_{j=1}^{3}b_j(n-p,\ g)$$
$$0 \leqslant p \leqslant n-2$$
$$0<g<1$$

となる。

$g=1$ のケースは簡単だが別に考える必要がある。D_n をもう一度書いて

$$(2.14)\quad D_n=B_1^{(1)}-B_n^{(2)}$$
$$=T^{n,p}+\textstyle\sum_{j=p+1}^{n-1}(n-j)\delta_j$$
$$\delta_j=S_j^{(1)}-S_j^{(2)}$$

ここで D_n のモーメントは

$$(2.15)\quad E(D_n)=T^{n,p}$$
$$Var(D_n)=E(\textstyle\sum_{j=p+1}^{n-1}(n-j)\delta_j)^2$$
$$=\textstyle\sum_{j=p+1}^{n-1}(n-j)^2E(\delta_j^2)$$
$$=\{4p_1(1-\rho)\}\textstyle\sum_{j=p+1}^{n-1}(n-j)^2$$

となるが $Var(D_n)$ が $g<1$ のケースとは異なる。（2.15）の和の部分は

$$(2.16)\quad \textstyle\sum_{j=p+1}^{n-1}(n-j)^2$$
$$=(n-(p+1))^2+(n-(p+2))^2+\cdots+2^2+1^2$$
$$=\textstyle\sum_{j=1}^{n-(p+1)}j^2$$

$$= \frac{1}{6}(n-(p+1))(n-p)(2n-2(p+1)+1)$$

$$= \frac{1}{6}(n-p-1)(n-p)(2(n-p)-1)$$

$$0 \leqq p \leqq n-2$$

ゆえに $Var(D_n)$ は

$$(2.17)\quad Var(D_n) = \{4p_1(1-\rho)\}\left\{\frac{1}{6}(n-p-1)(n-p)\{2(n-p)-1\}\right\} = O(n^3)$$

となる。($0 < g < 1$ のとき、$Var(D_n)$ のオーダーは n^2 に下がる)。ここで $Var(D_n)$ を決めるものは $p_1(1-\rho)$、$n-p$ である（n、p は $n-p$ として $Var(D_n)$ に関係する)。

以下、逆転の確率の近似計算結果を表 2－2－1 〜表 2－4－2 にかかげよう（D_n をあらためて $D_{n,p}$ と書く)。

$$Pr(z > T^{n,p}(Var(D_{n,p}))^{-1/2}),\quad g < 1$$
$$z \sim N(0,\ 1)$$

において $Var(D_{n,p})$ は上乗せされる給与差の分散であり、n, p, p_1, ρ, g に依存する。$Var(D_{n,p})$ の公式は（2.13)、(2.15) にある。ただし

p： 個人 2)が個人 1)より遅れて評価を受ける時点、数表 2－2－1 以下では $p = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5$ とした。

ρ： $S_i^{(1)}$, $S_i^{(2)}$ の間の相関係数、つまり $\rho = Cov(S_i^{(1)},\ S_i^{(2)})(Var(S_i^{(1)})\cdot Var(S_i^{(2)}))^{-0.5}$。数表 2－3－1 以下では $\rho = 0,\ 0.1$ を選んだ。

p_1：$Pr(S_i^{(1)} = 1) = Pr(S_i^{(1)} = -1) = p_1 = 0.03$ としてある。

g： 割引率 $r > 0$ から計算されるパラメタ、つまり $g = (1+r)^{-1}$、数表は $r = 0,\ 0.01$ つまり $g = 1$, $g = (1.01)^{-1}$ を指定する。

n： 評価の回数、［２］と同様に $n = 29$ とする。

さらに $T^{n,p} = T^{n,p}(c_0,\ c_1)$ は個人 1、2 の所与の給与差である。$T^{n,p}$ の内容は以下のようになる。

$T^{n,p}(c_0,\ c_1) = c_0p + c_1n$

$T^{n,p}(1,\ 0) = p,\quad p \geqq 0$

$T^{n,p}(0,\ 1) = n$

$T^{n,p}(-1,\ 1) = n - p,\quad n > p$

$T^{n,p}(-1,\ 2) = 2n - p,\quad 2n > p$

さらに $a_{np} = T^{n,p}(c_0,\ c_1)\,(Var(D_{n,p}))^{-0.5}$ を考えると、$n = 29$、$p = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5$ で a_{np} は19通りある（$p = 0$ で $T^{n,p}(0,\ 1) = T^{n,p}(-1,\ 1)$ だから a_{np} は20通りあるわけではない)。

はじめに $Var(D_{n,p} \mid n = 29)$ は以下のようになる。

表2－2－1　$Var(D_{n,p} \mid r = 0.01,\ \rho = 0)$ の数値

$p = 0$	799.8972
1	707.6710
2	623.6044
3	547.1856
5	415.3511

注）$\rho = 0.1$ のとき、$Var(D_{n,p})$ は上の0.9倍になる。

表2－2－2　$Var(D_{n,p} \mid r = 0,\ \rho = 0)$ の数値

$p = 0$	925.68
1	831.60
2	744.12
3	663.00
5	518.88

注）$\rho = 0.1$ で $Var(D_{n,p})$ は上の0.9倍である。

つづいて逆転の確率 $Pr(z > a_{np})$ を以下にあたえる。

表 2－3－1　$Pr(z > a_{np} \mid r = 0.01,\ \rho = 0),\ n = 29$

$T^{n,p}$	p	n	$n-p$	$2n-p$
$p = 0$	0.5	0.152594	0.152594	0.020146
1	0.485007	0.137826	0.146274	0.016069
2	0.468083	0.122761	0.139802	0.012464
3	0.448976	0.107536	0.133178	0.009356
5	0.403098	0.077375	0.119475	0.004653

表 2－3－2　$Pr(z > a_{np} \mid r = 0.01,\ \rho = 0.1),\ n = 29$

$T^{n,p}$	p	n	$n-p$	$2n-p$
$p = 0$	0.5	0.139885	0.139885	0.015322
1	0.484196	0.125256	0.133611	0.011954
2	0.466361	0.110454	0.127207	0.009044
3	0.446232	0.095640	0.120676	0.006598
5	0.397969	0.066817	0.107245	0.003060

表 2－4－1　$Pr(z > a_{np} \mid r = 0,\ \rho = 0),\ n = 29$

$T^{n,p}$	p	n	$n-p$	$2n-p$
$p = 0$	0.5	0.170254	0.170254	0.028304
1	0.486169	0.157295	0.165784	0.024044
2	0.470777	0.143867	0.161139	0.020041
3	0.453624	0.130026	0.156306	0.016339
5	0.413130	0.101490	0.146032	0.009990

表 2－4－2　$Pr(z > a_{np} \mid r = 0,\ \rho = 0.1),\ n = 29$

$T^{n,p}$	p	n	$n-p$	$2n-p$
$p = 0$	0.5	0.157515	0.157515	0.022245
1	0.485420	0.144565	0.153040	0.018602
2	0.469198	0.131227	0.148398	0.015234
3	0.451127	0.117576	0.143579	0.012175
5	0.408511	0.089803	0.133371	0.007092

計算結果より以下の点がわかる。

1）給与差 $D_{n,p}$ の分散は時点 $p \geqslant 0$ が導入されると当然小さくなる。したがって p が大きくなるとき逆転確率も小さくなる。

2）以上の表2－3－1、表2－4－1で $p=0$、$\rho=0$、$r=0.01$、$r=0$ のときの逆転確率はもちろん［2］にあたえた結果と一致する。

3）$g<1$、$\rho=0.1$（表2－3－2）で逆転確率は他のケースより小さくなる。

4）$T^{n,p}=p$ は評価時点はずれるとしても個人1)、2）が＋1の評価を受けることを意味するが、このケースで逆転可能性は高まる。とくに $p=0$ であれば逆転確率はもちろん0.5である。

5）個人1)、2）が時点0、p でそれぞれ＋1、－1の評価を受けるケースにおいて逆転確率はもっとも小さくなる。とくに $p=5$ でそれは以下のようになっている

$\rho=0,\quad g=1\qquad 0.00999$

$\rho=0,\quad g<0\qquad 0.00465$

$\rho=0.1,\quad g=1\qquad 0.00709$

$\rho=0.1,\quad g<0\qquad 0.00306$

くり返すがあきらかにこれらのケースで逆転の可能性はほぼない。

6）個人1)、2）が時点0、p でそれぞれ0、－1の評価を受けるケースの逆転可能性を議論することは意味ある。もし $p=0$ であればこれは個人1)、2）がともに0時点で＋1、0の評価を受けるケースに等しい。例えば表2－3－1から表2－4－2において $p=0$ のとき n、$n-p$ に対応する第1行目の確率は当然すべて等しい。

7）ここで取り上げたモデルとは別に給与に関して初期に劣位に立った従業員がのちに逆転できる可能性を高めるにはどうするか。1つの考え方としては、優位の効果、つまり（1.1）で言えば

$$B_n^{(1)}=n+\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)g^jS_j^{(1)}$$

とするとき、この第1項の n に代えてより小さい $cn(1>c>0)$ とすることである。また、初期の優位の効果を中途で完全に遮断するのもよい。後者の場合、モデルはより複雑なものになる（この7）はレフェリーの指示によってのちに書き加えた）。

3　相関について

ここで $S^{(1)}$，$S^{(2)}$ の相関を考える。表3−1は $S^{(1)}$，$S^{(2)}$ の確率分布を示す。

表3−1

$S^{(1)}$ \ $S^{(2)}$	1	0	−1	
1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_1
0	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_2
−1	p_{31}	p_{32}	p_{33}	p_3
	p_1	p_2	p_3	1

とすると表3−1から（確率分布をすべて対称にとる）

$$(3.1)\quad Cov(S^{(1)},\ S^{(2)}) = E(S^{(1)}S^{(2)}) = p_{11}+p_{13}+p_{31}+p_{33} = 2(p_{11}-p_{13})$$

ここで $p_{ij}=p_{ji}$、$p_{11}=p_{33}$ と仮定した。さらに $Var(S^{(1)}) = Var(S^{(2)})$ とすると

$$(3.2)\quad Cov(S^{(1)},\ S^{(2)}) = \rho Var(S^{(1)}) = \rho(2p_1)$$

$$Pr(S^{(1)}=1,\ S^{(2)}=1) = p_{11}$$

$$(= p_1^2,\ (S^{(1)},\ S^{(2)}\text{ が独立であれば}))$$

だから ρ を p_{ij}、p_i で書くと

$$(3.3)\quad \rho = \frac{2(p_{11}-p_{13})}{Var(S^{(1)})} = 2(p_{11}-p_{13})/(2p_1) = (p_{11}-p_{13})/p_1$$

ここで $S^{(1)}$，$S^{(2)}$ が独立のとき $\rho=0$ である。なぜなら

$$\rho = \frac{p_1^2 - p_1 p_3}{p_1} = 0 \qquad (p_1 = p_3)$$

こうして p_{ij}、p_1 に制限をかけても ρ を簡単に表現することができないことがわかる。したがって $Pr(D_n < 0 \mid T^{n,p} > 0)$ を数値計算するには ρ を直接指定するのがよい。

注

論文を書き上げる過程で田中寧、朴勝俊、斉藤卓爾（経済学部）の 3 名にお教えを受けた。また、レフェリーの 1 人からもコメントが寄せられた。ここに厚くお礼申し上げる。

参考文献

［1］ 荒木尚志－菅野和夫－山川隆一『詳説労働契約法』弘文堂、2008 年。
［2］ 片岡佑作－朴勝俊「従業員の業績評価に関する統計的推測」『京都産業大学論集』社会科学系列第 27 号、2010 年、pp. 43–62。
［3］ 朴勝俊「単年度業績評価を基本給に反映させてはならない統計学的理由」Discussion Paper Series No. 2009–04、京都産業大学大学院経済学研究科、2009 年 6 月。
［4］ 森口繁一－宇田川銈久－一松信『数学公式Ⅱ、── 級数・フーリエ解析 ──』岩波書店、1972 年。
［5］ Fisz, M., Probability Theory and Mathematical Statistics, 3rd Edition, Wiley, New York, 1963.
［6］ Rao, C.R., Linear Statistical Inference and Its Applications, Wiley, New York, 1965.

Some Statistical Inference on a Relationship between Employee's Performance and its Evaluation Point

Yusaku KATAOKA

Abstract

Let $S(i,\ j)$ be scores of an individual i associated with $p+1 \leqslant j \leqslant n-1$ such that $Pr(S(i,\ j)=1)=p(1)$, $Pr(S(i,\ j)=0)=p(2)$, $Pr(S(i,\ j)=-1)=p(3)$ with $p(1)+p(2)+p(3)=1$ and $0<p(i)<1$. Moreover, we have $S(1,\ 0)=1,\ 0,\ -1$; $S(1,\ j)=0$ for $1 \leqslant j \leqslant p$ and $S(2,\ p)=1,\ 0,\ -1$; $S(2,\ j)=0$ for $0 \leqslant j \leqslant p-1$, respectively. Then conditional increments $B(i,\ n)$ of the salary of individual i on $S(i,\ j)$ for $j \leqslant p$ are written by

$$B(i,\ n)=T(i)+\textstyle\sum_{j=p+1}^{n-1}(n-j)\ (1/(1+r))^{j}S(i,\ n-j)$$
$$(T(1)-T(2))=p,\ n,\ (2n-p),\ (n-p)$$

for $i=1,2$ where $r(>0)$ is rate of discount. We shall now compute the conditional probabilities on $S(i,\ j), j \leqslant p$

$$Pr(D(n)=B(1,\ n)-B(2,\ n)<0\mid S(i,\ j),\ j \leqslant p)$$

via the central limit theorem of Lindeberg-Feller (see Fisz [5]) for $T(1)-T(2)(>0)$. In particular it follows from these results that

(1) as $p \to n$, $Pr(D(n)<0\mid S(i,\ j),\ j \leqslant p)$ is small.
(2) for correlation coefficient $\rho(=0, 0.1)$ of $(S(1,\ j),\ S(2,\ j))$, we have
$Pr(D(n)<0,\ \rho=0.1\mid S(i,\ j),\ j \leqslant p) \leqslant Pr(D(n)<0,\ \rho=0\mid S(i,\ j),\ j \leqslant p)$
(3) for $S(1,\ 0)=1$ and $S(2,\ p)=-1$, $Pr(D(n)<0\mid S(i,\ j),\ j \leqslant p)$ is minimal.

Keywords : normal distribution, central limit theorem, disadvantageous change, trinary choice, rate of discount