弧弾力性のシミュレーション分析
～離散と連続の問題の一例として

山　田　勝　裕

要　　旨

弧弾力性は、始点、終点をもち、ベースの取り方によって弾力性値は異なるが、どの方式の弧弾力性値も終点を始点に近づけると、同じ点弾力性値に近づく。しかしながら、伝統的弾力性の定義を満足する弧弾力性は、対数方式、Max 方式、Min 方式、加重方式であり、始点方式、終点方式、偽加重方式は満足しない。また、$0 < \eta < 1$ のケースでは、弾力性値は、Min 方式の弾力性値≦加重方式の弾力性値≦Max 方式の弾力性値の順で、Min 方式の弾力性値＜ Max 方式の弾力性値であり、$\eta > 1$ のケースでは、Min 方式の弾力性値≧加重方式の弾力性値≧ Max 方式の弾力性値の順で、Min 方式の弾力性値＞ Max 方式の弾力性値である。筆者は図解が役立つ理由から、Min 方式を推奨する。

キーワード：弧弾力性、点弾力性、シミュレーション、Min 方式、離散と連続

§1. 始めに

＜弧弾力性＞をグーグルの検索エンジンで引くと筆者のサイトが出てくる。これゆえだろうか、何人かの人から筆者のサイトの記事を見たといってメールをもらったことがある。弾力性と勾配の違いがよくわかったと感謝されたことがある一方、あなたの定義で理解できたけれど、こんなに定義がたくさんあるなんて経済学は一体どうなっているのだとお叱りを受けたこともある。確かに筆者が学部時代に教えてもらい、それ以後使用している定義[1)]は便利であり、未だにこの定義以外を使用しているのを見るのは筆者としても信じがたいものがある。

一般に、点で定義すればなんら問題がないものも、大きさがあると問題を生じるものがある。実は＜弧弾力性＞の問題もこれに関連するもので、大げさに言えば離散と連続の問題の一つであると言うことができる。これならば筆者の研究テーマの一つであり、そのままにしておくわけにはいかない。そこでこの問題をはっきりさせるために先行研究にも当たり、シミュレーションをし[2)]、自分なりの

証明もしておこう。

§2. 弧弾力性の定義

$y = f(x)$ なる正値の微分可能単調関数（$x \in X \subset R_+$）があって、

(1)　　　$\eta = dy/dx \cdot (x / y)$

で表現される値は、y の x 弾力性と定義される[3)]。そしてこの値は、x がある値から 1%変化すると y は何％変化するかを示すものであると解釈される。x の変化分を $\Delta x \neq 0$ と記し、それに応じた y の変化分を Δy と記すと、次式が定義できる：

(2)　　　$\eta = (\Delta y / y) / (\Delta x / x)$,　ただし、$x \neq 0,\ y \neq 0$

弾力性とはその字面から読むと弾み具合であり、正の方向、負の方向への弾みを考えられなくもないが、常識的には弾み方は強いか弱いかを問題にするので方向を考えないとすれば、弾力性の定義は絶対値で示され、

(3)　　　$\eta = |(\Delta y / y) / (\Delta x / x)| = |\Delta y / \Delta x| \cdot (x / y)$

となる。

したがって、x の％変化（$|\Delta x / x|$）とそれに対応する y の％変化（$|\Delta y / y|$）が同じである場合は弾力性 $\eta = 1$ となり、x の％変化より y の％変化の方が大きい場合は弾力性 $\eta > 1$ となり、x の％変化より y の％変化の方が小さい場合は弾力性 $\eta < 1$ となる。

定義 1（伝統的弾力性の定義）：

弾力性 $\eta < 1$ の場合は x の％変化に比して y の％変化が弱いので、非弾力的と呼ぶ。

弾力性 $\eta = 1$ の場合は％変化が同じであるので、弾力性が 1（1 の弾力性）と呼ぶ。

弾力性 $\eta > 1$ の場合は x の％変化に比して y の％変化が強いので、弾力的と呼ぶ。

さて、実際にデータを与えて弾力性を測定してみると（3）の定義では一意に定まらない。変化前（始点）と変化後（終点）の（x, y）のデータを、それぞれ（x_1, $y_1 = f(x_1)$），（x_2, $y_2 = f(x_2)$）とすると、(3）の変化分

$$|\Delta x| = |x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$$

$$|\Delta y| = |y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$$

については問題ないが、(3）の（x / y）については x, y に変化前（始点)、変化後（終点）のどの値を入れるかで弾力性の値が変わってくる[4)]。

f が単調増加の場合と単調減少の場合で異なるが、もともとは豊作貧乏の説明に使用されたので、以

下では単調減少の場合を考えてみる[5)]。たとえば、縦軸に価格 x をとるマーシャルの需要関数で、$x_1 > x_2$，$y_1 \leqq y_2$ とすると、

$$x_1 = \mathrm{Max}(x),\ x_2 = \mathrm{Min}(x),\ y_2 = \mathrm{Max}(y),\ y_1 = \mathrm{Min}(y)$$

とおけ、

始点方式　$\eta_{ip} = |\Delta y/\Delta x| \cdot (x_1/y_1)$

終点方式　$\eta_{ep} = |\Delta y/\Delta x| \cdot (x_2/y_2)$

Min 方式　$\eta_{Min} = |\Delta y/\Delta x| \cdot (x_2/y_1) = |\Delta y/\Delta x| \cdot (\mathrm{Min}(x)/\mathrm{Min}(y))$

Max 方式　$\eta_{Max} = |\Delta y/\Delta x| \cdot (x_1/y_2) = |\Delta y/\Delta x| \cdot (\mathrm{Max}(x)/\mathrm{Max}(y))$

中間点方式　$\eta_{1/2} = |\Delta y/\Delta x| \cdot (½(x_1 + x_2)／½(y_1 + y_2))$

加重方式　$\eta_{w} = |\Delta y/\Delta x| \cdot ((\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)／(\lambda y_2 + (1-\lambda)y_1))$

$= |\Delta y/\Delta x| \cdot$

$(\lambda\,\mathrm{Max}(x) + (1-\lambda)\,\mathrm{Min}(x))／(\lambda\,\mathrm{Max}(y) + (1-\lambda)\,\mathrm{Min}(y))$

偽加重方式　$\eta_{pw} = |\Delta y/\Delta x| \cdot ((\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1)／(\lambda y_2 + (1-\lambda)y_1))$

対数方式　$\eta_{Ln} = -\mathrm{Ln}(y_2/y_1)／\mathrm{Ln}(x_2/x_1) = -\mathrm{Log}(y_2/y_1)／\mathrm{Log}(x_2/x_1)$

などが考えられる[6)]。これらが弧弾力性（Arc-elasticity）である。

ちなみに、対数方式が（3）と矛盾しないことをみておくと、

$$y_2／y_1 = 1 + (y_2 - y_1)／y_1 = 1 + \Delta y_1／y_1$$

ここで、％変化 $\Delta y_1／y_1$ を n 分割し、複利方式で変化すると考え、n →∞とすると、

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\Delta y_1}{n\cdot y_1}\right)^n = exp\left(\frac{\Delta y_1}{y_1}\right)$$

となる。すなわち、y が瞬間変化率で y_1 から y_2 へ変化すると考えると、

(4)　$\mathrm{Ln}(y_2／y_1) = \mathrm{Ln}\,(\exp(\Delta y_1／y_1)) = \Delta y_1／y_1$

が成立する[7)]。対数方式は x と y の各々の％変化の比であるから弧弾力性と言える。

ところで、Allen [1934] は弧弾力性を定義するにあったって次の 3 つの考察基準を提唱している[8)]：

1. 弾力性は測定単位をもたない無名数であるべきである。
2. （3）式のベース x ／ y をとるにあたって、どちらかの端点に依存するようなことはなく対称的であるべきである。
3. $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$ であればいつでも弾力性 1 が計算されるべきである。

なお、Holt & Samuelson [1946] p.355 も指摘しているように、対称性は解釈の問題であり、考察基準

2 は始点方式、終点方式などが不適であることを主張するものと受け取るべきであろう[9)]。

§3. シミュレーションの方法と結果

上述の 8 方式のどの弧弾力性が望ましい性質をもつものであるかを直観的にみるために、次のようなシミュレーションをしてみよう。

1. とり得る弾力性の範囲（たとえば、0 ～ 5）を 20 分割し、21 本の弾力性一定曲線（真の弾力性値 $\eta = 0, 0.25, 0.5, \cdots, 5$）を考える。

2. X 軸上の特定範囲（たとえば、1 ～ 500 の範囲）に点をランダムに 5001 点とり、数列 a_i (i=1, ～ , 5001)を作成し、数列 a_i の隣接する 2 点の数値を x データ（たとえば、$x_1 = 201$，$x_2 = 56$）にする弧弾力性を 21 本の弾力性一定曲線上で、各々 8 方式で計算する。

3. 各方式につきデータサイズ 5000 のデータが 21 組できるが、各組の平均（期待値）と標準誤差（平均からの偏差ではなく、真の弾力性値からの偏差を考える）を計算する。

4. 各方式の期待値は真の弾力性値が変化につれてどのように変わるかをみるプロファイルを作成する。

5. 各方式の標準誤差は真の弾力性値が変化につれてどのように変わるかをみるプロファイルを作成する。

6. 各方式の弧弾力性は伝統的な定義 1 を満足するかをみる。すなわち、真の弾力性値が 1 より小さいときはその最大値は 1 を超えず、真の弾力性値が 1 より大きいときはその最小値が 1 より大きいを満足するかをみるプロファイルを作成する。

まず、弾力性一定曲線を導出しておこう。

点弾力性は、

(3)　　$\eta = | dy/dx | \cdot (x / y), \quad x > 0, \ y > 0$

で、$dy/dx < 0$ の場合[10)]は、

$$\eta = -(dy/dx) \cdot (x / y)$$

(4)　　$(1 / y)(dy/dx) = (-\eta)(1 / x)$

x で不定積分すると、

$$\mathrm{Log}\, y = -\eta\, \mathrm{Log}\, x + C$$

C を任意定数とすれば、α を適切に選んで

$$\mathrm{Log}\, y = -\eta\, \mathrm{Log}\, x + \mathrm{Log}\ \alpha$$

したがって、

(5)　　$y = \alpha \cdot x^{-\eta}$　　　α は任意定数

が導かれる。

ちなみに、$\alpha = 6$, $\eta = 0 \sim 5$ までの弾力性一定曲線を図示すれば図 1 のようになる。

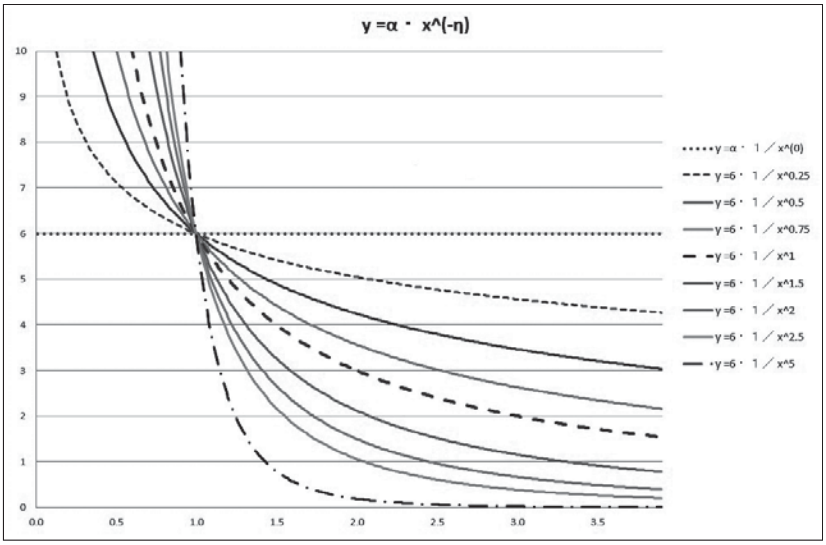

図 1　弾力性一定曲線

以下に、シミュレーションの結果を観察としてまとめておこう。

まず最初に、各方式の弧弾力性の値を計算し、データサイズ 5000 のそれぞれの期待値（平均値）と真の弾力性値の関係を示したものが図 2 である。

観察 1：真の弾力性値と各方式の期待値の関係

1. 対数方式の弧弾力性の値は真の弾力性値と常に一致している。
2. 始点、終点、Min 方式は真の弾力性値より上方に乖離していく[11] が、Min 方式は弾力性 1 までは真の弾力性値の下方にある。
3. Max、偽加重、中間点方式は弾力性 1 まで真の弾力性値を超えているが、Max, 中間点、加重、Min 方式は弾力性 1 で弾力性 1 の期待値をもっている。偽加重方式は弾力性 1 でその期待値が弾力性 1 を超えている。
4. 弾力性 1 を超えると Max、中間点方式の順で真の弾力性値より下方に乖離していく。

次に、各方式の弧弾力性を計算し、データサイズ 5000 のそれぞれの標準誤差と真の弾力性値の関係を示したものが図 3 である。

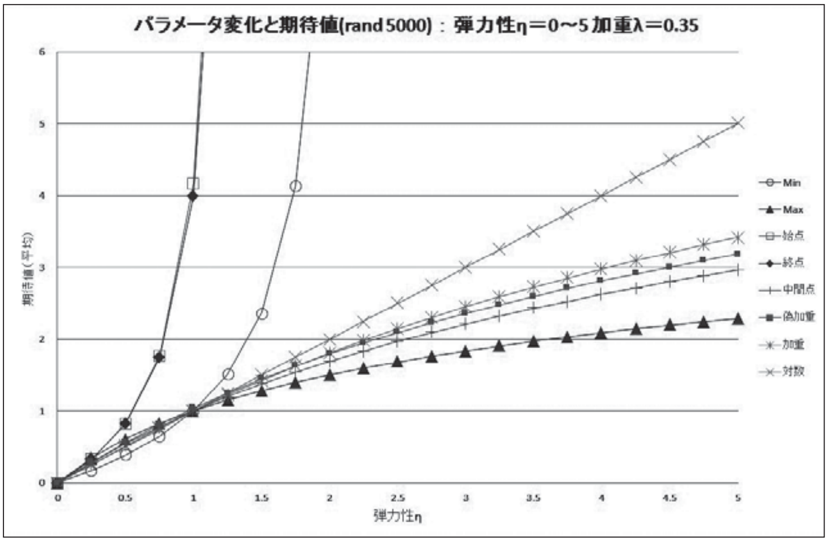

図２　弾力性変化と期待値の関係

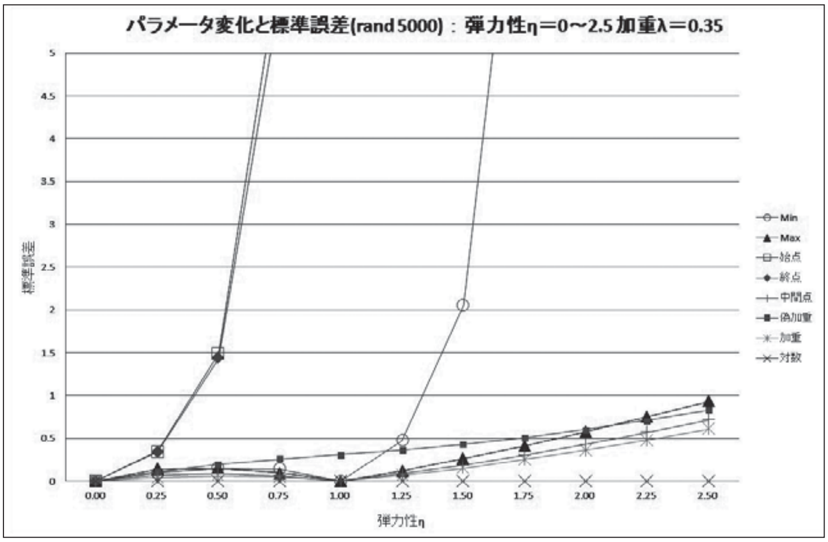

図３　弾力性変化と標準誤差の関係

観察２：真の弾力性値と各方式の標準誤差の関係

1. 対数方式の弧弾力性は真の弾力性値と常に一致しているので標準誤差はゼロのままである。

2. 始点、終点、Min 方式は真の弾力性値が高まるにつれて標準誤差は急速に増加していくが、Min 方式は弾力性１までは標準誤差はさほど増加せず、弾力性１でゼロになり、その後、急速に増加する。

3. Max、加重、Min、中間点方式は弾力性１まで単峰の似たような標準誤差の変動パターンを示し、

弾力性１で標準誤差はゼロになるが、偽加重方式は弾力性１でゼロにならず増加続ける。

4. 弾力性１を超えると Min、Max、中間点方式の順で標準誤差は増加していく[12]。

最後に各弧弾力性が伝統的な弾力性の定義１を満足するかどうかをチェックするために、弾力性が非弾力的であれば、かならず１より小の値を計算し、弾力的であれば１より大の値を計算するものであるかをシミュレーション・データで確認しておこう。すなわち、真の弾力性が１より小であれば、5000 のデータの最大値が１を超えず、真の弾力性が１より大であれば、50000 のデータの最小値が１より大きいかをチェックするのである。図４を参照されたい。

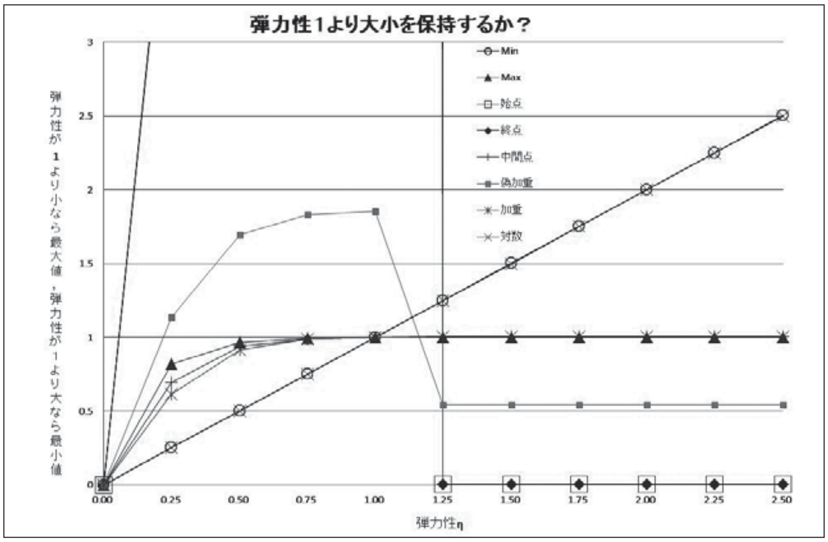

図４　伝統的弾力性定義のチェック

観察３：伝統的弾力性定義のチェック

1. 対数方式の弧弾力性は真の弾力性値と常に一致しているので勾配１の直線（弾力性 η ）上にある。

2. 真の弾力性値が０から１までの間、始点、終点、偽加重方式の計算する最大値は１を上回り、Max、中間点、加重、Min 方式の計算する最大値は１を下回る。

3. 真の弾力性値が１のとき、Max、中間点、加重、Min、対数方式は弾力性１をとるが、始点、終点、偽加重は１をとるとは限らない。

4. 真の弾力性値が１を超えると Min、Max、中間点、加重方式の計算する最小値は１を上回るが、偽加重、始点、終点方式で計算された最小値は１を下回る。

§4. 証明と命題

以上の観察から何が結論づけられるかを考え、命題としてまとめておこう。なお、言うまでもないことであるが、特別な数値例であるシミュレーション・データから言えることは、それが反例になっていることを示すことで証明となるが、一般的に言えるためには証明が必要である。以下に証明をする。

まず最初に、弧弾力性の意味から確認しておこう。弧弾力性は $y = f(x)$ なる正値の微分可能単調関数（$x \in X \subset R_{+}$）の相異なる２点から無名数の弾力性値 η を引き出すものであったが、もともとの弾力性の定義は点弾力性で定義されたものであった。また、対数方式の弧弾力性は、相異なる２点間を瞬間変化率で変化する場合に合理化された数値であった[13)]。

シミュレーションでしたように、$y = f(x)$ が単調減少関数で弾力性一定曲線である（すなわち、弧弾力性をとる２点は弾力性一定曲線上にある）と仮定して、議論を進めよう。先と同様に、$x_1 > x_2$，$y_1 \leqq y_2$ とし，$x_1 = \mathrm{Max}(x)$，$x_2 = \mathrm{Min}(x)$，$y_2 = \mathrm{Max}(y)$，$y_1 = \mathrm{Min}(y)$ とおいても証明の一般性を損ねない。$\rho = x_2 / x_1 < 1$ とおけば[14)]、

$$y_2 / y_1 = \alpha\ x_2^{-\eta} / \alpha\ x_1^{-\eta} = \rho^{-\eta}$$

となる。

まず、対数方式の弧弾力性は、

$$\text{対数方式} = -\mathrm{Log}(y_2 / y_1) / \mathrm{Log}(x_2 / x_1) = -\mathrm{Log}(\rho^{-\eta}) / \mathrm{Log}(\rho) = \eta$$

となり、常に真の弾力性を与えることが分かる。

また、Max 方式の弧弾力性は、

(6)　$$\text{Max 方式} = |\Delta y / \Delta x| \cdot (\mathrm{Max}(x)/\mathrm{Max}(y)) = |\Delta y / \Delta x| \cdot (x_1 / y_2)$$
$$= (y_2 - y_1)/y_2 \;/\; (x_1 - x_2)/x_1 = (1 - y_1 / y_2) / (1 - x_2 / x_1)$$
$$= (1 - \rho^{\eta}) / (1 - \rho)$$

となり、同様にして、

(7)　$$\text{Min 方式} = (1/\rho^{\eta-1}) \cdot (1 - \rho^{\eta}) / (1 - \rho)$$

(8)　$$\text{加重方式} = \{(\lambda(1-\rho) + \rho) / (\lambda(1-\rho^{\eta}) + \rho^{\eta})\} \cdot (1 - \rho^{\eta}) / (1 - \rho)$$

を導くことができる。ちなみに、その他の方式の計算結果も示すと、こちらは $\rho < 1$ の制約はなくなる[15)]が、

$$\text{始点方式} = (1/\rho^{\eta}) \cdot (1 - \rho^{\eta}) / (1 - \rho)$$

$$\text{終点方式} = (\rho) \cdot (1 - \rho^{\eta}) / (1 - \rho)$$

$$\text{偽加重方式} = \{(\lambda(\rho - 1) + 1) / (\lambda(1 - \rho^{\eta}) + \rho^{\eta})\} \cdot (1 - \rho^{\eta}) / (1 - \rho)$$

となる。

以上から、すべての方式の弧弾力性値は Max 方式の弾力性値に係数を乗じたものであることがわかる。Max 方式の弾力性は $\rho \to 1$（すなわち $x_2 \to x_1$）のとき、ロピタルの定理（$-1 \neq 0$）により、

$$\lim_{\rho \to 1} \frac{1-\rho^{\eta}}{1-\rho} = \lim_{\rho \to 1} \eta \cdot \rho^{\eta-1} = \eta$$

であるから、係数 $(1/\rho^{\eta-1})$, $((\lambda(1-\rho)+\rho)/(\lambda(1-\rho^{\eta})+\rho^{\eta}))$, $(1/\rho^{\eta})$, (ρ), $((\lambda(\rho-1)+1)/(\lambda(1-\rho^{\eta})+\rho^{\eta}))$ らがすべて 1 に収束するので、あらゆる方式の弾力性値は η に収束することがわかる。当然のことながら、点弾力性になれば、すべての弾力性は η となり一致する。$x_2 \to x_1$ は任意の $y = f(x)$ でとれるので、

命題 1：ここで考えるあらゆる弧弾力性は、$x_2 \to x_1$ の時、同じ点弾力性に収束する。

次に、各方式の弾力性が定義 1（伝統的弾力性の定義）を満足するかどうかのチェックから始めよう。

$\eta = 0.5$, $\alpha = 1000$ の弾力性一定曲線曲線上において、加重 $\lambda = 0.35$ の時、

		(x_1, y_1)	(x_2, y_2)
始点方式の弾力性値：	3.0331	(4728, 14.5432)	(323, 55.6415)
終点方式の弾力性値：	3.1922	(109, 95.7826)	(1737, 23.9939)
偽加重方式の弾力性値：	1.2209	(4208, 15.4157)	(124, 89.8027)

$\eta = 1$, $\alpha = 1000$ の弾力性一定曲線曲線上において、加重 $\lambda = 0.35$ の時、

		(x_1, y_1)	(x_2, y_2)
始点方式の弾力性値：	2.9060	(3804, 0.26288)	(1309, 0.76394)
終点方式の弾力性値：	2.8135	(1496, 0.66845)	(4209, 0.23759)
偽加重方式の弾力性値：	0.5932	(51, 19.6078)	(634, 1.57729)

$\eta = 1.75$, $\alpha = 1000$ の弾力性一定曲線曲線上において、加重 $\lambda = 0.35$ の時、

		(x_1, y_1)	(x_2, y_2)
始点方式の弾力性値：	0.3990	(1227, 0.0039)	(3894, 0.0005)
終点方式の弾力性値：	0.5890	(3446, 0.0006)	(1496, 0.0028)
偽加重方式の弾力性値：	0.7480	(450, 0.0227)	(3254, 0.0007)

となり、始点方式、終点方式、偽加重方式の弧弾力性は定義 1 を満足しないことが証明される。

他の方式については次のようにして証明する。

まず、$0 < \eta < 1$ のケースから考察する。$\rho < 1$ である[16] ことに注意すれば、

(9)　　$1 > \rho^{\eta} > \rho$

である。厳密には次のようにして証明する：(9) 式の各項について、底を $\rho < 1$ とする対数をとると、0, η, 1 になる。これは前提より、$0 < \eta < 1$ であり、$\log_{\rho} x$ は単調減少関数であるから $1 > \rho^{\eta} > \rho$ であることがわかる。

(9) を利用すれば、$(1 - \rho^{\eta}) / (1 - \rho) < 1$ となり、(6) より Max 方式の弾力性は 1 より小であることが分かる。他方、$(1/\rho^{\eta-1}) = \rho^{1-\eta} < 1$ であるから、(7) より Min 方式の弾力性値は Max 方式の弾力性値より小であることが分かる。また、

$$((\lambda(1 - \rho) + \rho) / (\lambda(1 - \rho^{\eta}) + \rho^{\eta}))$$
$$= (\lambda + (1 - \lambda)\rho) / (\lambda + (1 - \lambda)\rho^{\eta}) < 1$$

となるから、(8) より加重方式の弾力性値は Max 方式の弾力性値より小であることも分かる。さらに加重方式は、$\lambda = 0$ の時 Min 方式と一致し、$\lambda = 1$ の時 Max 方式と一致するが、加重方式の係数を λ で微分すれば、(9) より

(10)　　$(\rho^{\eta} - \rho) / (\lambda + (1 - \lambda)\rho^{\eta})^2 > 0$

がわかるから、加重方式の弾力性値は λ の増加関数で Min 方式の弾力性値と Max 方式の弾力性値の中間の値をとることがわかる。したがって、$\eta < 1$ のケースは Max 方式、Min 方式、加重方式の弾力性値はすべて 1 より小になり、

(11)　　Min 方式の弾力性値≦加重方式の弾力性値≦ Max 方式の弾力性値＜ 1

となることが証明される。

次に $\eta = 1$ のケースでは、(6)、(7)、(8) への代入によって分かるように、Max 方式、Min 方式、加重方式の弾力性値はすべて 1 になる。

最後に $\eta > 1$ のケースでは、$\rho < 1$ であることに注意すれば、

(12)　　$1 > \rho > \rho^{\eta}$

である[17]。これを利用すれば、$(1 - \rho^{\eta}) / (1 - \rho) > 1$ となり、Max 方式の弾力性は 1 より大であることが分かる。他方、$(1/\rho^{\eta-1}) > 1$ であるから、Min 方式の弾力性値は Max 方式の弾力性値より大であることが分かる。また、

$$((\lambda(1 - \rho) + \rho) / (\lambda(1 - \rho^{\eta}) + \rho^{\eta}))$$
$$= (\lambda + (1 - \lambda)\rho) / (\lambda + (1 - \lambda)\rho^{\eta}) > 1$$

であるから、加重方式の弾力性値は Max 方式の弾力性値より大であることも分かる。さらに加重方式の弾力性値は、先のケースと同様にして、λ の減少関数で Min 方式の弾力性値と Max 方式の弾力性値の中間の値をとることがわかる。したがって、$\eta > 1$ のケースは Max 方式、Min 方式、加重方式の弾

力性値はすべて1より大になり、

(13)　Min 方式の弾力性値≧加重方式の弾力性値≧ Max 方式の弾力性値＞1

となることが証明される。

以上から、Max 方式、Min 方式、加重方式の弾力性は定義1を満足することが証明され、まとめると、命題2になる。

命題2：弾力性の定義1を満足する弧弾力性は、対数方式、Max 方式、Min 方式、加重方式であり、始点方式、終点方式、偽加重方式は満足しない。また、$0<\eta<1$ のケースでは、弾力性値は、Min 方式の弾力性値≦加重方式の弾力性値≦ Max 方式の弾力性値の順で、Min 方式の弾力性値＜ Max 方式の弾力性値であり、$\eta>1$ のケースでは、Min 方式の弾力性値≧加重方式の弾力性値≧ Max 方式の弾力性値の順で、Min 方式の弾力性値＞ Max 方式の弾力性値である。

§5. 終わりに

弧弾力性を考える場合、Allen [1934] の言うように、ベースに何をもってくるかによって値は変わってくる。とりわけ、単調減少関数の場合には始点方式、終点方式、偽加重方式は弾力性の定義1（伝統的弾力性の定義）を満足しないケースが出てくる。したがって、弾力性計算の使用に耐えるものは対数方式、Max 方式、Min 方式、加重方式である。弾力性1を除く、弾力性一定曲線上で弾力性を常に正しく計算するのは対数方式のみであるが、x・y ＝一定（すなわち弾力性1）かどうかを判定する問題を考えるならば、伝統的弾力性の定義を満足する方式の弧弾力性を用いることができる。また、2次元図で伝統的弾力性の表現をする場合は、Min 方式の弧弾力性を使用することが便利である[18)]。

注

＊査読者から貴重なコメントをいただいた。ここに謝意を表します。

1）ここで定義する Min 方式のこと。

2）筆者が学部時代、大型コンピュータでシミュレーション分析がなされたことを聞いたことがある。でも今では、エクセルでできるので容易に実行可能である。なお、今回作成したエクセルのシミュレーション・ファイルは筆者のサイト（http://www.cc.kyoto-su.ac.jp/~yamadaka/index-j.html）からパスワード〈yscp〉でダウンロードできるようにする予定である。

3）1点（x, y）で定義されているので点弾力性と呼ばれる。経済学説史上は、弾力性概念を初めて定義したのは Marshall『原理』の初版 [1890] であるが、Dalton [1920] が弧弾力性を命名、定義するまで、すなわち『原理』では8版 [1920] からしか、弧弾力性概念の吟味はなされなかったそうだ（Gabor [1974],p.115 参照。もっとも Gabor は弾力性概念を Cournot [1838] の業績にしている。）。実際、『原理』の2版 [1891]（p.160, n.1）では、＜価格の1%の下落が需要量の2%（あるいは1/2%）の増加をもたらせるならば需

要の価格弾力性は 2（あるいは 1/2）になる > と説明するが、8 版 [1920]（p.102, n.1, リプリント版 p.86）では、この文脈を < おおざっぱに言って > と断り、<100 から 102 への変化は 98 から 100 への変化と同じ比例的変化を生じない > と指摘している。

4）もともとの点弾力性の定義であれば問題がないことでも、現実的に解釈ができる弧弾力性の概念にすると曖昧さが生じたことになる。もっとも、％変化なのだから始点方式しかあり得ず、これをもって弧弾力性の定義にするという主張もあり得るが、本稿で明らかにするように、これでは定義 1 に矛盾し、さらには実証分析に用いる統計量としての弾力性概念を否定することになる。

5）単調増加の場合は、以下で定義する始点方式が Min 方式、終点方式が Max 方式、偽加重方式が加重方式にそれぞれ一致する。なお、豊作貧乏は Vázquez [1995] p.221 によれば、少なくとも Gregory King（英国の統計家 1648-1712）の時代から観察されていたそうだ。

6）実際、始点方式、終点方式は Dalton [1920] pp.192-7 が Marshall『原理』の初版 [1890] の点弾力性の定義から考え、弧弾力性のあいまいさを指摘したものであるし、Min 方式、Max 方式は Lerner [1933] の弧弾力性の定義で、中間点方式は Allen [1934] が指摘したもののひとつであるし、対数方式は Holt & Samuelson [1946] の指摘した、いわゆる ” 真の ” 弾力性である。なお、加重方式は Max と Min の凸結合の点を表し、$\lambda = 0$ のとき Min 方式、$\lambda = 1/2$ のとき中間点方式、$\lambda = 1$ のとき Max 方式になる。また偽加重は始点と終点の凸結合を表し、$\lambda = 0$ のとき始点方式、$\lambda = 1/2$ のとき中間点方式、$\lambda = 1$ のとき終点方式になる。

7）y が瞬間変化率で変化しない場合は（4）式は成立せず、

$$\mathrm{Ln}(y_2 / y_1) \leqq \mathrm{Ln}\left(\exp(\Delta y_1 / y_1)\right) = \Delta y / y_1$$

となる。瞬間変化率は過大評価をもたらせるからである。

8）Allen [1934] pp.226-7.

9）もちろん、対数方式の定義は始点、終点を入れ替えても対数の性質から同じ値になる。

10）dy/dx ＞ 0 の場合は、同様にして、

（5）’　　$y = \alpha \cdot x^{\eta}$　　α は任意定数

11）弾力性が大きくなると正確な弾力性値を与えないことが Min 方式より中間点方式が選ばれる理由かもしれない。もっとも、Daellenbach et al.[1991] は中間点方式は中間点ゆえに％変化の制約（200% 以下）をもつので、対数方式を推奨している。

12）凸結合によるリスクの最小化！

13）2 点が与えられた時に弧弾力性値を推定する問題ではなく、ここで考えたような離散的な変化の場合の弾力性は、当然のことながら、2 点間の間をどのような軌跡で変化したかなどは仮定する必要がなく、$y = f(x)$ 上にあると暗黙に考えているにすぎない。この意味で、Holt & Samuelson [1946] のいわゆる “ 真の ” 弾力性は、$y = f(x)$ が瞬間変化率で変化した軌跡でない以上、真の弾力性とは言えない。

14）Holt & Samuelson [1946], p.355, n.3 の言う、2 つの状態での分数の価格下落。

15）$x_1 > x_2$ の制約は不要になり、$\rho > 1$ のケースも可能。

16）もちろん、$\rho = x_2 / x_1 > 0$ である。

17）先と同様に証明できる。

18）安部・山田［1984］, pp.46-48, 山田［2011］,p.39 参照。

参考文献：

Allen, R.G.D.[1934] : "The Concept of Arc Elasticity of Demand", *The Review of Economic Studies*, Vol. 1, No. 3 (Jun., 1934), pp. 226-229

Cournot, A.[1838] : *Mathematical Principles of the Theory of wealth*, Reprint Kelley.

Daellenbach, L.A., A.W.Khandker, G.J.Knowles & K.R.Sherony [1991] : "Restrictions of Allen's Arc Elasticity of Demand -Time to Consider the Alternative?", *American Economist*, Vol.35, pp.56-61, 1991.

Dalton, H.[1920] : *Some Aspects of the Inequality of Income in Modern Communities*, George Routlege & Sons, LTD., 1920.

Gabor, A.G.[1974] : "The Theory of Constant Arc Elasticity function", *Bulletin of Economic Research*, pp.114-27

Holt, C.C.& P.A.Samuelson [1946] : "The Graphic Depiction of Elasticity of Demand", *Journal of Political Economy*, Vol. 54, No. 4（Aug., 1946), pp. 354-357.（Reprint CSP vol.1, ch.7 pp.57-60.）

Lerner, A.P.[1933] : "The Diagrammatical Representation of Elasticity of Demand", *The Review of Economic Studies*, Vol. 1, No. 1 (Oct., 1933), pp. 39-44

Marshall, A.[1920] : *Principles of Economics*, eight edition, Reprint Macmillan Student edition.

Seldon, J.R.[1986] : "A Note on the Teaching of Arc Elasticity", *Journal of Economic Education*, Vol.17（2）, pp.120-124, 1986.

Vázquez, A.[1995] : "A Note on the Arc Elasticity of Demand", *Estudios Económicos*, Vol. 10, No. 2 (20)（Jul. - Dec., 1995), pp. 221-228

安部栄造・山田勝裕 [1984] :『経済学理論』、啓文社、1984 年。

山田勝裕 [2011] :『経済原論』、第 2 版、晃洋書房、2011 年。

A simulation Analysis of the Arc Elasticity ~ An example of comparison between discrete and continuous concepts

Katsuhiro YAMADA

Abstract

The value of arc elasticity, which is defined by its initial point and/or end point, varies according to how its base is selected even though all converge to the same value as end point approaches to initial point. Among the base selection methods, Logarithm method (η_{Ln}), Max method (η_{Max}), Min method (η_{Min}) and Weighted method (η_{w}) satisfy the conventional definition of elasticity, while Initial-point method (η_{ip}), End-point method (η_{ep}) and Pseudo-weighted method (η_{pw}) do not. Further, it can be shown that $\eta_{Min} \leqq \eta_{w} \leqq \eta_{Max}$ and $\eta_{Min} < \eta_{Max}$ for $0 < \eta < 1$, and $\eta_{Min} \geqq \eta_{w} \geqq \eta_{Max}$ and $\eta_{Min} > \eta_{Max}$ for $\eta > 1$. Minimum method is recommended here as it offers a useful graphical calculation.

Keywords : Arc Elasticity, Point Elasticity, Simulation, Minimum method, Discrete and Continuous