

# $\Lambda$ 項とバリオンの入ったゆらぎの方程式

中 島 政 広

(平成 15 年 9 月 18 日提出)  
(平成 16 年 2 月 13 日修正)

## 要 旨

2003 年 2 月に出た WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe-Wilkinson・マイクロ波異方性探査衛星) の観測結果 [1] によると,  $\Lambda$  項 (宇宙定数) の存在がほぼ確実となった. 今まで CMB (Cosmic Microwave Background) の非等方性を記述するゆらぎの方程式には,  $\Lambda$  項かバリオンのどちらか一方のみを含んだ形にしかっていなかった. この論文では  $\Lambda$  項およびバリオンの両方が入ったゆらぎの方程式を導いた. その数値計算の結果は, まだいくつかの問題はあるものの, cmbfast の計算結果 [8, 9] に近くなることがわかった. これらの結果を使い我々は CMB パワースペクトルにおいて予測される物理的過程を考えた.

キーワード:  $\Lambda$  項 (宇宙定数), CMB (宇宙背景放射), バリオン, ダークマター

## 目 次

1. 導 入
2. 方程式の導出
  - 2.1. 単一流体の場合
  - 2.2. 2流体の場合
    - 2.2.1. 多流体
    - 2.2.2. 2 流体
    - 2.2.3. 放射, ダークマター, バリオン流体
3. 数値計算
  - 3.1. 各パラメータの値
  - 3.2. Silk damping 効果
  - 3.3. Sachs-Wolfe 効果と Velocity 効果
  - 3.4. 3 次元から 2 次元への変換
4. スペクトルの振動の原因
5. パラメータの変化によるスペクトルの変位
6. 議論と結論

## 1. 導 入

1965 年, Penzias と Wilson によって絶対温度にして 3K の宇宙背景放射 (CMB) が発見され, ビッグバン宇宙論の正当性が示された. つまり, 過去の宇宙は熱かったということが証明されたのである. 実際この放射は, 宇宙膨張に伴い宇宙の温度が徐々に下がってきたために, 光がトムソン散乱を終えてしまった (最終散乱-Last Scattering Surface (LSS)) ときの光なのである.

その後 1992 年になり COBE 衛星の観測結果が出たことで, この 3K の放射の中に 10 万分の 1 という小さなゆらぎ (CMB 非等方性) があることが発見された. 標準偏差にして実に  $30 \mu\text{K}$  という大きさの小さなゆらぎではあるが, このゆらぎが宇宙の大規模構造や銀河団, 銀河といった構造を作り上げてきたと考えられている. またこのゆらぎには宇宙の年齢, 幾何学, 組成表といった情報を含め, ゆらぎの起源やインフレーションといった超宇宙初期の情報までぎっしり詰まっている. つまりこのゆらぎを解析することによって宇宙の過去の姿を知ることができ, さらに宇宙の未来の姿を想像することが可能となるのである.

2003 年 2 月には COBE よりもさらに解像度の高い WMAP の観測結果が発表された. この観測結果により, 各宇宙パラメータの値がかなり正確に決まっただけでなく,  $\Lambda$  項の存在がほぼ確実となった. 最近では  $\Lambda$  項の存在は一部の人により信じられていたが, これでかなりの宇宙物理学者の信頼を得るにいったわけである. このことにより, 宇宙論は  $\Lambda$  項を入れて再構築されなければならない.

宇宙背景放射のゆらぎを論ずる理論もその対象である. この理論には通常, ボルツマン方程式が用いられるが, 我々はゆらぎの方程式を解く方法をとっている. この方法にはいくつかの近似が使われているが, 式の導出等の流れがわかりやすく, また CMB 非等方性の特徴がとらえやすい. しかし, 今までは  $\Lambda$  項とバリオンの両方を考慮した式が導出されていなかった. 以下ではバリオンと  $\Lambda$  項の入ったより一般的なゆらぎの方程式を導出する方法と, 数値計算の結果を示す.

## 2. 方程式の導出

### 2.1 単一流体の場合

この章ではゆらぎの方程式の導出を試みるが, その最も一般的な手順は Padmanabhan [2] によって与えられている. 我々はその手順に従って議論を進めていく. Vale & Lemos [3] の論文と Kodama & Sasaki [4, 5, 6] の論文も参考にする. Vale & Lemos は  $\Lambda$  項を導入してはいるが, バリオンが入っていない. Kodama & Sasaki はバリオンを導入してはいるが  $\Lambda$  項が入っていない. 我々の目的は  $\Lambda$  項とバリオンの両方を含んだゆらぎの方程式を導くことにある.

一般相対論でゆらぎの方程式を導出するときは, いつも固定されたゲージもしくは座標系が

存在する．我々は Λ 項を持つ宇宙に対するゆらぎの方程式を導出するために，ゲージを共動座標系に固定する．そこでは 4 元速度  $u^\alpha$  は  $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$  となる．

$D_\alpha$  は共変微分を，ドットは方向微分  $u^\alpha D_\alpha$  を表すものとする．共動世界線に垂直な面（共動超平面）への射影テンソルを  $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta$  とすると，その面上での自然な微分は  $h^\beta_\alpha D_\beta$  で与えられ，ラプラシアンは  $\nabla^2 = -h^\beta_\alpha D_\beta h^{\alpha\gamma} D_\gamma$  となる．

まずエネルギー運動量テンソル  $T^{\alpha\beta} = (\rho + p)u^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta}$  の共変微分  $D_\alpha T^\alpha_\beta$  が 0 であるという条件から，相対論的な連続の方程式とオイラー方程式が導かれる．それぞれ

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p), \quad (1)$$

$$\dot{u}_\alpha = \frac{h^\beta_\alpha D_\beta p}{\rho + p} \quad (2)$$

のようになる．またアインシュタイン方程式  $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R + \Lambda g_{\alpha\beta} = -8\pi GT_{\alpha\beta}$  からはフリードマン方程式

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \quad (3)$$

が導かれる．

ドットの定義を使えば，次の関係が成り立つ．

$$D_\alpha \dot{u}^\alpha = (D_\alpha u^\beta)(D_\beta u^\alpha) + u^\beta D_\beta (D_\alpha u^\alpha) - u^\beta R_{\alpha\beta} u^\alpha. \quad (4)$$

この式の最後の項はアインシュタイン方程式より

$$u^\alpha R_{\alpha\beta} u^\beta = R_{00} = -4\pi G(\rho + 3p) + \Lambda \quad (5)$$

と書ける．また  $(D_\alpha u^\beta)(D_\beta u^\alpha)$ ,  $D_\alpha u^\alpha$  は空間成分のみ残り，共変微分の定義よりこれらはそれぞれ

$$(D_i u^j)(D_j u^i) = 3H^2, \quad D_i u^i = 3H \quad (6)$$

となることがわかる．ゆえに (4) 式は

$$D_\alpha \dot{u}^\alpha = 3\dot{H} + 3H^2 + 4\pi G(\rho + 3p) - \Lambda \quad (7)$$

となる．一方，上式左辺は

$$D_\alpha \dot{u}^\alpha = -\frac{\nabla^2 p}{\rho + p} \quad (8)$$

と書けるので，(7) 式は

$$\dot{H} = -H^2 - \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} - \frac{1}{3} \frac{\nabla^2 p}{\rho + p} \quad (9)$$

となる．

ここでドットをパラメータ  $\tau$  での微分とすれば，共動超平面でのラベル  $t$  との関係は

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 - \frac{\delta p}{\rho + p} \quad (10)$$

と与えられるので，これを用いて方程式を  $t$  についての微分に書き直すことを考える．連続の方程式は

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \frac{d\rho}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \dot{\rho} \frac{\rho + p}{\rho + p - \delta p} = -3H(\rho + p) \quad (11)$$

となる．ここでドットは  $t$  での微分を表すものとした．次にゆらぎの方程式を導くために  $A = A_b + \delta A$  の形に摂動をとる． $A_b$  は非摂動項（添字  $b$  はバックグラウンドを表す）， $\delta A$  は摂動項である．0 次の項と 1 次の項を書き下すと，

$$\dot{\rho}_b = -3H_b(\rho_b + p_b), \quad (12)$$

$$\delta\dot{\rho} = -3\delta H(\rho_b + p_b) - 3H_b\delta\rho \quad (13)$$

となる．同様に (9) 式を  $t$  での微分に書き換えると

$$\frac{dH}{d\tau} = \dot{H} \frac{\rho + p}{\rho + p - \delta p} = -H^2 - \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} - \frac{1}{3} \frac{\nabla^2 p}{\rho + p} \quad (14)$$

となり，摂動をとり 0 次の項と 1 次の項を書き下すと

$$\dot{H}_b = -H_b^2 - \frac{4\pi G}{3}(\rho_b + 3p_b) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (15)$$

$$\delta\dot{H} = -2H_b\delta H - \frac{4\pi G}{3}\delta\rho - \frac{c_s^2}{3} \frac{\nabla^2\delta\rho}{\rho_b + p_b} \quad (16)$$

となる．ここで  $\delta p = c_s^2\delta\rho$  の関係を使った． $c_s$  は音速である．(13) 式を  $\delta H$  について解き， $t$  に関して微分をとれば

$$\begin{aligned} \delta\dot{H} = & -\frac{1}{3(1+w)} \left[ \ddot{\delta} - 3H_b(2w - c_s^2)\dot{\delta} \right. \\ & \left. + \frac{9}{2}H_b^2(2c_s^2 - w + w^2)\delta - \frac{3}{2}\Lambda w(1+w)\delta \right] \end{aligned} \quad (17)$$

の関係を得る．ここで  $w = p/\rho$ ， $\delta = \delta\rho/\rho$  と置き，次の関係も用いた．

$$\dot{w} = -3H_b(1+w)(c_s^2 - w), \quad (18)$$

$$\dot{H}_b = -\frac{3}{2}H_b^2(1+w) + \frac{1}{2}\Lambda(1+w). \quad (19)$$

(13), (16), (17) 式を用いれば最終的に次の関係式を得る．

$$\begin{aligned} \ddot{\delta} + H_b(2 - 6w + 3c_s^2)\dot{\delta} - \frac{3}{2}H_b^2(1 - 6c_s^2 - 3w^2 + 8w)\delta \\ + \frac{1}{2}(1+w)(1-3w)\Lambda\delta = -\left(\frac{kc_s}{a}\right)^2\delta. \end{aligned} \quad (20)$$

ここで  $\nabla^2 \delta = -(k/a)^2 \delta$  のようなフーリエ変換を使った．これが単一流体に対する Λ 項の入った密度ゆらぎの方程式である．

## 2.2 2流体の場合

前節では単一流体に対するゆらぎの方程式を導出したが，ここではより一般的に多流体，特に放射とダークマターの 2 流体についての方程式の導出を行う．

### 2.2.1 多流体

$N$  個の完全流体を考える．それぞれの流体はエネルギー運動量テンソル  $T_N^{\alpha\beta} = (\rho_N + p_N)u_N^\alpha u_N^\beta - p_N g^{\alpha\beta}$  を持ち，以前のように 4 元速度は  $u_N^\alpha = (1, 0, 0, 0)$  である．それぞれの流体は添え字  $N$  を持つ (1), (2) 式に従う．単一流体の時と同様の手順により次の方程式が得られる．

$$\dot{\rho}_N = -3H_N(\rho_N + p_N), \quad (21)$$

$$\frac{1}{3}D_\alpha u_N^\alpha = \dot{H}_N + H_N^2 + \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) - \frac{\Lambda}{3}, \quad (22)$$

$$D_\alpha u_N^\alpha = -\frac{\nabla^2 p_N}{\rho_N + p_N} + \frac{3(H - H_N)}{\rho_N + p_N} \dot{p}_N. \quad (23)$$

(23) 式の右辺の項は (8) 式と比べて新しい項が加わっている．これは (2) 式に等価なそれぞれの方程式において， $h_{\alpha}^{\beta}$  ではなくて， $h_{N\alpha}^{\beta} = g_{\alpha}^{\beta} - u_{N\alpha} u_N^{\beta}$  を持つからである．我々はまた，流体の総量を次のように定義する．

$$\rho = \sum_N \rho_N, \quad p = \sum_N p_N, \quad H = \sum_N \frac{\rho_N + p_N}{\rho + p} H_N, \quad (24)$$

$$H - H_N = \delta H - \delta H_N. \quad (25)$$

(25) 式を使い，前節と同じ手順に従い摂動をとると

$$\delta \dot{\rho}_N = -3\delta H_N(\rho_N + p_N) - 3H\delta\rho_N - 3H(\delta p_N - \theta_N \delta p), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{H}_N = & -2H\delta H_N - \frac{4\pi G}{3}\delta\rho - \frac{1}{3}\frac{\nabla^2 p_N}{\rho_N + p_N} \\ & + \frac{\dot{p}_N}{\rho_N + p_N} \left[ \sum_M (\theta_M \delta H_M) - \delta H_N \right] \end{aligned} \quad (27)$$

となる．ここで

$$\theta_N = \frac{\rho_N + p_N}{\rho + p} \quad (28)$$

の関係を用いた． $w_N$  と  $c_{sN}^2$  は個々の流体に対して以前と同じように定義され，総流体に対しては

$$w = \frac{p}{\rho}, \quad c_s^2 = \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} \quad (29)$$

と定義される．単一流体のときのように  $c_s^2 = \delta p / \delta \rho$  ではないことに注意する．

### 2.2.2 2 流体

我々は今、2 流体の場合を考える．それぞれのゆらぎ  $\delta_1$  と  $\delta_2$  は断熱的なゆらぎ  $\delta$  と等曲率的なゆらぎ  $S$  によって表され、次のような関係で結ばれている．

$$\delta = \frac{\rho_1 \delta_1 + \rho_2 \delta_2}{\rho_1 + \rho_2}, \quad S = \frac{\delta_1}{1 + w_1} - \frac{\delta_2}{1 + w_2}. \quad (30)$$

これらの関係を使えば、前節と同じ手順によって  $\delta$  と  $S$  に関する 2 つのゆらぎの方程式を得ることができる．それぞれ

$$\begin{aligned} \ddot{\delta} + H(2 - 6w + 3c_s^2)\dot{\delta} - \frac{3}{2}H^2(1 - 6c_s^2 - 3w^2 + 8w)\delta \\ + \frac{1}{2}(1 + w)(1 - 3w)\Lambda\delta = -\frac{k^2}{a^2}(c_s^2\delta + w\eta)^2 \end{aligned} \quad (31)$$

および

$$\ddot{S} + H(2 - 3u^2)\dot{S} = \frac{k^2}{a^2} \left( (c_{s_2}^2 - c_{s_1}^2) \frac{\delta}{1 + w} - u^2 S \right) \quad (32)$$

である．ここで  $\eta$  と  $u^2$  は

$$\eta = \frac{\rho_1(1 + w_1)\rho_2(1 + w_2)}{\rho p(1 + w)} (c_{s_1}^2 - c_{s_2}^2) S, \quad (33)$$

$$u^2 = \frac{\rho_1(1 + w_1)c_{s_2}^2 + \rho_2(1 + w_2)c_{s_1}^2}{\rho(1 + w)} \quad (34)$$

で定義されている．これらが 2 流体に関するゆらぎの方程式である．

### 2.2.3 放射，ダークマター，バリオン流体

続いて放射とダークマター，バリオンの 3 流体について考える．ただし、放射とバリオンは強く結合しているとし、ゆらぎとしては実質同じものと考え、密度や圧力、状態方程式にバリオンを考慮する (tight coupling 近似)．つまり実質上 2 流体と考え議論を進めていく．(30) 式から (34) 式までの 1 と 2 の添え字を、それぞれダークマターと放射と考える．つまり (1, 2)  $\rightarrow$  (DM, R) とする．また  $a$  の代わりに  $x = a/a_{eq}$  という変数を使う． $a_{eq}$  は放射と物質 (バリオンとダークマター) の密度が等しい時代を示す．この新しい変数のもとで次のようにそれぞれの値を定義することができる．

$$\frac{\rho_{DM}}{\rho_{eq}} = \frac{1}{2x^3} \left( 1 - \frac{4}{3q} \right), \quad p_{DM} = 0, \quad (35)$$

$$\frac{\rho_R}{\rho_{eq}} = \frac{2}{3x^4} \frac{x + 3q/4}{q}, \quad \frac{p_R}{\rho_{eq}} = \frac{1}{6x^4}, \quad (36)$$

$$\frac{\rho}{\rho_{eq}} = \frac{\rho_{DM} + \rho_R}{\rho_{eq}} = \frac{1}{2x^4}(x + 1), \quad \frac{p}{\rho_{eq}} = \frac{1}{6x^4}, \quad (37)$$

$$w = \frac{p_{DM} + p_R}{\rho_{DM} + \rho_R} = \frac{1}{3(1+x)}, \quad w_R = \frac{q}{4x+3q}, \quad w_{DM} = 0, \quad (38)$$

$$c_s^2 = \frac{\dot{p}_{DM} + \dot{p}_R}{\dot{\rho}_{DM} + \dot{\rho}_R} = \frac{4}{9} \frac{1}{x+4/3}, \quad c_R^2 = \frac{1}{3} \frac{q}{x+q}, \quad c_{DM}^2 = 0. \quad (39)$$

ここでパラメータ  $q$  は、ダークマターのエネルギー密度とバリオンのエネルギー密度との割合を表すもので、 $\rho_{DM}/\rho_B = 3q/4 - 1$  で定義されている。バリオンをなくしたいのであれば、 $q \rightarrow \infty$  とすればよい。また  $\rho$  には本来  $\rho_\Lambda$  も含まれるべきであるが、最終散乱時のこの項は他の項に比べて非常に小さいので簡単のために無視しておく。これらの関係を使えば (33), (34) 式およびフリードマン方程式 (3) 式は

$$\eta = \frac{4}{3} \frac{x}{x+4/3} \left(1 - \frac{4}{3q}\right), \quad (40)$$

$$u^2 = \frac{1}{3} \frac{(q-4/3)x}{(x+q)(x+4/3)}, \quad (41)$$

$$H^2(x) = \frac{x+1}{2x^4} H_{eq}^2 + \frac{\Lambda}{3} \left(1 - \frac{x+1}{2x^4}\right) \quad (42)$$

と書くことができる。ゆらぎ  $\delta_R$  と  $\delta_{DM}$  は波数  $k$  により特徴づけられるが、 $a = a_{eq}$  でのハッブル半径  $d_H(t_{eq})$  とゆらぎの波長  $\lambda(a_{eq})$  との割合を表す  $\omega = 2\pi(d_H(t_{eq})/\lambda(a_{eq}))$  を使う方が便利である。これを使うと  $k^2/(H^2 a^2)$  は

$$\frac{k^2}{H^2 a^2} = \frac{2x^2}{1+x} \omega^2 \left( \frac{1}{1 + \frac{\Lambda}{3H^2} \left(1 - \frac{x+1}{2x^4}\right)} \right) \quad (43)$$

のように書ける。(31), (32) 式に現れるすべての量は  $x$  によって与えられるので、 $x$  に関する式に変形しておく。  $t$  に関する微分は次のように書き換えられる。

$$\frac{d}{dt} = HD, \quad (44)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = H^2 D^2 - \frac{3}{2} \left(H^2 - \frac{\Lambda}{3}\right) (1+w)D. \quad (45)$$

ここで  $D = x(d/dx)$  と置き、 $\dot{H} = -(3/2)(H^2 - \Lambda/3)(1+w)$  の関係を使った。これらを代入すれば (31), (32) 式は、それぞれ

$$\begin{aligned} D^2 \delta + \left[ \frac{5}{2} \frac{x}{1+x} - \frac{x}{x+4/3} - 1 + \frac{1}{2} \frac{\Lambda}{3H^2} \left(3 + \frac{1}{1+x}\right) \right] D \delta \\ + \left( \frac{1}{2} \frac{x^2}{(1+x)^2} + \frac{3x}{4} + \frac{9}{4} \frac{x^2}{x+4/3} - \frac{3x^2}{1+x} - 2 + \frac{3}{2} x \frac{x+4/3}{(1+x)^2} \frac{\Lambda}{3H^2} \right) \delta \\ = \frac{8}{9} \frac{\omega^2 x^2}{(x+1)^2 (x+4/3)} (x\tilde{\delta} - (x+1)\delta) \left( \frac{1}{1 + \frac{\Lambda}{3H^2} \left(1 - \frac{x+1}{2x^4}\right)} \right) \end{aligned} \quad (46)$$

および

$$\begin{aligned}
D^2\tilde{S} &+ \left[ \frac{1}{2} \frac{x}{x+1} - \frac{x}{x+4/3} + \frac{x}{x+q} + \frac{1}{2} \left( 3 + \frac{1}{1+x} \right) \frac{\Lambda}{3H^2} \right] D\tilde{S} \\
&+ \frac{\tilde{\omega}^2 x^3}{(x+q)(x+4/3)(x+1)} \left( \frac{1}{1 + \frac{\Lambda}{3H^2} \left( 1 - \frac{x+1}{2x^4} \right)} \right) \tilde{S} \\
&= \frac{\tilde{\omega}^2 x^2}{(x+q)(x+4/3)} \left( \frac{1}{1 + \frac{\Lambda}{3H^2} \left( 1 - \frac{x+1}{2x^4} \right)} \right) \delta
\end{aligned} \tag{47}$$

と書ける．ここで

$$\tilde{S} = \left( 1 - \frac{4}{3q} \right) S, \tag{48}$$

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{2}{3} \left( q - \frac{4}{3} \right) \omega^2 \tag{49}$$

と置いた．続いて放射とダークマターのゆらぎを表す式に書き換える．ゆらぎ  $\delta, S$  は放射とダークマターのゆらぎと

$$\Delta_R = \frac{3}{4} \delta_R = \frac{x+1}{x+4/3} \delta - \left( 1 - \frac{4}{3q} \right) \frac{x}{x+4/3} S, \tag{50}$$

$$\Delta_{DM} = \delta_{DM} = \frac{x+1}{x+4/3} \delta + \frac{4}{3q} \frac{x+c}{x+4/3} S \tag{51}$$

のように関係づけられ，これらを使いさらに (46), (47) 式を書き直すと，それぞれ

$$\begin{aligned}
&\left[ D^2 + \left( -1 + \frac{x}{x+q} + \frac{1}{2} \frac{x}{x+1} + \frac{3x+4/3}{2} \frac{\Lambda}{3H^2} \right) D \right. \\
&+ \frac{4}{3} \frac{1}{x+4/3} \left( \frac{x}{x+4/3} - 2 - \frac{3x+4/3}{2} \frac{x}{x+1} \frac{1}{q} + \frac{3}{2} \frac{\Lambda}{3H^2} \frac{x+4/3}{x+1} \frac{x}{q} \right) \\
&+ \left. \frac{2}{3} \frac{q \omega^2 x^2}{(x+q)(x+1)} \left( \frac{1}{1 + \frac{\Lambda}{3H^2} \left( 1 - \frac{x+1}{2x^4} \right)} \right) \right] \Delta_R \\
&= - \left( 1 - \frac{4}{3q} \right) x \left[ \frac{q}{(x+q)(x+4/3)} D - \frac{3}{2} \frac{1}{x+1} \left( 1 - \frac{\Lambda}{3H^2} \right) \right] \Delta_{DM}
\end{aligned} \tag{52}$$

および

$$\begin{aligned}
&\left[ D^2 + \left( \frac{1}{2} \frac{x}{x+1} + \frac{3x+4/3}{2} \frac{\Lambda}{3H^2} \right) D - \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{4}{3q} \right) \frac{x}{x+1} \left( 1 - \frac{\Lambda}{3H^2} \right) \right] \Delta_{DM} \\
&= \frac{4}{3} \frac{1}{x+4/3} \left[ D - \frac{x}{x+4/3} + 2 + \frac{3x+4/3}{2} \frac{x}{x+1} \frac{1}{q} \left( 1 - \frac{\Lambda}{3H^2} \right) \right] \Delta_R
\end{aligned} \tag{53}$$

となる．これが放射とダークマターの2流体に対するゆらぎの方程式である． $\Lambda$  項とバリオンの両方が含まれており，より一般的な式を導くことができた． $\Lambda$  項をゼロにすれば確かに Kodama & Sasaki の式になることが確認できる．次章ではこの方程式を数値的に解いた結果を示したいと思う．

### 3. 数値計算

#### 3.1 各パラメータの値

この章では、前節で得られた放射とダークマターの2流体に対するゆらぎの方程式を数値的に解いた結果を示す。手順は Peacock [7] のものに沿う。各パラメータの値は WMAP [1] から得られた値を使う。

$$H_0 = 71 \text{ (km/(s·Mpc))}, \quad (54)$$

$$1 + z_{eq} = 3234, \quad 1 + z_{LS} = 1090. \quad (55)$$

$H_0$  は現在のハッブル定数,  $z_{eq}$  は放射と物質 (バリオンとダークマター) の密度が等しくなるときのレッドシフトの値,  $z_{LS}$  は放射の最終散乱時のレッドシフトの値である。また, 現在のバリオン, ダークマター密度  $\rho_B, \rho_{DM}$  や宇宙定数  $\Lambda$  により, それぞれの密度パラメータは

$$\Omega_B = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_B, \quad \Omega_{DM} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{DM}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} \quad (c: \text{光速}) \quad (56)$$

と表せ, 値はそれぞれ  $\Omega_B = 0.044, \Omega_{DM} = 0.226, \Omega_\Lambda = 0.73$  である。

ここで  $\omega$  と  $k$  と  $l$  との関係性を記しておく。  $\omega = 2\pi(d_H(a_{eq})/\lambda(a_{eq})) = 2\pi c/(H_{eq}\lambda(a_{eq}))$  と  $k = 2\pi a/(\lambda(a)a_0) = 2\pi a_{eq}/(\lambda(a_{eq})a_0)$  の定義から, 次の関係が導かれる。

$$k = \frac{2\pi a_{eq}}{\lambda(a_{eq})a_0} = \frac{a_{eq}}{a_0} \frac{H_{eq}}{c} \omega \simeq 9.88865 \times 10^{-3} \omega \text{ Mpc}^{-1}. \quad (57)$$

ここで  $x_0 = a_0/a_{eq} = 1 + z_{eq} \simeq 3234$  と (42) 式から導かれる

$$H_{eq}^2 = H_0^2 \left( \frac{2x_0^4}{x_0 + 1} + \Omega_\Lambda \left( 1 - \frac{2x_0^4}{x_0 + 1} \right) \right) \quad (58)$$

の関係を用いた。そのとき  $\lambda$  は  $\omega$  と次のように関係づけられる。

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \simeq 635.39364 \frac{1}{\omega} \text{ Mpc}. \quad (59)$$

また多重極  $l$  は波長  $\lambda$  によって半径  $r_H$  の円周が何分割されるかを表す量で

$$l = \frac{2\pi}{\Delta\theta} = \frac{2\pi r_H}{\lambda} = k r_H = \frac{r_H H_{eq} \omega}{x_0 c} \simeq 138.53718 \omega \quad (60)$$

のように表せる。ここで  $r_H$  は観測者から最終散乱面までの共動半径で

$$\begin{aligned} r_H &= \int_{t_{LS}}^{t_0} \frac{cdt}{a} = c \int_{t_{LS}}^{t_0} \frac{da}{a\dot{a}} \\ &= \frac{\sqrt{2}c}{a_{eq} H_{eq}} \int_{x_{LS}}^{x_0} \frac{dx}{\left( x + 1 - \frac{\Lambda}{3H_{eq}^2} (x + 1 - 2x^4) \right)^{1/2}} \\ &\simeq 14009.72127 \text{ Mpc} \end{aligned} \quad (61)$$

で与えられる．ここで  $x_{LS} = a_{LS}/a_{eq} = \frac{1+z_{eq}}{1+z_{LS}} \simeq 3234/1090 \simeq 2.96697$  を用いた．また  $\Delta\theta$  は半径  $r_H$  の円において， $\lambda$  を見込む角度である．さらに最終散乱が起こったときの共動半径を与えておく．

$$\begin{aligned}
 D_{LS} &= \int_0^{t_{LS}} \frac{cdt}{a} = c \int_0^{t_{LS}} \frac{da}{a\dot{a}} \\
 &= \frac{\sqrt{2}c}{a_{eq}H_{eq}} \int_0^{x_{LS}} \frac{dx}{\left(x+1 - \frac{\Lambda}{3H_{eq}^2}(x+1-2x^4)\right)^{1/2}} \\
 &\simeq 283.66096 \text{ Mpc.}
 \end{aligned} \tag{62}$$

準備が整ったところで，(52), (53) 式を数値的に解いていく．まず各  $\omega$  に対する  $\Delta_R$  を求める．そのグラフが図 1 である．

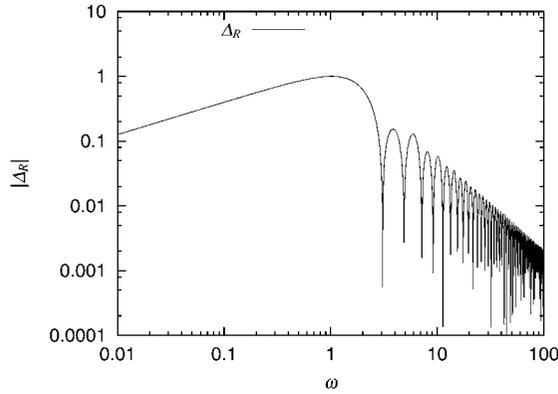


図 1 放射のゆらぎの振幅と  $\omega$

ここで運動量空間から実空間へのゆらぎのスペクトルの変換のために

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{4}{3} k^{3/2} \Delta_R \longrightarrow \bar{\Delta}_R \tag{63}$$

とおいておく．すると図 2 のようになる．

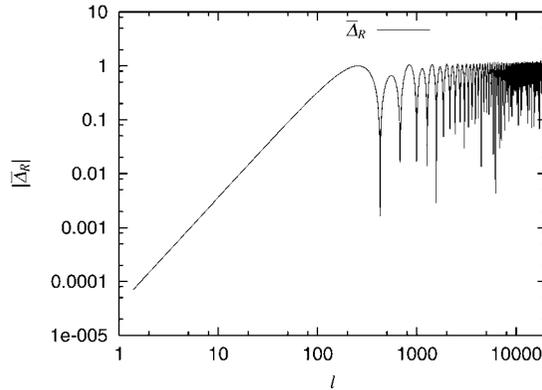


図 2 放射のゆらぎの振幅と  $l$

### 3.2 Silk damping 効果

次にフォトン-バリオンプラズマにおけるゆらぎのダンピング効果を考える．これは Silk damping 効果として知られている効果である．これは小さなスケールのゆらぎを消し去る効果となる．

再結合のとき，フォトンは一瞬でバリオンとの相互作用が切れてしまうわけではない．はじめは頻繁にバリオンと衝突していたものが，徐々に衝突の回数が減っていき，最終的にはほとんど衝突しなくなるという連続的なものである．はじめは短い距離しかまっすぐ進めなかったものが，徐々に長い距離を進めるようになりフォトンは拡散していく．だが依然としてバリオンと衝突するので，摩擦が働き，バリオンを引きずってしまう．これによりバリオンの密度ゆらぎはあるスケールでならされることになる．このようなバリオンゆらぎの減衰を Silk damping という．

Silk damping は  $\bar{\Delta}_R$  に対して次のように効いてくる [7] ．

$$\bar{\Delta}_R \rightarrow \exp(-l/l_s) \bar{\Delta}_R. \tag{64}$$

ここで  $l_s$  はフォトンの  $t_{LS}$  までの拡散距離を多重極で表したものである．図 2 に Silk damping の効果を加えたものが，図 3 である． $l$  の大きい部分のゆらぎがならされているのがわかる．

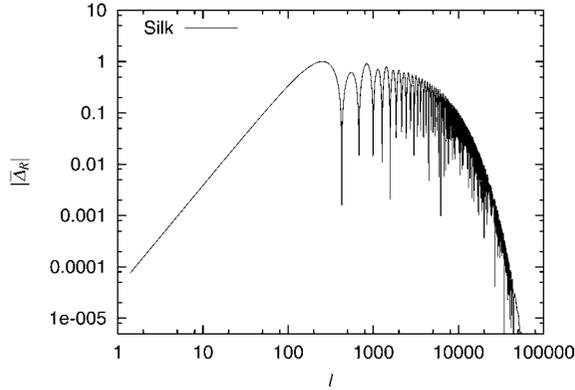


図3 Silk damping を加えたときの放射の振幅

### 3.3 Sachs-Wolfe 効果と Velocity 効果

Peacock の手法に従えばゆらぎのスペクトルは

$$\mathcal{T}_{3D}^2 = \left[ \left( \frac{1}{3} + f_{sw} \right)^2 + \frac{1}{3} f_v^2 \right] \bar{\Delta}_R^2 \quad (65)$$

と書ける．ここで

$$f_{sw} = -\frac{1}{4\omega^2 x} \left[ \left( \frac{1}{q} + \frac{1}{x} \right) + \left( 1 - \frac{4}{3q} \right) \frac{\bar{\Delta}_{DM}}{\bar{\Delta}_R} \right], \quad (66)$$

$$f_v = \frac{1}{\omega} \frac{H}{H_{eq}} x f(\Omega), \quad f(\Omega) \simeq \Omega^{0.6} \quad (67)$$

であり，それぞれ Sachs-Wolfe (SW) 効果，Velocity 効果である．SW 効果は自由になった光が最終散乱面から出るときに，そこにある重力ポテンシャルのゆらぎを這い上がってくるときに生じる効果である．Velocity 効果は最終散乱面での流体の運動におけるドップラー効果である．

SW 効果を加えると，図4のようになる．(65)式を見てもらえればわかるように，SW 効果は  $\omega^{-2}$  に比例して効いてくるので， $l$  の小さい部分のゆらぎが大きくなることは理解できると思う．後に見るが，CMB 放射のパワースペクトルの  $l$  の小さい部分が平坦なのはこの効果である．

そして Velocity 効果を加えたものが，図5である．(66)式から Velocity 効果は  $\omega^{-1}$  に比例して効いてくるのがわかる． $l \sim 90$  付近のへこみがならされている．

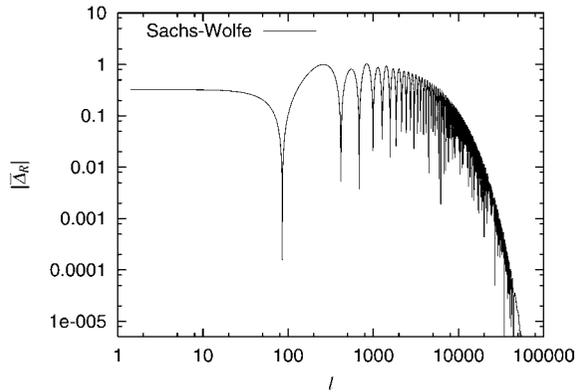


図 4 Sachs-Wolfe 効果を加えたときの放射の振幅

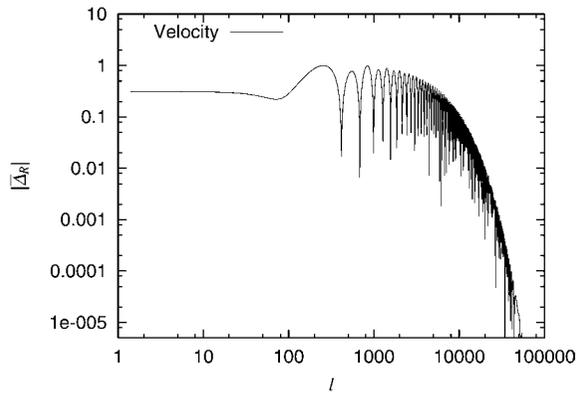


図 5 Velocity 効果を加えたときの放射の振幅

### 3.4 3次元から2次元への変換

最後に、ゆらぎは2次元に射影されたものが観測するので、次式によって3次元のゆらぎを2次元のゆらぎに変換してやる。

$$T_{2D}^2 = K^2 \int_0^\infty T_{3D}^2 \left( \sqrt{s^2 + K^2} \right) e^{-s^2 \sigma_r^2} \frac{ds}{(s^2 + K^2)^{3/2}}. \quad (68)$$

ここで

$$\sigma_r = 7 \sqrt{\Omega_b h^2} \text{ Mpc}, \quad (H_0 = 100h \text{ (km/(s} \cdot \text{Mpc)})) \quad (69)$$

$$K: 2 \text{次元の波数}, k: 3 \text{次元の波数}, (k = \sqrt{s^2 + K^2}) \quad (70)$$

である。すると図6のようになる。比較のためにボルツマン方程式を用いて解いている cmbfast の計算結果 [8, 9] を載せておく。cmbfast は WMAP のデータへのフィッティングに用いられているものであり、この計算結果に合やすことが我々の目的である。縦軸は  $\bar{\Delta}_R$  と関係する量であ

り，各  $l$  における温度ゆらぎの 2 乗を表す．このグラフは  $l \sim 10$  の値で各データを規格化してある．

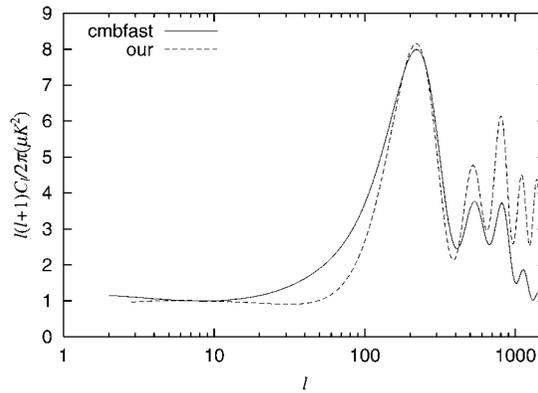


図 6 データの比較 点線が我々，実線が cmbfast [8, 9] の計算結果である．

グラフを見ると，ピークの位置や数， $l$  の小さいところでの平坦性，ファーストピークが最も高いことなどは一致していることが分かる．特にファーストピークはよく一致している．この点からここまで述べてきた手法の元でも，CMB 異方性スペクトルをある程度は再現できることが分かる．しかし  $l \sim 60$  付近での落ち込みやセカンドピーク以降の振幅の不一致等，再現できていない面もある．この点は後で議論することにして，次の節では各パラメータを変化させたときのスペクトルの変位を，cmbfast の結果と比較していく．これは我々のシミュレーションの正当性を見ることにもつながる．

#### 4. スペクトルの振動の原因

スペクトルの振動の原因は何であろうか [10]．その真相を探るために，まずゆらぎの成長についてまとめておく [11]．密度ゆらぎ  $\delta$  は次の表のような成長をする．

	放射優勢	物質優勢
$\lambda > d_H$	$a^2$	$a$
$\lambda < d_H$ かつ $\lambda > \lambda_j$	×	$a$
$\lambda < d_H$ かつ $\lambda < \lambda_j$	×	×

ここで  $\lambda_j$  はジーンズ波長と呼ばれるもので、

$$\lambda_j = \sqrt{\frac{\pi c_s^2}{G\rho a^2}} \quad (71)$$

で定義され、 $\lambda > \lambda_j$  の条件を満たせば重力不安定を起こし、ゆらぎは成長することができる。  $\lambda < d_H$  かつ  $\lambda > \lambda_j$  で放射優勢のときは放射の圧力と宇宙膨張がゆらぎの成長を妨げる。

$\lambda$  は  $a$  に比例して大きくなるが、 $d_H$  は放射優勢なら  $a^{3/2}$ 、物質優勢なら  $a^2$  に比例して大きくなるので、ホライゾンより大きな波長を持つゆらぎも、いずれホライゾンの中に入ってくる。物質優勢のときにホライゾンの中に入ってきたゆらぎを考えてみる。バリオンと堅く結びついた放射とダークマターのゆらぎは、どの時期においても重力によって収縮し、成長する。しかし、ホライゾンの中に入ってきた放射は、ある程度収縮すると放射圧のため膨張に転じる。しかしダークマターは重力相互作用しがないので、そのまま収縮する。膨張に転じた放射はある程度膨張した後、再び重力によって収縮に転じる。このようにダークマターは成長を続けるが、放射は収縮と膨張を繰り返すのである。放射が最も収縮したときに最終散乱を終えたとしたら、そこは他の部分より温度が高く観測される。また、最も膨張したときに最終散乱を終えたとしたら、そこは他の部分より温度が低くなる。これがスペクトルの各ピークに対応する。つまり、ファーストピークはホライゾンに入ってきてから一度だけ圧縮されたモードであり、セカンドピークは一度圧縮され膨張してきたモードである。以後、奇数番目のピークは圧縮されたモード、偶数番目のピークは膨張したモードに対応する。図 6 のようなスペクトルの振動はこのような機構によっていると理解できる。

以下に各  $\omega$  における、ゆらぎの時間的な成長を表すグラフを載せておく。各グラフとも、最終散乱 ( $x = x_{LS} = 2.96697$ ) までゆらぎの成長を計算した。グラフからホライゾンに入るまでは、各ゆらぎとも  $\delta \propto x^2$  に比例して成長しており、ダークマターはホライゾンに入った後も成長しつづけるが、放射は振動していることがよくわかる。 $\omega = 1.6$  のモードがホライゾンに入ってきた後、ちょうど一度だけ圧縮され最終散乱を迎えていることがわかる。これがファーストピークに寄与する。 $\omega = 5.5$  のときは、1 回だけ振動できたモードである。これがサードピークに寄与する。図 10 からは、ホライゾンに入ったダークマターが放射優勢の間 ( $x = 1$  まで) 鈍い成長をし、その後  $\delta_{DM} \propto x$  で成長する様子も見て取れる。

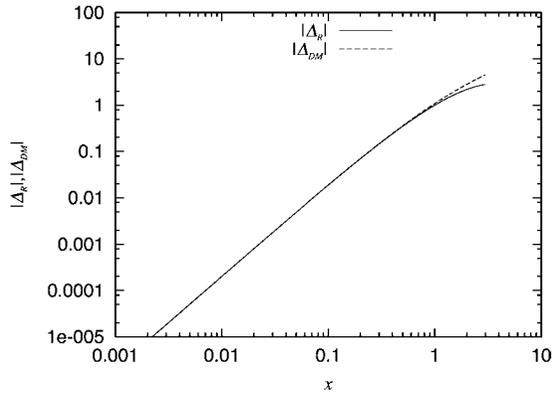


図 7  $\omega = 1.6$

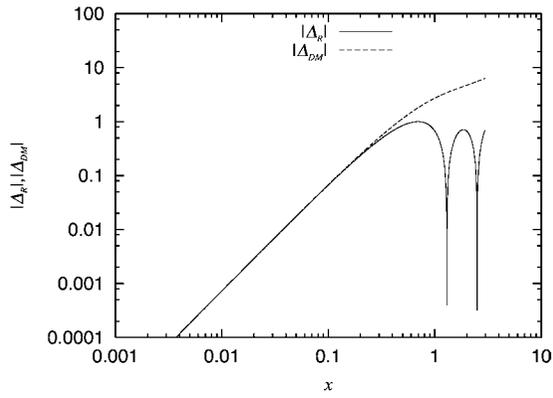


図 8  $\omega = 5.5$

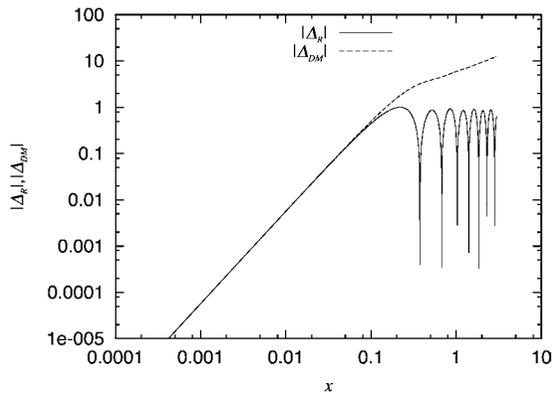


図 9  $\omega = 16$

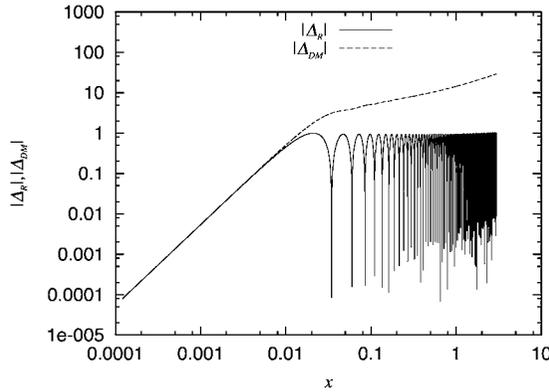


図 10  $\omega = 160$

### 5. パラメータの変化によるスペクトルの変位

この節では各パラメータを変化させたときのスペクトルの変位を，cmbfast の結果と比較していくことで我々のシミュレーションの正当性を考察していく．以下に  $\Omega_\Lambda, \Omega_B, H_0$  を変化させたときのグラフを載せておく．各パラメータの変化に対して，cmbfast の計算結果と我々の計算結果の 2 つのグラフが載せてある．

図 11 と図 12 は  $\Omega_\Lambda$  を変化させたときのスペクトルの変位を示す図である． $H_0 = 71, \Omega_B = 0.044$  に固定し，トータルの密度パラメータ  $\Omega$  が 1 になるように  $\Omega_\Lambda$  と  $\Omega_{DM}$  を変化させた．どちらの場合も  $\Omega_\Lambda$  を増加させるに従ってピークの高さが上がり，ピークの位置が右になることがみてとれる．ピークが右に移行する理由であるが，次のように考えられる． $\Omega_\Lambda$  を増加させると最終散乱面までの距離  $r_H$  が大きくなり ( (61) 式参照 )，最終散乱面を見込む角度  $\Delta\theta$  が減少するためピークの位置が  $l$  の大きい方へ移動する ( (60) 式参照 )．一方， $\Omega_\Lambda$  が増加すると  $\Omega_m$  が減少する．すると  $z_{eq} \simeq 2.39 \times 10^4 \Omega_m h^2$  により  $z_{eq}$  が  $z_{LS}$  に近づき，そして  $t_{LS}$  までの時間が長くなる．その結果  $t_{LS}$  でのホライズン  $D_{LS}$  が大きくなり ( (62) 式参照 )，またそのときのホライズンスケールの波長が大きくなる．これによりピークの位置が  $l$  の小さい方へ移動する ( (60) 式参照 )． $D_{LS}$  の増加率よりも  $r_H$  の増加率の方が大きいので，両方の効果が合わさった結果，ピークの位置は右へ移行する．またピークの高さが上がるのは， $\Omega_\Lambda$  の増加により  $\Omega_{DM}$  が少なくなるためである [12]．しかし，cmbfast の結果に比べ  $l \sim 60$  での落ち込み，振幅の大きさ等気になる点は多い．

図 13 と図 14 は  $\Omega_B$  を変化させたときのスペクトルの変位を示す図である． $H_0 = 71, \Omega_\Lambda = 0$  に固定し，トータルの密度パラメータ  $\Omega$  が 1 になるように  $\Omega_B$  と  $\Omega_{DM}$  を変化させた．どちらの場合も  $\Omega_B$  を増加させるに従ってピークの高さが上がることがわかる．バリオンが増加するとその重力により収縮する度合いが大きくなるが，膨張の振幅は変わらない．そのためバリオン

があると奇数番目のピークが上がる事が知られており、その点是我々の計算でもよく再現されている。しかし、やはり  $l \sim 60$  での落ち込みや振幅の違いが気になる。

図 15 と図 16 は  $H_0$  を変化させたときのスペクトルの変位を示す図である。 $\Omega_\Lambda = 0.73, \Omega_B = 0.044, \Omega_{DM} = 0.226$  に固定し、 $H_0$  を変化させた。どちらの場合も  $H_0$  を増加させるとピークが下がり、ピークの位置が左になることが確認できる。ここでも  $l \sim 60$  での落ち込みや振幅の違いが気になる。

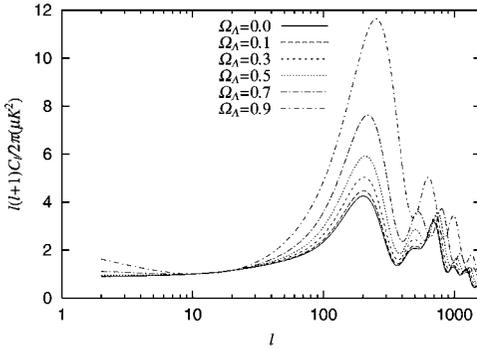


図 11  $\Omega_\Lambda$  の変化 (cmbfast)

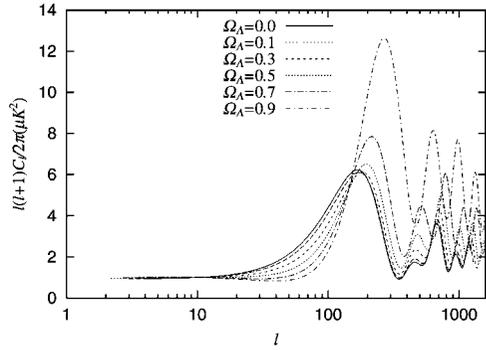


図 12  $\Omega_\Lambda$  の変化 (our)

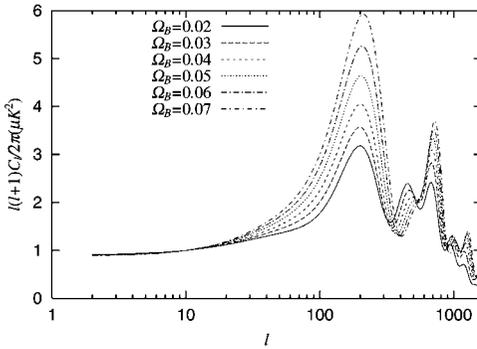


図 13  $\Omega_B$  の変化 (cmbfast)

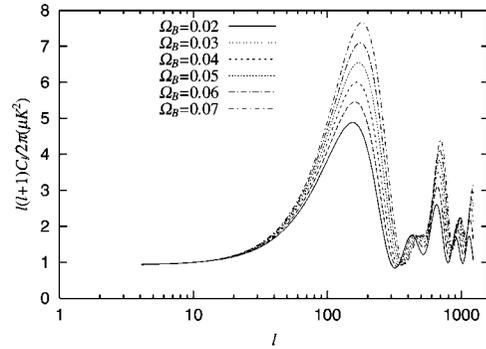


図 14  $\Omega_B$  の変化 (our)

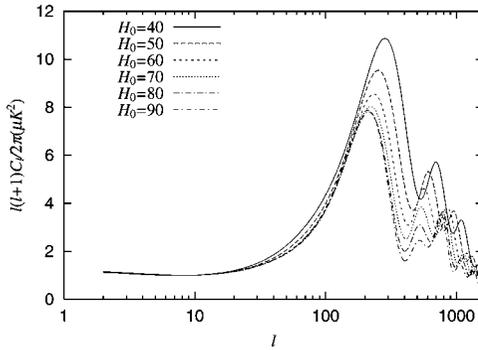


図 15  $H_0$  の変化 (cmbfast)

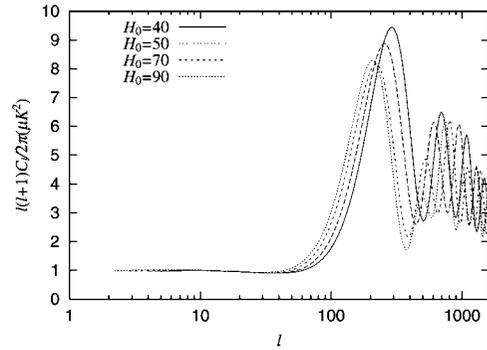


図 16  $H_0$  の変化 (our)

## 6. 議論と結論

図 6 を見ると、ピークの位置や数、 $l$  の小さいところでの平坦性、ファーストピークが最も高いことなどは一致していることがわかる。またファーストピークの高さはよくあっている。しかし、図 11, 12 を見るとそれは偶然のように思える。 $\Omega_\Lambda = 0.7$  以外では、ファーストピークの高さが一致していないからだ。また  $\Lambda$  項のあるモデルではどれも  $l \sim 60$  付近での落ち込みが気になる (図 11, 12, 15, 16)。そしてセカンドピーク以降のずれは著しい。ただし、これらは  $\Lambda$  項のある宇宙モデルについて特に重要な ISW (Integrated Sachs-Wolfe) 効果 [13, 14, 15, 16] を導入していないことを考えると、結論を出すのは早計である (ISW 効果は  $l \sim 60$  あたりの落ち込みを改善する効果となる [17])。しかし、 $\Lambda$  項のないモデルでも各ピークの高さが一致しないのは ISW 効果とは無関係である。この点に関しては、以下のような原因が考えられる。

1 つ目は Velocity 効果がうまく導入できていないのでは、という考えである。Velocity 効果にはバリエーションがいくつかある。例えば、Kodama & Sasaki [4, 5, 6] にあるようにダークマター静止系の速度を用いる方法である。しかし、この速度に変更して見たがうまくいかなかった。今のところ本論文で用いた Peacock の Velocity が最もよく観測に一致している。しかし、次に述べるような他の原因との組み合わせによって、うまくフィットする Velocity がある可能性は残されている。

2 つ目の原因として挙げられるのは、最終散乱の終了の仕方である。我々は最終散乱が瞬間的に起こったものと仮定 (つまり tight coupling の仮定) して議論を進めてきた。しかし実際、最終散乱はある程度の幅を持って行なわれる。これにより  $l$  の大きなゆらぎがならされる可能性がある。

3 つ目の原因としてニュートリノの取り扱いの問題がある。我々は放射エネルギーとしてニュートリノも含め、同じように振動するとして議論を進めてきたが、ニュートリノは他の物

質と相互作用しないので 1 回目の振動で切り離される．すると重力ポテンシャルにも影響が現れるので、相対的に 2 番目以降のピークの高さを変えることになる．放射の 20% 程度はニュートリノが占めるのでこの効果を見捨てるわけにはいかない．同様のことはダークマターにも言える．Peacock の Velocity ではダークマターを考慮せず、放射の運動のみを考えた．しかし実際は、1 回目の振動の時あたりまでダークマターも運動しているはずである．その効果も考慮すべきである．これは Velocity 効果のバリエーションの一つとして考えられる．

以上に述べた問題点は  $\Lambda$  項のある場合でも重要である．今後これらの問題点を改善していくことが課題である．いずれにせよ本論文で述べた近似的な手法でも、ある程度スペクトルを再現できることがわかった．また観測から存在がほぼ確かめられている  $\Lambda$  項を導入できたことは、今後観測とのフィッティングを考えるうえで重要なことである．その際には再イオン化の効果 [18]、再イオン化によって生じた新しい最終散乱面での Velocity 効果や SW 効果、そして ISW 効果等を考慮する必要がある．これらの効果を導入するには最終散乱から現在までのゆらぎが必要になる．この場合 tight coupling 近似が使えないので、新しいゆらぎの方程式が必要を導出しなければならない．これも今後の課題である．

## 謝 辞

この論文を作成するにあたり、ご指導下さった原哲也教授に感謝します．

## 参 考 文 献

- [1] D. N. Spergel et al., *ApJS*, **148** (2003), 175.
- [2] T. Padmanabhan, *Structure formation in the universe* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993)
- [3] A. Vale & J. Lemos, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **325** (2001), 1197.
- [4] H. Kodama & M. Sasaki, *Prog. Theo. Phys. Suppl.*, **78** (1984), 1.
- [5] H. Kodama & M. Sasaki, *Int. J. Mod. Phys.*, **1** (1986), 265.
- [6] H. Kodama & M. Sasaki, *Int. J. Mod. Phys.*, **2** (1987), 491.
- [7] J. A. Peacock, *Cosmological Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000)
- [8] U. Seljak & M. Zaldarriaga, *ApJ*, **469**, (1996), 437.
- [9] <http://cosmo.nyu.edu/matiasz/CMBFAST/cmbfast.html>
- [10] K. Imai, Thesis of Master, Kyoto-Sangyo University, 2002 (unpublished)
- [11] 池内了, 観測的宇宙論 (東京大学出版会, 1997)
- [12] 小松英一郎, *天文月報*, **96** (2003), 482.
- [13] W. Hu, N. Sugiyama & J. Silk, *astro-ph/9604166*
- [14] A. Cooray, *astro-ph/0112408*
- [15] W. Hu & N. Sugiyama, *Phys. Rev.* **D50** (1994), 627.

- [16] R. Sachs & A. Wolfe, *ApJ*, **147** (1967), 73.
- [17] W. Hu & N. Sugiyama, *ApJ*, **444** (1995), 489.
- [18] A. Liddle, D. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure* (Cambridge University Press, 2000)

## Perturbation Equations with $\Lambda$ Term and Baryon

Masahiro NAKAJIMA

### Abstract

Observational results of WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), reported in February 2003, have announced that  $\Lambda$  term (cosmological constant) exists. Until now, perturbation equations containing either  $\Lambda$  term or baryon have been studied. In this paper, perturbation equations with both  $\Lambda$  term and baryon are derived. Even though there are still some problems, numerical results of those equations are close to the cmbfast results. Using these results we have considered physical processes, implied in the CMB power spectrum.

**Keywords:**  $\Lambda$  term (cosmological constant), CMB (Cosmic Microwave Background), baryon, dark matter