Black Hole, Λ 項のある宇宙，及び 一様加速する系のエントロピーについて

酒　井　啓　太
梶　浦　大　吾
原　　　哲　也

（平成 16 年 9 月 13 日提出
平成 16 年 12 月 10 日修正）

要　旨

Black Hole のエントロピーは表面積に比例すると言われている．その意味を調べる中で，不確定性原理と簡明な物理的考察から，Black Hole の温度が表面重力に比例すること，及びエントロピーが表面積に比例することを導いた．同様な考察を Λ 項のある宇宙 (de Sitter space), 及び一様に加速する系（Rindler 座標）へ適用し各々の温度を推定し，エントロピーが表面積に比例する関係を導いた．各々について高次元の場合を調べ，矢張りエントロピーは（超）表面積に比例することを見出した．また，Black Hole の体積は見かけより大きいという解釈ついて議論した．

キーワード：Black Hole, エントロピー，Λ 項，de Sitter space, Rindler 座標

1.　Introduction

Black Hole の熱力学が議論されだしてより 30 年近く経過するが，その基本的な概念は未だに不明な点が多い [1,2,3]．重力場の量子化である量子重力理論もまだ完成には程遠く，模索の状態にある．しかしいくつかの注目に値する事項が受け入れられてきており，その中でも Black Hole のエントロピーがその表面積に比例するという主張は，Black Hole の熱力学の特徴を際立たせている [1,4].

それらの考察は曲がった時空における場の量子論の構成により行われている [5]．しかしその詳細に立ち入ることなく，エントロピーという示量変数が，面積に比例するという一見理解し難い関係の導出を試みた．その中で，いくつかの事項は簡明な物理的仮定を行うと，導出することが可能となる．その仮定とは量子力学の不確定性関係であり，熱力学の法則，もしくはその大きさの波長をもつ粒子（光子）からなる，黒体放射のガス（光子）球として Black Hole を考えるものである．その導出を意味付けると，Black Hole の体積は見かけより大きいという解釈になる．

最近 WMAP の観測 [6] により，宇宙に Λ 項のあることが確かとなってきた．この場合には宇宙に地平面が形成され，宇宙のエントロピーが議論されている [7]．ここでも宇宙のエントロピーは地平面の面積に比例することが主張されている．Black Hole の時と同様に，宇宙全体へ不確定性原理を適用し，その波長をもつ粒子の存在が，宇宙項の密度を形成するという仮定から宇宙のエントロピーを推定し，それが地平面の面積に比例することを導いた．

同様の考察を Minkowski 時空で一様加速している系（Rindler 座標）に適用した．その系での特徴的長さより温度は推定されるが，この系での境界面とエントロピーの関係については必ずしも明らかではない．しかし，この加速が放射エネルギーの重力的加速に相当すると考えると，この系の単位面積当たりのエントロピーは一定となる関係が得られた．

単位系は，多くの場合省略せずに示しているが，時として $G = \hbar = c = k_{\rm B} = 1$ を用いている．以下 2 節では Black Hole について，3 節では Λ 項のある宇宙について，4 節で Rindler 系について述べ，5 節では多次元への適用を考察する．そして 6 節ではまとめと問題点を議論する．

2. Black Hole のエントロピー

古典的な Black Hole は parameter としては，質量，角運動量，電荷のみであることが知られており，内部自由度を推定させるものはなく，エントロピーの概念とは無縁である．古典的な見方からするとそれは巨大ではあるが，自由度の点からすると 1 つの粒子であり，エントロピーはゼロである．一方光子のみからでも Black Hole は形成され [8,9,10]，その形成以前には相当なエントロピーがある．そして，形成された後の Black Hole のエントロピーは量子論的な考察によると，表面積に比例するという．この状況を簡明に理解するにはどうしたら良いかを調べてみる．

Black Hole は球対称，電荷は無いとし，その温度を不確定性関係を用いて推定する．質量を M，その重力半径を $r_{\rm g} = 2GM/c^2$ とすると，この大きさに対応する質量ゼロの粒子のエネルギー ΔE は

$$\Delta E \simeq \Delta pc \simeq \frac{\hbar c}{2\Delta x} \simeq k_{\rm B}T \tag{2.1}$$

と導かれる．ここで $\Delta x \Delta p \simeq \hbar/2$,　$\Delta E \simeq k_{\rm B}T$ の関係を用いた．$\Delta x \simeq c_1 r_g$ とすると，温度 T は (2.1) 式より

$$T \simeq \frac{\hbar c}{2c_1 k_{\rm B}\left(\frac{2GM}{c^2}\right)} = \frac{\hbar c^3}{4c_1 GMk_{\rm B}} \simeq \frac{m_{\rm pl}c^2}{4c_1 k_{\rm B}}\frac{m_{\rm pl}}{M} \tag{2.2}$$

となる．ここで $m_{\rm pl} = \sqrt{\hbar c/G}$ はプランク質量である．いま $c_1 = 2\pi$ とおくと

$$T \simeq \frac{\hbar c^3}{8\pi GMk_{\rm B}}(= T_{\rm BH}) \tag{2.3}$$

が得られ，Hawking の導いた温度と一致する [3].

2.1　熱力学的視点

熱力学の第一法則より，エントロピー S に対しては，$U = Mc^2$ とすると，(2.3) 式 の T より，

$$S = \int dS = \int \frac{dU}{T} = \int \frac{8\pi GMk_{\mathrm{B}}c^2 dM}{\hbar c^3} = \frac{4\pi GM^2 k_{\mathrm{B}}}{\hbar c} \tag{2.4}$$

となる．Black Hole の表面積 $A = 4\pi r_{\mathrm{g}}^2$ を用いると

$$S/k_{\mathrm{B}} = \frac{Ac^3}{4G\hbar} = \frac{A}{4\ell_{\mathrm{pl}}^2} \simeq 10^{77}(M/M_{\odot})^2 \tag{2.5}$$

が成立し，エントロピーが表面積に比例するという関係が因子 1/4 も含め得られる．ここで $\ell_{\mathrm{pl}} = \sqrt{G\hbar/c^3}$ はプランク長さである．

これより少なくともエントロピーが Black Hole の表面積に比例するという関係式が得られたが，残念ながらその微視的なエントロピーの起源が分かり難い．特に統計力学的なエントロピーの定義であるBoltzmann の関係式 $S = k_{\mathrm{B}} \log W$ における状態数の総量 W が，Black Hole においてはどのような意味をもっているかについては，この導出において不明である．

また，通常の星のエントロピーは，その粒子数を N とすると $S/k_{\mathrm{B}} \sim N \sim 10^{57}\,(M/M_{\odot})$ であるのに対し，Black Hole のエントロピーは(2.5) 式 のように大きく，その大きな違いが現れる原因も物理的に理解し難い．

2.2　統計力学的視点

この $S \propto A$ の関係の別の導出の試みとして，質量を M，温度 T の黒体放射のガス球に対して，そのエントロピーを推定する．放射密度を $\epsilon = \tilde{a}T^4$ とすると体積は $V = Mc^2/\epsilon$ であり，エントロピー密度は $s = 4\tilde{a}T^3/3$ であるから，総エントロピーは $S = sV = 4Mc^2/(3T)$ である．これに (2.2) 式の温度を代入し，表面積 A を用いると

$$\frac{S}{k_{\mathrm{B}}} = \frac{c_1}{3\pi}\frac{A}{\ell_{\mathrm{pl}}^2} = \frac{1}{4}\frac{c_1}{3\pi/4}\frac{A}{\ell_{\mathrm{pl}}^2} \tag{2.6}$$

となり，$c_1 = 3\pi/4$ とおくと，$S/k_{\mathrm{B}} = A/(4\ell_{\mathrm{pl}}^2)$ の関係式が導かれる．

この導出は Black Hole の大きさからくる不確定性関係により温度 T を推定し，その温度 T の黒体放射によりBlack Hole が構成されているとしたら，そのエントロピーは表面積に比例するという関係が得られることを示している [1].

この導出において，果たして Black Hole の中での熱平衡に意味があるのか等多くの問題があるが，少なくとも統計力学的によく知られたボーズ粒子である光子の，黒体放射のエントロピーを用いることにより，Black Hole のエントロピーの物理的な意味の解釈がある程度可能となる．また，Black Hole が温度 T の黒体放射を放出しているという Hawking の主張も，仔細な議論に立ち入らない限り，ある面で受け入れ易い [3].

しかしながら，問題の 1 つは上で想定した体積 $V = Mc^2/\epsilon(= V_{\rm BH})$ である．それは通常予想される Black Hole の体積 $V_\star \sim 4\pi r_{\rm g}^3/3$ よりも桁違いに大きいことである．その比をとると

$$\frac{V_{BH}}{V_\star} = \frac{V}{\frac{4}{3}\pi r_{\rm g}^3} = \frac{\frac{15}{\pi^2}\frac{(3\pi G)^4 M^5}{\hbar c^7}}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{2GM}{c^2}\right)^3} = \frac{45}{4\pi^3}\frac{G}{\hbar c}M^2\frac{(3\pi)^4}{2^3} = \frac{45\times 81}{32}\pi\left(\frac{M}{m_{\rm pl}}\right)^2 \tag{2.7}$$

となり，$M \gg m_{\rm pl}$ であるから $V_{\rm BH} \gg V_\star$ である．これを解釈しようとすれば， Black Hole は平坦ではなく時空は歪んでおり，特に動径方向の距離を推定するのは，一般に困難であるとし体積は $V = V_{\rm BH}$ とすることである．例えば，Black Hole が形成される以前の物質があるときの時空構造を考えると，球対称として動径方向の物質分布 $M(r)$ を適当に取れば，(r, r) 成分の計量 $(1 - 2GM(r)/(rc^2))^{-1}$ をある面ではどれだけでも大きくすることが出来，結果としてその固有体積も大きくすることが出来る．

もしくは，少しでも回転があれば Kerr 解となり，又電荷があれば Reissner-Nordstrom 解，回転と電荷があれば，Kerr-Newman 解となり，これらの場合は Black Hole の体積については，際限のないものになる．厳密に言えば，むしろ総角運動量がゼロという方が考え難いわけであり，その意味で，量子論的な考察をする場合には Black Hole の体積については柔軟に考える余地が有る．

議論の視点を少し変えると, 系の大きさを $L(\propto M)$ とすると, 温度は不確定性関係より, $T \propto 1/L$ となり, 単位体積当たりのエントロピーは $s \propto T^3 \propto 1/L^3$ より, 系全体のエントロピーを$S \propto sV \propto L^2$ とするためには，V〜L^5 でなければならないということになる．

つまり，この導出でのエントロピーを統計力学的に解釈しようとすれば，体積の増加を受け入れざるを得ない．その意味で $S = sV$ の段階では S は明らかに示量変数であり，$S = 4Mc^2/(3T)$ として，不確定性関係からの$T \propto M^{-1}$ を用いると，$S \propto A$ となり，見かけの上で示量変数でなくなる．しかし解釈は時空の歪みにより体積が増大して，結果としてエントロピーは体積に比例する示量変数と考える訳である．

これらについては次の 2.3 節で引き続き議論する．

2.3 重力収縮する黒体放射球

超大質量星は放射圧が優勢で，その重力不安定性から崩壊すると考えられている．オーダーの推定ではあるが，重力エネルギーと放射エネルギーが等しいとすると $GM^2/r \simeq \epsilon V/3$ が成立し，$M \simeq \epsilon V/c^2$ を用いると $r \simeq r_{\rm g}$ の関係式を得る．半径 r 程度に，質量 M，温度 $T(= T_\star)$ の黒体放射があると，$r \simeq (3Mc^2/(4\pi\epsilon))^{1/3}$ であり，これが，重力半径程度とすれば，温度 $T_\star$ に対して，

$$\frac{k_{\rm B}T_\star}{m_{\rm pl}c^2} \simeq \left(\frac{45}{32\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{m_{\rm pl}}{M}\right)^{1/2} \tag{2.8}$$

の関係が得られる．ここで $\tilde{a} = k_B^4/(\hbar^3 c^3)$ を用いた．これは $T_\star \propto M^{-1/2}$ であり，これよりエント

ロピー $S = 4Mc^2/(3T_\star)$ を求めると，

$$S \simeq \frac{2}{9}\left(\frac{4}{25\pi}\right)^{1/4}\left(\frac{A}{\ell_{\rm pl}^2}\right)^{3/4} \simeq 10^{57}\,(M/M_\odot)^{3/2} \tag{2.9}$$

となり，上で導いた結果 ($S \propto A$) と異なる．つまり Black Hole を形成する前の光子の総エントロピーは，Black Hole を形成すると，因子 $\sim (A/\ell_{\rm pl}^2)^{1/4} \simeq 10^{20}(M/M_\odot)^{1/2}$ の大きさ程度増加することになる．

超大質量星は $r \gg r_{\rm g}$ からでも，重力不安定で崩壊する． $r \gg r_{\rm g}$ においては，時空の歪みは大きくなく，ガス球の収縮はほぼ断熱変化と考えればエントロピーは不変であり，ほぼオーダーとして，Black Hole を形成する前の星のエントロピーはこの程度である．所が Black Hole を形成するとエントロピーが不連続的に因子 $\sim (A/\ell_{\rm pl}^2)^{1/4}$ 程度大きくなる．この原因は $S \simeq Mc^2/T$ であるから，温度 T が (2.2) 式の$T_{BH} \propto m_{\rm pl}c^2\,(m_{\rm pl}/M)$ と(2.8) 式の $T_\star \propto m_{\rm pl}c^2\,(m_{\rm pl}/M)^{1/2}$ の違いによる．

体積が増加するという解釈を推し進めると，$Mc^2 \propto \epsilon V \propto T_\star^4 V_\star \propto T_{\rm BH}^4 V_{\rm BH}$ であるから，$T_{\rm BH} \propto T_\star(V_\star/V_{\rm BH})^{1/4} \propto T_\star(m_{\rm pl}/M)^{1/2}$ より，Black Hole を形成する前と後では星の温度は急激に減少し，それがエントロピーの増加になっている．断熱変化であれば $T \propto (1/V)^{1/3}$ であるが，自由膨張であれば 内部エネルギーが不変より ($U \propto T^4 V = const$)，もしくは熱力学的に

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \Bigg/ \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{c_V V}\left(p - T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\right) = -\frac{T}{4V} \tag{2.10}$$

であるから$T \propto (1/V)^{1/4}$ が成立する．ここで p は圧力，$c_{\rm V}$ は定積比熱である．つまり，Black Hole 形成による体積増加に対して，光子が自由膨張しその結果としてエントロピーが増加したと考えられる．つまり Black Hole は，例えて言うなら入り口は狭いが奥行きの深い円錐状の洞窟，もしくは袋 (Bag) と考える訳で，果たしてこのような解釈が妥当かどうかは，議論が分かれる所と思われるが，これも $S \propto A$ を簡明な仮定のもとで理解しようとする一つの試みである．

2.3.1　宇宙初期の Black Hole の形成

宇宙初期等において温度が十分高温の場合，放射密度のゆらぎが大きいとして，初期宇宙での Black Hole 形成が議論されている [8,9,10]．その視点から見ると体積 $V_\star$ 内に Mc^2 程の放射エネルギーがあるためには，温度は T_γ として

$$Mc^2 = \tilde{a}T_\gamma^4 V_\star \tag{2.11}$$

を充たすと考える．すると $V_\star \propto M^3$ より $T_\gamma \propto M^{-\frac{1}{2}}$ となる．この温度 T_γ の $V_\star$ 内での総エントロピー$S_\gamma = \frac{4}{3}\tilde{a}T_\gamma^3 V_\star$ より，2.3 節と同様に $S_\gamma \propto M^{\frac{3}{2}}$ を得る． $S_{\rm BH}/k_{\rm B} = A/(4\ell_{\rm pl}^2)$ とおくとその比は

$$\frac{S_{\rm BH}}{S_\gamma} = \frac{3}{2}\left(\frac{45\pi}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{M}{m_{\rm pl}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{8}\left(\frac{T_\gamma}{T_{\rm BH}}\right) \tag{2.12}$$

となり，$S_{\rm BH}T_{\rm BH} \sim S_\gamma T_\gamma \sim U(\sim Mc^2)$ の関係が成立している．この視点からも，Black Hole のエントロピーは $T_\gamma/T_{\rm BH}(\propto M^{\frac{1}{2}})$ だけ増加している．その問題点は，基本的には 2.3 節の Black Hole の形成の場合と同様である．

2.3.2　宇宙半径内のエントロピー

宇宙初期の放射優勢時において，宇宙半径 $\sim ct$ 内でのエントロピーを考えると，放射密度は $\rho = 3/(32\pi Gt^2)$ であるから，$M \simeq \rho(ct)^3 \sim T^{-2}$ が成立し，矢張りそのエントロピーは $S \simeq 4M/3T \sim M^{3/2}$ を得る．一方$M \simeq \rho(ct)^3 \simeq c^3t/G$ より$ct \simeq GM/c^2$ で，ほぼ Schwarzschild の半径でもあり，Black Hole と見なすとそのエントロピーは表面積に比例する$(S \propto M^2)$ はずである．これも問題点は，基本的には 2.3 節の Black Hole の形成の場合と同様である．

3.　Λ 項のある宇宙

WMAP の観測により我々の宇宙は Λ 項が存在し，現在宇宙は加速状態に入ったと言える [6]. Λ 項のある宇宙モデルとして，ここでは de Sitter 宇宙を考える．その計量は [11]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{3.1}$$

であり，特徴的な事項は宇宙に $\ell_\Lambda = \sqrt{3/\Lambda}$ の地平面が存在することである．

この距離 ℓ_Λ に対して不確定性関係を用いると，この宇宙における粒子のエネルギー ΔE は (2.1) 式 と同様に

$$\Delta E \simeq \Delta pc \simeq \frac{\hbar c}{2\Delta x} \simeq k_{\rm B}T \tag{3.2}$$

と推測され，今 $\Delta x = c_2\ell_\Lambda$ とおくと温度 T は

$$k_{\rm B}T = \frac{\hbar c}{2c_2\ell_\Lambda} = \frac{\hbar c}{2c_2\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}} = \frac{\hbar c}{2c_2\sqrt{3}}\sqrt{\Lambda} \tag{3.3}$$

と与えられる．ここで $c_2 = \pi$ ととればGibbons & Hawking (1977) [11] の導いた$k_{\rm B}T = (\hbar c\Lambda^{\frac{1}{2}})/(\sqrt{12}\pi)$ となる．

また宇宙項は真空のエネルギー密度 ρ_Λ に対して

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \tag{3.4}$$

と対応しているので，ℓ_Λ の波長に相当する粒子がそのエネルギー密度に相当するだけ存在したとする．すると，粒子数密度 n_Λ は粒子のエネルギー $\Delta E = \hbar c/2c_2\ell_\Lambda$ より

$$n_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda c^2}{\Delta E} = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}\frac{2c_2\ell_\Lambda}{\hbar c} = \frac{3c_2}{4\pi G}\frac{c^3}{\hbar\ell_\Lambda} \tag{3.5}$$

となる．この粒子の宇宙全体の個数は体積 V を今

$$V = \frac{4}{3}\pi\ell_\Lambda^3 \tag{3.6}$$

とおくと

$$N_\Lambda = n_\Lambda V = \frac{3c_2}{4\pi G}\frac{c^3}{\hbar\ell_\Lambda}\frac{4}{3}\pi\ell_\Lambda^3 = c_2\left(\frac{c^3}{G\hbar}\right)\ell_\Lambda^2 = c_2\frac{\ell_\Lambda^2}{\ell_{\rm pl}^2} \tag{3.7}$$

である．一般に密度，温度が一定ならばエントロピーは粒子数に比例するから，地平面の面積を $A = 4\pi\ell_\Lambda^2$ と考えると，

$$\frac{S}{k_{\rm B}} \sim N_\Lambda \sim \frac{c_2}{4\pi}\frac{A}{\ell_{\rm pl}^2} \tag{3.8}$$

となり，ここで $c_2 = \pi$ とおくと，Gibbons & Hawking の言う $S/k_{\rm B} = A/(4\ell_{\rm pl}^2)$ が得られ [12]，エントロピーが地平面の面積 A に比例する関係式が導かれた．

この粒子のエントロピーを，光子のようなボーズ粒子と考えると，粒子数とエントロピーは比例しており [12]($\frac{N}{S/k_{\rm B}} \simeq 0.2776$)

$$\frac{S}{k_{\rm B}} \simeq \frac{N}{0.2776} \simeq 4c_2\frac{\ell_\Lambda^2}{\ell_{\rm pl}^2} \tag{3.9}$$

が得られる．これは

$$\frac{S}{k_{\rm B}} \simeq \frac{c_2}{\pi}\frac{A}{\ell_{\rm pl}^2} \tag{3.10}$$

を意味しており，$c_2 = \pi/4$ と考えると，$S/k_B \simeq A/(4\ell_{\rm pl}^2)$ となる．

注意すべきは，宇宙項は物質と考えると圧力 p と物質の（エネルギー）密度 ρ の間に $p = -\rho c^2$ という状態方程式を満たし，通常の粒子や光子のようには考えられない．それ故，エントロピーと粒子数の比例関係には問題が残る．

光子とする別の問題点は，そのエネルギー密度が $\epsilon_\gamma = \tilde{a}T^4$ となるので，ρ_Λ との比をとると

$$\frac{\rho_\Lambda}{\rho_\gamma} = \frac{\rho_\Lambda}{\frac{\epsilon_\gamma}{c^2}} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}\frac{c^2}{\tilde{a}T^4} \simeq \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}\frac{15\hbar^3c^5}{\pi^2\left(\frac{\hbar c}{2c_2\sqrt{3}}\sqrt{\Lambda}\right)^4} = \frac{15c^3}{8\pi G\hbar}\frac{\left(2c_2\sqrt{3}\right)^4}{\pi^2\Lambda} \simeq \frac{90}{\pi^3}c_2^4\left(\frac{\ell_\Lambda}{\ell_{\rm pl}}\right)^2 \tag{3.11}$$

であり，$\ell_\Lambda \gg \ell_{\rm pl}$ を考慮すると $\rho_\Lambda \gg \rho_\gamma$ となる．宇宙定数が示す物質密度 ρ_Λ とその宇宙の温度 T が示す放射密度 ρ_γ の間には大きな隔離がある．

一方，零点振動の真空のエネルギー密度 $\rho_{\rm pl}$ は [13,14]

$$\rho_{\rm pl} \simeq \frac{m_{\rm pl}}{\ell_{\rm pl}^3} \simeq \frac{\hbar}{\ell_{\rm pl}^4 c} \tag{3.12}$$

とすると，その ρ_Λ との比は

$$\frac{\rho_\Lambda}{\rho_{\rm pl}} = \frac{\frac{\Lambda c^2}{8\pi G}}{\frac{\hbar}{\ell_{\rm pl}^4 c}} = \frac{3}{8\pi}\left(\frac{\ell_{\rm pl}}{\ell_\Lambda}\right)^2 \tag{3.13}$$

となる．(3.11) 式より

$$\frac{\rho_\Lambda}{\rho_\gamma} \times \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{\mathrm{pl}}} \simeq \frac{90}{\pi^3} c_2^4 \left(\frac{\ell_\Lambda}{\ell_{\mathrm{pl}}}\right)^2 \times \frac{3}{8\pi} \left(\frac{\ell_{\mathrm{pl}}}{\ell_\Lambda}\right)^2 \simeq O(1) \tag{3.14}$$

となり

$$\rho_\Lambda \simeq \sqrt{\rho_\gamma \rho_{\mathrm{pl}}} \tag{3.15}$$

という興味ある結果が得られる．

これは宇宙の地平面の大きさ ℓ_Λ から起因する不確定性原理からの温度 T の放射密度 ρ_γ と，プランクスケールまでの零点振動の寄与を考慮にした真空エネルギー（プランク密度）ρ_{pl} の幾何平均が宇宙定数の密度 ρ_Λ を決めているという式である．次元解析からでもこの関係は得られるが，宇宙定数，もしくは Dark Energy の密度 ρ_Λ の原因が全く不明な現在，この関係に意味があるのかどうか今後検討したい．

4.　一様加速する系

一様加速する系の観測者は，その加速 κ に比例する温度 $k_B T = \hbar\kappa/(2\pi c)$ の黒体放射を観測するという．これは Unruh 効果と呼ばれており，Minkowski 時空において観測者によって粒子が発生したり消滅したりする例として，議論される [15]．ここでは加速する源として重力を仮定する．

系が加速しているのでその加速 κ に相当する特徴的な長さ $\ell_\kappa = c^2/\kappa$ が求まる．今 $\Delta x = c_3 \ell_\kappa$ として不確定性関係を適用すると，光子（粒子）のエネルギー ΔE は(2.1) 式 と同様に

$$\Delta E \simeq \Delta pc \simeq \frac{\hbar c}{2\Delta x} \simeq \frac{\hbar c}{2c_3 \ell_\kappa} \simeq \frac{\hbar\kappa}{2c_3 c} \simeq k_{\mathrm{B}} T \tag{4.1}$$

と求められ，温度と加速 κ の間には

$$k_{\mathrm{B}} T \simeq \frac{\hbar\kappa}{2c_3 c} \tag{4.2}$$

の関係が得られ，$c_3 = \pi$ とおくと Unruh の結果と一致する [16]．

この温度と地平面の単位面積当たりのエントロピーの関係

$$\frac{S}{Ak_{\mathrm{B}}} = \frac{1}{4\ell_{\mathrm{pl}}^2} \tag{4.3}$$

が主張されている [17]．これは Black Hole の場合，及び de Sitter 宇宙と同様，地平面の単位面積あたりのエントロピーが等しいという主張がなされ議論されている [2]．それがどうして導出されるかについて検討する．

温度 T の黒体放射に対して観測者が推定するエントロピーであるが，一つの方法として以下のように考える．観測者は一様加速 κ を感じているから，それがこの放射による重力と仮定し，

その質量を M，その領域を V とすると

$$M = \frac{\tilde{a}T^4}{c^2}V \tag{4.4}$$

が得られる．この質量による重力加速度を κ とすると

$$\kappa = \frac{GM}{V^{\frac{2}{3}}} = \frac{G\tilde{a}T^4}{c^2}\frac{V}{V^{\frac{2}{3}}} = \frac{G\pi^2}{15}\frac{k_B^4T^4}{\hbar^3c^3}\frac{V^{\frac{1}{3}}}{c^2} \tag{4.5}$$

であり，ここで $k_BT = \hbar c/(2c_4\ell_\kappa)$, $\kappa = c^2/\ell_\kappa$ を用いると

$$\frac{c^2}{\ell_\kappa} = \frac{\pi^2}{15}\frac{1}{16c_4^4}\frac{G\hbar c}{c^2}\frac{V^{\frac{1}{3}}}{\ell_\kappa^4} \tag{4.6}$$

より

$$V^{\frac{1}{3}} = \frac{15\times 16c_4^4}{\pi^2}\frac{\ell_\kappa^3}{\ell_{\rm pl}^2} \tag{4.7}$$

となる．

総エントロピーを $S = 4\tilde{a}T^3V/3$ として，その単位面積当たりのエントロピー$S/V^{2/3}$ を考えると

$$\frac{S}{k_BV^{2/3}} = \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{15}\frac{k_B^3T^3}{\hbar^3c^3}V^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{15}\frac{\frac{15}{\pi^2}\times 16c_3^4\frac{\ell_\kappa^3}{\ell_{\rm pl}^2}}{8c_3^3\ell_\kappa^3} = \frac{8}{3}c_3\frac{1}{\ell_{\rm pl}^2} \tag{4.8}$$

となり，$c_3 = 3/32$ をとり $A = V^{\frac{2}{3}}$ とすると

$$\frac{S}{Ak_B} = \frac{1}{4\ell_{\rm pl}^2} \tag{4.9}$$

が得られ，単位面積当たりのエントロピーが $1/(4\ell_{\rm pl}^2)$ という関係が導かれる．

これは加速が温度 T の放射エネルギーの重力によるものと想定して，一様加速する観測者の単位面積当たりのエントロピーを導出した．一様加速する系の地平面の面積は無限大であるから単位面積当たりのエントロピーを考えた訳で，オーダーの推定ではあるが $S/(k_BA) = 1/(4\ell_{\rm pl}^2)$ の関係が得られた．Black Hole の場合と共通する，事象地平面あたりのエントロピーが一定という関係である．

5.　多次元の場合への考察

上の 3 つの場合について $(4+n)$ 次元（空間的には $(3+n)$ 次元）の時にどうなるのかを考察する．

5.1　Black Hole の場合

$(4+n)$ 次元の Schwarzschild の計量は

$$ds^2 = -h(r)c^2dt^2 + h(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega_{2+n}^2 \tag{5.1}$$

と表され，ここで $d\Omega^2_{2+n}$ は $(3+n)$ 次元単位球の表面の線素より $h(r)$ は

$$h(r) = 1 - \left(\frac{r_H}{r}\right)^{n+1} = 1 - \frac{16\pi}{n+2}\frac{G(n)}{A_{n+2}}\frac{M_{\rm BH}}{c^2}\frac{1}{r} \tag{5.2}$$

である．A_{n+2} は単位球の表面積であり

$$A_{n+2} = \frac{2\pi^{\frac{n+3}{2}}}{\Gamma(\frac{n+3}{2})} \tag{5.3}$$

で与えられ，$n = 0$ の場合 $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$，$A_2 = 4\pi$ である．また，$G(n)$ は $(4+n)$ 次元での重力定数である．

また，$(4+n)$ 次元での planck 質量，planck 長さ，planck 時間は

$$m_{\rm pl}(n) = \left(\frac{\hbar^{n+1}c^{1-n}}{G(n)}\right)^{\frac{1}{2+n}}, \quad \ell_{\rm pl}(n) = \left(\frac{G(n)\hbar}{c^3}\right)^{\frac{1}{2+n}}, \quad t_{\rm pl}(n) = \left(\frac{G(n)\hbar}{c^{5+n}}\right)^{\frac{1}{2+n}} \tag{5.4}$$

であり，これより

$$r_H = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{m_{\rm pl}(n)}\frac{\hbar}{c}\left(\frac{M_{\rm BH}}{m_{\rm pl}(n)}\right)^{\frac{1}{n+1}}\left(\frac{8\Gamma(\frac{n+3}{2})}{n+2}\right)^{\frac{1}{n+1}} \tag{5.5}$$

の関係がある．

Black Hole の大きさに対応する波のエネルギーは (2.1) 式と同様に，不確定性関係より

$$\Delta E \sim \Delta pc \sim \frac{\hbar c}{\Delta\,\mathrm{r}} \sim k_B T \Longrightarrow k_{\rm B}T \sim \frac{\hbar c}{r_H} \tag{5.6}$$

と与えられる．$(4+n)$ 次元の黒体放射のエネルギー密度 $\epsilon(T)$ とエントロピー密度 $s(T)$ は

$$\epsilon(T) = \frac{A_{n+2}}{(2\pi)^{n+3}}k_{\rm B}T(n+2)\left(\frac{k_{\rm B}T}{\hbar c}\right)^{n+3}\Gamma(n+4)\zeta(n+4) \sim (k_{\rm B}T)^{n+4} \tag{5.7}$$

$$s(T) = \frac{n+4}{n+3}(n+2)\frac{A_{n+2}}{(2\pi)^{3+n}}k_{\rm B}\left(\frac{k_{\rm B}T}{\hbar c}\right)^{n+3}\Gamma(n+4)\zeta(n+4) \sim (k_{\rm BT})^{n+3} \tag{5.8}$$

と表され，これより

$$V = \frac{Mc^2}{\epsilon} \propto \frac{Mc^2}{k_{\rm BT}\left(\frac{k_{\rm BT}}{\hbar c}\right)^{n+3}} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned} S &= sV = k_{\rm B}\left(\frac{k_{\rm BT}}{\hbar c}\right)^{n+3}\frac{Mc^2}{k_{\rm BT}\left(\frac{k_{\rm BT}}{\hbar c}\right)^{n+3}} \sim \frac{Mc^2}{T} \sim \frac{k_{\rm B}r_H Mc^2}{\hbar c}\left(\frac{r_H}{\ell_{\rm pl}(n)}\right)^{n+1} m_{\rm pl}c \\ &\sim k_{\rm B}\left(\frac{r_H}{\ell_{\rm pl}}\right)^{n+2} \end{aligned} \tag{5.10}$$

が得られる．エントロピー S は $(4+n)$ 次元では空間の次元が $(3+n)$ 次元より，空間の超平面の次元，つまり $(2+n)$ 次元に比例していることになる．これより，高次元においても Black Hole のエントロピーは表面積に比例するという関係が導かれた．

5.2　de Sitter 時空の場合

その計量は

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} dr^2 + d\Omega_{n+2}^2 \tag{5.11}$$

であり，ここで $\ell_\Lambda = (3/\Lambda)^{\frac{1}{2}}$ とおくと，(3.2) 式と同様に不確定性関係より宇宙の温度は

$$\Delta E \sim \Delta pc \sim \frac{\hbar c}{\ell_\Lambda} \sim k_{\mathrm{B}}T \tag{5.12}$$

の式より推定される．宇宙定数 Λ は (3.4) 式と同じく密度と

$$\rho(n) = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G(n)} \tag{5.13}$$

と関係があるので，粒子密度 n_Λ は

$$n_\Lambda \frac{\Delta E}{c^2} \sim \rho_\Lambda \sim \frac{\Lambda c^2}{8\pi G(n)} \tag{5.14}$$

の関係より，$V \sim \ell_\Lambda^{3+n}$ とおくと，全粒子数は

$$N_\Lambda = n_\Lambda V \sim \frac{\Lambda c^4}{8\pi G(n)} \frac{\ell_\Lambda}{\hbar c} \ell_\Lambda^{3+n} \sim \frac{\ell_\Lambda^{2+n}}{\ell_{\mathrm{pl}}^{2+n}} = \left(\frac{\ell_\Lambda}{\ell_{\mathrm{pl}}}\right)^{2+n} \tag{5.15}$$

である．エントロピー S は N_Λ に比例するから

$$S \propto \left(\frac{\ell_\Lambda}{\ell_{\mathrm{pl}}}\right)^{2+n} \tag{5.16}$$

となり，超平面に比例するという関係が得られた．

5.3　Rindler 時空の場合

一様加速度を κ とすると，特徴的な長さは $\ell_\kappa = c^2/\kappa$ であり，やはり温度は(4.1) 式と同じく

$$\Delta E \sim \Delta pc \sim \frac{\hbar c}{2\ell_\kappa} \sim k_{\mathrm{B}}T \tag{5.17}$$

の関係から推定される．この加速が重力によるとして，質量を M，体積を $V = L^{3+n}$ として

$$M = \frac{\epsilon}{c^2}V \sim \frac{k_{\mathrm{B}T}}{c^2}\left(\frac{k_{\mathrm{B}T}}{\hbar c}\right)^{3+n} L^{3+n} \tag{5.18}$$

とおくと，重力加速度 κ は

$$\frac{c^2}{\ell_\kappa} \sim \kappa = \frac{G(n)M}{L^{2+n}} \sim \frac{G(n)}{L^{2+n}} \frac{k_{\mathrm{B}T}}{c^2}\left(\frac{k_{\mathrm{B}T}}{\hbar c}\right)^{3+n} L^{3+n} \sim G(n)\left(\frac{1}{\ell_\kappa}\right)^{4+n} \frac{\hbar}{cL} \tag{5.19}$$

という関係式で表される．これより長さ L は

$$L = \frac{c^3}{G(n)\hbar}\ell_\kappa^{3+n} = \left(\frac{\ell_\kappa}{\ell_{\mathrm{pl}}}\right)^{2+n} \ell_\kappa \tag{5.20}$$

と与えられ，全エントロピーは $S = sV = sL^{3+n}$ より

$$\frac{S}{L^{2+n}} \sim sL \sim k_{\mathrm{B}}\left(\frac{1}{\ell_\kappa}\right)^{2+n} \ell_\kappa \left(\frac{\ell_\kappa}{\ell_{\mathrm{pl}}}\right)^{2+n} \sim k_{\mathrm{B}}\left(\frac{1}{\ell_{\mathrm{pl}}}\right)^{2+n} \tag{5.21}$$

という関係が導かれる．つまり超平面の単位面積当たりのエントロピーは一定となり，これも $(4+n)$ 次元への自然な拡張になってる．

6. 結論及び議論

重力場における場の量子論を用いて導かれる式と，同等な関係式が，簡明な物理的仮定の下で得られた．つまり不確定性関係を用いることにより Black Hole，Λ 項のある宇宙，及び一様加速する系の温度を推定することができ，その温度に対応する黒体放射を考えることにより，各々に対してエントロピーが地平面に比例する関係が導かれた．そこで宇宙定数 Λ，もしくは $\rho_\Lambda = 3\Lambda/(8\pi G)$ に対する興味ある関係式($\rho_\Lambda = \sqrt{\rho_\gamma \rho_{\mathrm{pl}}}$) が得られ，$(4+n)$ 次元においても，各々の場合エントロピーが表面積に比例するという結果が導出された．

エントロピーは示量変数であり，それが系の体積ではなく，面積に比例するという一見理解し難い結果は，2 節でも述べた熱力学，及び統計力学的な考察により，Black Hole を見かけより体積の大きな，例えて言えば奥行きの深い袋状と見なすことで，ある程度は理解可能になったと考える．それは不確定性関係に由来するエネルギーを温度と関連付け，その温度による黒体放射がそこに充満し，それを Black Hole のエントロピーと解釈するものである．

この理解の下では，重力崩壊する放射優勢の星の場合，その Black Hole が形成されるとき体積が増加し，そこに放射が自由膨張してエントロピーが増加し，Black Hole の巨大なエントロピーとなったとする解釈が成立する．これらはあくまでも解釈であり，果たして実際にそこに物理的に意味があるかどうかは不明である．ただ Black Hole 形成時での，エントロピー増大の通常の理解は難しい．

重力不安定により，Black Hole を形成するような黒体放射の光子球のエントロピーは $S \propto A^{3/4}$ であり，必ずしも示量性の変数の様相を示してはいないが，これは重力場中において温度が熱力学的に平衡であったことを反映しているもので，容量性（示量性）変数であることには変わりが無い．それを black Hole へどう理解を拡張するかが問題である．

古典的な一般相対論の立場からすると，粒子は事象地平面を通過すれば決して再び戻ることはない訳であるが，これらの議論はその物理的に十分解明されていない量子重力理論の，統計熱力学的な理解をより深めるのに寄与すると考えられる．今後一層その意味を探るのが課題である．

また，ここでの考察では Black Hole を含めた系全体でのエントロピーの増大や，Λ 項のある宇宙でのエントロピーの増大という一般的な熱力学の第 2 法則については，触れられていない．

またより興味深い Black Hole の蒸発についての物理的解釈についても考察していない．

　ただ，これも 2 節，及び上で触れたように，Black Hole を温度 T の放射場がある奥行きの深い袋状のものと見なすと，Black Hole の外と内側をあわせた系全体ではエントロピーが増大し，熱力学の第 2 法則が成立しているとも考えられる．またその境界である表面から温度 T の黒体放射が放出され，やがて Black Hole も蒸発するという考えも受入れ易い．しかし，より仔細な検討は今後の課題である．

参　考　文　献

[1] J. D. Bekenstein, "Black Holes and Entropy", Phys. Rev. **D7** (1973) 2333.

[2] T. Jacobson and R. Parentani, "Horizon Entropy", Found. Phys. **33** (2003) 323–348.
R. M. Wald, "The Thermodynamics of Black Holes", Living Rev. Rel. **4** (2001) 6.
C. Kiefer, "Quantum Aspects of Black Holes", astro-ph/0202032.

[3] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **43** (1975) 199.

[4] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. **D9** (1974) 3292.

[5] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, "Quantum Fields in Curved Space", Cambridge University Press (1982).

[6] D. N. Spergel et al., Ap. J. S. **148** (2003) 175.

[7] T. Padmanabhan, "Thermodynamics and/or Horizons: A comparison of Schwarzschild, Rindler and de Sitter spacetimes", Mod. Phys. Lett. **A17** (2002) 923–942.

[8] S. W. Hawking, Mon. Not. R. astr. Soc. **152** (1971) 75.

[9] B. J. Carr and S. W. Hawking, Mon. Not. R. astr. Soc. **168** (1974) 399.

[10] H. K. Lee, Phys. Rev. **D66** (2002) 063001.

[11] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, "Cosmological Event Horizons, Thermodynamics, and Particle Creation", Phys. Rev. **D15** (1977) 2738–2751.

[12] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, "Statistical Physics", Reed Edu. and Pro. Pub. Ltd. Oxford (1980).

[13] S. Weinberg, Rev. Mod. Phys., **61** (1989) 1.

[14] T. Padmanabhan, "Classical and Quantum Thermodynamics of Horizons in Spherically Symmetric Spacetimes", Class. Quant. Grav. **19** (2002) 5387–5408.

[15] G. E. A. Matsas and D. A. T. Vanzella, "The Fulling-Davies-Unruh Effect is Mandatory: The Proton's Testimony", Int. J. Mod. Phys. **D11** (2002) 1573–1578.

[16] W. G. Unruh, "Notes on Black Hole Evaporation", Phys. Rev. **D14** (1976) 870.

[17] T. Padmanabhan, "Gravity from Space-time Thermodynamics", Astrophys. Space Sci. **285** (2003) 407.

On the Entropy of a Black Hole, Space-Time with Λ-term and Uniformly Accelerated System

Keita SAKAI
Daigo KAJIURA
Tetsuya HARA

Abstract

It is said that the entropy of a black hole is proportional to the surface area. During the investigation of its meaning, we derive, under uncertainty principle and simple physical consideration, that the temperature is proportional to the surface gravity and the entropy is proportional to the surface area of a black hole. We apply the same consideration to the space-time with Λ-term (de Sitter space) and the uniformly accelerated system (Rindler coordinate) and estimate the temperature and entropy of the space. Then we derive that the entropy is proportional to the boundary surface area, respectively. We also investigate each case under higher dimensions and derive that the entropy is proportional to the (super) surface area, respectively. It is discussed the physical interpretation that the volume of a black hole is much greater than the apparent volume.

Keywords: black hole, entropy, Λ-term, de Sitter space, Rindler coordinate