〔研究ノート〕

ベクトル場とスカラー場の重力への非最小結合について

梶　浦　大　吾
酒　井　啓　太
原　　哲　也

（平成 16 年 9 月 13 日提出
平成 16 年 12 月 10 日修正）

要　旨

スカラー場の非最小結合は Brans-Dicke (B-D) 理論 [1] として知られており，アインシュタインの一般相対性理論の拡張の一つとして，その理論的意味が論じられている．ここでは，スカラー場に加えてベクトル場も非最小結合をしている場合，どのような効果が期待できるかを調べた．簡潔なモデルの下でのベクトル場を導入し，ラグランジアン密度から計量，ベクトル，スカラーを変分して 0 にして各々方程式を導いた．ベクトル場を導入しても，等価原理は成立しており，粒子の測地線の式は変更されない事が分かった．また弱い近似でベクトル場の効果を調べたが，スカラー場とほぼ同じ形で効果が期待される．

キーワード：B-D 理論，スカラー場，ベクトル場，非最小結合, 等価原理

1.　導　入

アインシュタインの重力理論はテンソル理論であり，時空に関する幾何学理論として，明解な重力現象に対する解釈を提示する [2, 3]．しかし，素粒子の他の相互作用との統一という視点から見ると，重力理論を拡張する必要性に迫られ，アインシュタイン自身その後半生において，その拡張に力を注いだ．その精神を引き継いだ Weyl によるゲージ理論の萌芽は，現在の素粒子理論において最も基本的な考え方へと成長した．また重力の量子化はいまだ模索の状態にあり，困難な問題が山積している [4, 5].

重力理論の拡張の一つの試みとして，Jordan は，非最小結合をするスカラー場を導入したスカラー・テンソル理論 [6] を提出したが，このスカラー場は物質場と相互作用し，その結果等価原理を破ることになる．Brans と Dicke は，非最小結合はするが物質とは結合しない，独自のスカラー・テンソル理論を提出した（B-D 理論）[1]．その特徴は等価原理を充たし，スカラー場と計量場が結合する事により，重力定数がスカラー場に依存して変化する事である．これは宇宙初期の議論に影響する事から，重力理論の拡張のアプローチの一つとして現在でも注目されている．これをもとに Fujii が提案したディラトン理論 [7]は，第 5 の力を予言するものとして

色々と調べられている．

我々は，重力が銀河スケール以上ではニュートンの理論と異なり，DM を必要としない理論を目指している [8, 9]．その試みとして，B-D 理論におけるスカラー場にベクトル場を加えて考察した．ベクトル場を加える事により，理論がどのような効果を生ずるのかが主なテーマである．2 節では，一般的な議論をするのは困難であるため，簡潔な関数の形のベクトル場を与え，そのラグランジアン密度から運動方程式を導いた．3 節では弱い重力場での近似の下でその効果を調べ，4 節ではベクトル場の Parametrized Post Newton (PPN) 近似における影響を考察した．5 節のまとめで，DM の存在を仮定しなければ説明が困難と考えられている銀河の回転曲線の問題を，DM 無しで説明できることの可能性を論じた．

2.　ベクトル場の入った B-D 型ラグランジアン密度

ベクトル場の入ったラグランジアン密度として

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left(\Theta(\phi, A)R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + L_m\right) \tag{2.1}$$

（R: 重力のスカラー曲率，$F^{\alpha\beta}$：新たに導入した自由場のベクトル場）を考える．この Θ は，スカラー場 ϕ とベクトル場 A_μ の関数であり，以下のような簡潔な関数の形をモデルとして仮定する．

$$\Theta \equiv \frac{1}{2}(\xi\phi^2 + \xi_A A^\mu A_\mu)$$

ここで $\xi_A = 0$，$F_{\mu\nu} = 0$ であれば通常の B-D 理論に帰着する．

平坦な計量を曲がった計量へ，又偏微分を共変微分におき直すことにより得られる，重力場との結合を，最小結合と言う．これによりこの Θ と R の積の項は，この最小結合で得られない項であり，つまり非最小結合の一つであるが，この論文ではこれを「非最小結合」という [7]．また，ベクトル場とスカラー場は，互いに独立であるとする．

L_m は，物質場のラグランジアン密度であり，ϕ と A_μ を含まないと仮定する．これは等価原理を乱さないためである．ここで

$$\Theta = \frac{1}{16\pi G_0} \tag{2.2}$$

であれば，通常の Einstein-Hilbert のラグランジアン密度に帰着する．ここで G_0 は重力定数であるが，0 の添え字は実効重力定数 G との違いを示す [10]．

2.1　運動方程式

(2.1) 式を $g^{\mu\nu}$ で変分して 0 にすると，

$$\xi_A A_\mu A_\nu R + 2\Theta G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + T^A_{\mu\nu} + T^\phi_{\mu\nu} - 2(g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)\Theta \tag{2.3}$$

となる（付録 A ）．ただし，$T_{\mu\nu}$，$T^{\phi}_{\mu\nu}$，$T^{A}_{\mu\nu}$ は物質場，スカラー場，ベクトル場のエネルギー運動量テンソルで，$T^{\phi}_{\mu\nu}$，$T^{A}_{\mu\nu}$ は各々

$$T^{\phi}_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(g^{\rho\sigma}\partial_\rho\phi\partial_\sigma\phi)\,,$$
$$T^{A}_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + F_{\mu\beta}F_{\nu}{}^{\beta}$$

である．そして (2.1) 式を ϕ について変分して 0 にすると，

$$\xi\phi R + \Box\phi = 0$$

が得られ，これに左から ϕ を掛けると

$$\xi\phi^2 R + \phi\Box\phi = 0 \tag{2.4}$$

となる．同様にして (2.1) 式を A_μ について変分して 0 にすると，

$$\xi_A A^\mu R + F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{2.5}$$

が得られ（付録 B），左から A_μ を掛けると

$$\xi_A A^\mu A_\mu R + A_\mu\nabla_\nu F^{\mu\nu} = 0 \tag{2.6}$$

となる．

一方，(2.3) 式に $g^{\mu\nu}$ を掛け，対角和をとると，$T^A = g^{\mu\nu}T^{A}_{\mu\nu} = 0$ より

$$\xi_A A^\mu A_\mu R - 2\Theta R = T + T^{\phi} - 6\Box\Theta \tag{2.7}$$

を得る．ここで $g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = -R$ を使った．$F(\phi) = \frac{1}{2}\xi\phi^2$，$H(A) = \frac{1}{2}\xi_A A^\mu A_\mu$ として$\Theta = \frac{1}{2}(\xi\phi^2+\xi_A A^\mu A_\mu) = F(\phi) + H(A)$ とおくと

$$-2F(\phi)R = T + T^{\phi} - 6\Box(F(\phi) + H(A)) \tag{2.8}$$

となる．いま，

$$T^{\phi} = -(\partial\phi)^2 = -g^{\rho\sigma}\partial_\rho\phi\partial_\sigma\phi \tag{2.9}$$

であり，このことと (2.4)，(2.6) 式を使って，FR を消去すると，

$$\phi\Box\phi + (\partial\phi)^2 + 6\Box(F + H) = T$$

となる．ここで，

$$\Box\phi^2 = 2(\phi\Box\phi + (\partial\phi)^2)$$

を用いると，

$$\xi^{-1}\Box F + 6\Box(F + H) = T$$

が得られ，整理すると，

$$(6 + \xi^{-1})\Box F + 6\Box H = T \tag{2.10}$$

と表わされる．これは，$\xi_A = 0$ $(H(A) = 0)$ の場合スカラー場が T を源としている事を表わしている [7]．今の場合，スカラー場とベクトル場の和が，T を源にしており，

$$\Box\left(\left(1 + \frac{1}{6\xi}\right)F + H\right) = \frac{1}{6}T$$

となり，ここで $(1 + 1/6\xi) = \Im$ を用いると

$$\Box(\Im F + H) = \frac{1}{6}T \tag{2.11}$$

が得られる．

一方，(2.3) 式を反変形にして，両辺に ∇_μ を作用させると，少々面倒な計算の後で（付録 C ）

$$\nabla_\mu(T^{\mu\nu}) = 0 \tag{2.12}$$

が得られる．これは，このモデルのようにベクトル場を導入しても，等価原理は成立していることを意味している．これより，粒子の運動方程式は，μ を質点の質量密度，u^ν を 4 元速度とすると

$$\mu c\frac{du^\nu}{dt} = 0 \tag{2.13}$$

となり，運動は測地線よりずれない [11]．これより弱い場の近似を考える時，運動は測地線に従うとして考察を進める．

3.　弱い場の近似

前節で求めた場の運動方程式 (2.11) を使って，どのような物理的効果が生じるのかを弱い場の近似を使って調べてみる．まず，スカラー場，ベクトル場に関してそれぞれ，

$$\phi(x) = v + Z\sigma(x) \tag{3.1}$$

$$A_\mu(x) = \mathcal{A}_\mu + Z_A a_\mu \tag{3.2}$$

とおく．v, $\mathcal{A}_\mu$ は，共に質量の次元を持った定数であり，

$$|v| >> |Z\sigma|, |\mathcal{A}_\mu| >> |Z_A a_\mu|$$

として σ, a_μ について線形化する（Z，Z_A も定数である）．すると (2.1) 式の第 1 項 $\Theta(\phi, A)R = \frac{1}{2}(\xi\phi^2 + \xi_A A^\mu A_\mu)$ は，Einstein-Hilbert ラグランジアン密度に一致しなければならないので，

$$\Theta(\phi, A)R = \frac{1}{2}(\xi\phi^2 + \xi_A A^\mu A_\mu)R \cong \frac{1}{2}(\xi v^2 + \xi_A \mathcal{A}^\mu \mathcal{A}_\mu)R \cong \frac{1}{2}\frac{1}{8\pi G_0}$$

と書ける．

また，$F(\phi), H(A)$ は (3.1)，(3.2) 式を用いる事でそれぞれ，

$$\begin{aligned} F(\phi) &= \frac{1}{2}\xi\phi^2 = \frac{1}{2}\xi(v + Z\sigma)^2 \\ &\simeq \frac{1}{2}\xi(v^2 + 2Zv\sigma) = \frac{1}{2}\xi v^2 + \xi Zv\sigma \qquad (3.3) \\ H(A) &= \frac{1}{2}\xi_A A^\mu A_\mu = \frac{1}{2}\xi_A(\mathcal{A}^\mu + Z_A a^\mu)(\mathcal{A}_\mu + Z_A a_\mu) \\ &\simeq \frac{1}{2}\xi_A(\mathcal{A}^\mu \mathcal{A}_\mu + 2Z_A a^\mu \mathcal{A}_\mu) = \frac{1}{2}\xi_A \mathcal{A}^\mu \mathcal{A}_\mu + \xi_A Z_A a^\mu \mathcal{A}_\mu \qquad (3.4) \end{aligned}$$

と書き表せる．この 2 式を運動方程式 (2.11) 式へ代入すると

$$\Box(\Im\xi Zv\sigma + \xi_A Z_A \mathcal{A}^\mu a_\mu) = \frac{1}{6}T \qquad (3.5)$$

となる．ニュートン近似では，質量密度を ρ とすると，

$$T = -\rho$$

と置く事ができ，時間依存が無いものとすると，

$$\nabla^2(\Im\xi Zv\sigma + \xi_A Z_A \mathcal{A}^\mu a_\mu) = -\frac{1}{6}\rho \qquad (3.6)$$

となる．

最初に述べたように，スカラー場とベクトル場は独立であるとしたが，ここで$\xi_A Z_A \mathcal{A}^\mu a_\mu = (q_2/q_1)\Im\xi Zv\sigma$ と便宜的におくと，ρ はスカラー場の源である $q_1\rho$ と，ベクトル場の源である $q_2\rho$ に分かれた形として

$$\nabla^2(\Im\xi Zv\sigma) = -\frac{1}{6}q_1\rho \qquad (3.7)$$

$$\nabla^2(\xi_A Z_A \mathcal{A}^\mu a_\mu) = -\frac{1}{6}q_2\rho \qquad (3.8)$$

$$(q_1 + q_2 = 1)$$

となる．(3.7)，(3.8) 式は，ポワッソン方程式であるから球対称解は，

$$\Im\xi Zv\sigma = \frac{1}{6}q_1\frac{1}{4\pi r}\left(\frac{M}{M_P}\right) \qquad (3.9)$$

$$\xi_A Z_A \mathcal{A}^\mu a_\mu = \frac{1}{6}q_2\frac{1}{4\pi r}\left(\frac{M}{M_P}\right) \qquad (3.10)$$

を得る．ここで，r は，動径距離であり，M は重力場の作り出す源の質量，M_P はプランク質量で$M_P = \sqrt{c\hbar/(8\pi G_0)}$ である（通常とは $1/\sqrt{8\pi}$ だけ異なっている）．

続いて計量についての線形化を行う．つまり

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + M_P^{-1} h_{\mu\nu}(x)$$

とおく．$h_{\mu\nu} << M_P$ の条件で，$h_{\mu\nu}$ の 1 次の項のみを残すと，

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2M_P}(-\Box h_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\lambda h^\lambda_\nu + \partial_\nu\partial_\lambda h^\lambda_\mu - \partial_\mu\partial_\nu h - \eta_{\mu\nu}(\partial_\rho\partial_\sigma h^{\rho\sigma} - \Box h)) \tag{3.11}$$

$$(h \equiv h^\mu_\mu)$$

を得る．これを，(2.3) 式へ代入すると，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2M_P}(-\Box h_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\lambda h^\lambda_\nu + \partial_\nu\partial_\lambda h^\lambda_\mu - \partial_\mu\partial_\nu h - \eta_{\mu\nu}(\partial_\rho\partial_\sigma h^{\rho\sigma} - \Box h)) \\
&\quad + \xi_A(\mathcal{A}^\mu\mathcal{A}^\nu + Z_A\mathcal{A}^\mu a^\nu + \mathcal{A}^\nu a^\mu)R \\
&\qquad = T_{\mu\nu} - 2\xi v Z(\eta_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)\sigma - 2\xi_A Z^\rho_A(\eta_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)a_\rho
\end{aligned} \tag{3.12}$$

となる．ただし，

$$T^\phi_{\mu\nu} \simeq 0, \quad T^A_{\mu\nu} \simeq 0,$$

$$2(g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)\Theta = 2\xi v Z(g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)\sigma + 2\xi_A Z_A\mathcal{A}^\rho(g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)a_\rho$$

を用いた．

更に項をいれかえると，

$$\begin{aligned}
&\Box h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\lambda h^\lambda_\nu - \partial_\nu\partial_\lambda h^\lambda_\mu + \partial_\mu\partial_\nu h + \eta_{\mu\nu}(\partial_\rho\partial_\sigma h^{\rho\sigma} - \Box h) \\
&\quad - 4\xi v Z(\eta_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu)a_\rho = -2M_P^{-1}T_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

となる．これは，$h_{\mu\nu}$ と，σ, a_ρ の混合の形となっているので，この混合を取り除くために対角化を行う．そのために，まず

$$\chi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h - 2Z\xi v\eta_{\mu\nu}\sigma - 2Z_A\xi_A\eta_{\mu\nu}\mathcal{A}^\rho a_\rho \tag{3.14}$$

とおいて，新しい場 $\chi_{\mu\nu}$ を導入する．この式の逆は，

$$h_{\mu\nu} = \chi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\chi - 2Z\xi v\eta_{\mu\nu}\sigma - 2Z_A\xi_A\eta_{\mu\nu}\mathcal{A}^\rho a_\rho \tag{3.15}$$

である．この式を (3.13) 式へ代入する（ただし，座標条件 $\partial_\lambda\chi^\lambda_\nu = 0$ を用いる）と，少々面倒であるが結局，混合の無い，

$$\Box\chi_{\mu\nu} = -2M_P^{-1}T_{\mu\nu} \tag{3.16}$$

が得られる（付録 E ）．これより，重力場の作り出す源が質量 M の静止質点なら，

$$\chi_{00} = -2\frac{M}{M_P}\frac{1}{4\pi r} \tag{3.17}$$

となる．

(2.13) 式より，質点の運動は測地線を通る．すると，重力ポテンシャルは，質量 m の質点に対して，

$$V = -\frac{1}{2}\frac{m}{M_P}h_{00} \tag{3.18}$$

となり，(3.15) 式より，h_{00} は

$$h_{00} = \chi_{00} - \frac{1}{2}\eta_{00}\chi - 2Z\xi v\eta_{00}\sigma - 2Z_A\xi_A\eta_{00}\mathcal{A}^\rho a_\rho$$

（ただし，$\eta_{00} = -1, \chi = -\chi_{00}$）

$$= \frac{1}{2}\chi_{00} + 2Z\xi v\sigma + 2Z_A\xi_A\mathcal{A}^\rho a_\rho \tag{3.19}$$

となる．いま，

$$V = V_\chi + V_\sigma + V_a$$

とおく．ただし各項は以下のように定めるものとする．

$$V_\chi = -\frac{1}{4}\frac{m}{M_P}\chi_{00}\,, \tag{3.20}$$

$$V_\sigma = -\frac{m}{M_P}Z\xi v\sigma\,, \tag{3.21}$$

$$V_a = -\frac{m}{M_P}Z_A\xi_A\mathcal{A}^\rho a_\rho\,. \tag{3.22}$$

この 3 つの式に (3.17)，(3.9)，(3.10) 式をそれぞれ用いるとそれぞれ，

$$V_\chi = -\frac{1}{2}\frac{Mm}{M_P^2}\frac{1}{4\pi r} \tag{3.23}$$

$$V_\sigma = -\frac{1}{6\mathfrak{I}}q_1\frac{Mm}{M_P^2}\frac{1}{4\pi r} \tag{3.24}$$

$$V_a = -\frac{1}{6}q_2\frac{Mm}{M_P^2}\frac{1}{4\pi r} \tag{3.25}$$

を得る．

上の式をまとめると

$$V = -\frac{GMm}{r} \tag{3.26}$$

となる．ただし

$$G = \left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{q_1}{\mathfrak{I}} + q_2\right)\right)G_0 \tag{3.27}$$

である．(2.2) 式の Einstein-Hilbert 項に表れた定数 G_0 を基本的な重力定数と見なし，スカラー場，ベクトル場の寄与も加わったこの G こそが観測にかかる重力定数と考えるのが B-D 理論であり [10]，我々のモデルではこれにベクトル場が加わったことになる．

しかしながら，これまでの弱い近似の議論では，新しく導入したベクトル場はスカラー場とほぼ似た振る舞いを示し，ベクトル場としての特別の効果は期待されない．

4.　PPN 近似

実験的な面で，一般相対論と比較するにはニュートン近似より 1 歩進んだ近似を使わなければならない．それが Parametrized Post-Newtonian (PPN) 近似である．これは，一般相対論におけるシュヴァルツシルト解

$$-g_{00} = 1 - \frac{a}{r}, \quad g_{rr} = \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \tag{4.1}$$

を，a/r の 1 次または 2 次まで展開し，一般化したものである．ここで a は定数であり，上の a_μ とは関係ない．それを，

$$-g_{00} \approx 1 - \frac{a}{r} + \frac{\beta - \gamma}{2}\frac{a^2}{r^2} \tag{4.2}$$

$$g_{rr} \approx 1 + \gamma\frac{a}{r}, (\beta, \gamma\text{: エディントンパラメータ}) \tag{4.3}$$

のように記す．一般相対論の場合，$\beta = \gamma = 1$ であるから，この関係が実際に成り立っているかが，一般相対論のテストと見なされている．太陽系実験における理論式を 3 つ表わしておく．

•太陽近くでの光りの曲がり：

$$\Delta\varphi_\odot = \frac{1+\gamma}{2}\frac{2a}{r_0}$$

•水星の近日点移動

$$\Delta\varphi = \frac{2 - \beta + 2\gamma}{3}\frac{3a\pi}{l}$$

•レーダーエコー

$$\Delta t = 2a\left(1 + \frac{1+\gamma}{2}\ln\frac{4r_1r_2}{r_0^2}\right)$$

バイキング計画では，太陽系の全惑星の運動理論値を β, γ で表わし，最小二乗法でそれらの最適値を求めている．今，知る限りの最も正確な値は，

$$\gamma = 1.000 \pm 0.001, \qquad \beta = 0.99 \pm 0.02 \tag{4.4}$$

である．

まず，(2.3) 式に注目しよう．$R_{\mu\nu}$ の式にする事を試みる．その時 (2.8) 式を使い，更に外部解を求めるので，$T_{\mu\nu} = 0$ とおく．今，(2.11) 式の解としては，(3.9)，(3.10) 式と同じ種類の解，

$$F(\phi) \cong \frac{1}{2}\xi v^2 + \xi Z v\sigma = \frac{1}{2}\xi v^2 + \frac{1}{6\mathfrak{I}} q_1 \frac{1}{4\pi r}\left(\frac{M}{M_P}\right) \tag{4.5}$$

$$H(A) \cong \frac{1}{2}\xi_A \mathcal{A}^\mu \mathcal{A}_\mu + \xi_A Z_A a^\mu \mathcal{A}_\mu = \frac{1}{2}\xi_A \mathcal{A}^\mu \mathcal{A}_\mu + \frac{1}{6} q_2 \frac{1}{4\pi r}\left(\frac{M}{M_P}\right) \tag{4.6}$$

を採用すればよい．これにより，

$$T^\phi_{\mu\nu} \sim \vartheta(r^{-4}), \quad T^A_{\mu\nu} \sim \vartheta(r^{-4})$$

となり，無視できる．(2.3) 式は

$$\xi_A A_\mu A_\nu R + 2\Theta\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right) = -2(g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu)\Theta$$

であるから，ここで (2.7) 式より，

$$2\Theta R = \xi_A A^\mu A_\mu R + 6\Box\Theta$$

を上式に代入すると，

$$\begin{aligned} 2\Theta R_{\mu\nu} &= \xi_A A^\mu A_\nu R - \xi_A A^\mu A_\nu R + 6 g_{\mu\nu}\Box\Theta - 2 g_{\mu\nu}\Box\Theta + 2\nabla_\mu\nabla_\nu\Theta \\ &= 4 g_{\mu\nu}\Box\Theta + 2\nabla_\mu\nabla_\nu\Theta \equiv K_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{4.7}$$

を得る．

一方，左辺においては，普通の場合と同じく，

$$R_{00} = e^{-\lambda+\nu}\left(\frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}\nu'^2 - \frac{1}{4}\nu'\lambda' + \frac{\nu'}{r}\right)$$

$$R_{rr} = -\frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{4}\nu'^2 + \frac{1}{4}\nu'\lambda' + \frac{\lambda'}{r}$$

ここで，

$$g_{00} = -e^{\nu(r)} \quad , \quad g_{rr} = e^{\lambda(r)} \tag{4.8}$$

と置いた．$K_{\mu\nu}$ には$\Box\,\Theta$ が入ってくるが，これは (2.11) 式を二つに分けて，

$$\Box F = \frac{1}{6\mathfrak{I}} q_1 T, \quad \Box H = \frac{1}{6} q_2 T \tag{4.9}$$

としても，いま $T_{\mu\nu} = 0$ より，

$$\Box F = 0\,,\ \Box H = 0\,,\ \Box\Theta = 0 \tag{4.10}$$

となる．Θ が時間に依存しないので，$K_{00} = 0$ である．したがって，R_{00} は，

$$\frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}\nu'^2 - \frac{1}{4}\nu'\lambda' + \frac{\nu'}{r} = 0 \tag{4.11}$$

となり，これは一般相対論の場合と同じである．ここで，(4.2) 式と (4.8) 式より，

$$\nu = \ln(-g_{00}) \approx \ln\left(1 - \frac{a}{r} + \frac{\beta-\gamma}{2}\frac{a^2}{r^2}\right) \approx -\frac{a}{r} + \frac{\beta-\gamma-1}{2}\frac{a^2}{r^2} \tag{4.12}$$

となる．同様に，

$$\lambda = \ln(g_{rr}) \approx \ln\left(1 + \gamma\frac{a}{r}\right) \approx \gamma\frac{a}{r} \tag{4.13}$$

が得られる．これを微分して，

$$\nu' \approx \frac{a}{r^2} - (\beta-\gamma-1)\frac{a^2}{r^3} \tag{4.14}$$

$$\nu'' \approx -2\frac{a}{r^3} + 3(\beta-\gamma-1)\frac{a^2}{r^4} \tag{4.15}$$

$$\lambda' \approx -\gamma\frac{a}{r^2} \tag{4.16}$$

となる．これらを (4.11) 式に代入して，$\frac{a}{r^3}$ と $\frac{a^2}{r^4}$ までの項のみ残すと，

$$\frac{-1-\gamma+2\beta}{4}\frac{a^2}{r^4} = 0$$

であるから

$$\beta = \frac{1+\gamma}{2} \tag{4.17}$$

という関係が導出される．次に R_{rr} だが，$R_{00} = 0$ と組み合わせると，

$$R_{rr} = \frac{\nu' + \lambda'}{r} \tag{4.18}$$

となる．(4.14)，(4.16) を使うと，

$$R_{rr} \approx (1-\gamma)\frac{a}{r^3}, \left(\frac{a^2}{r^4}\text{の項は落した}\right) \tag{4.19}$$

となる．ここから (4.7) 式を計算して行く．まず第二項は，

$$2\nabla_\mu\nabla_\nu\Theta = (\partial_r - \Gamma^r_{rr})\Theta'(r) \tag{4.20}$$

このように書ける．このとき Γ^r_{rr} は，

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{rr} = \frac{1}{2}\lambda'(r) \approx -\frac{\gamma}{2}\frac{a}{r^2}$$

である．ただし，最右辺を求める際，(4.14) を使った．この結果と (4.5)，(4.6) 式を用いると(4.20) 式は，

$$2\nabla_\mu\nabla_\nu\Theta = \left(\partial_r + \frac{\gamma}{2}\frac{a}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2}\xi v^2 + \frac{1}{6\mathfrak{I}}q_1\frac{m}{4\pi r} + \frac{1}{2}\xi_A\mathcal{A}^\mu\mathcal{A}_\mu + \frac{1}{6}q_2\frac{m}{4\pi r}\right)$$
$$\simeq \left(\partial_r + \frac{\gamma}{2}\frac{a}{r^2}\right)\left(-\frac{1}{6\mathfrak{I}}q_1\frac{m}{4\pi r^2} - \frac{1}{6}q_2\frac{m}{4\pi r^2}\right)$$

ここで $\frac{a}{r^4}$ の項を無視すると

$$2\nabla_\mu\nabla_\nu\Theta \cong \left(\frac{1}{\mathfrak{I}}q_1 + q_2\right)\frac{m}{12\pi r^3} \tag{4.21}$$

となり，続いて (4.7) 式の第 1 項を計算すると

$$g_{\mu\nu}\Box\Theta = g_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla_\mu\Theta$$
$$= \nabla_\mu\nabla_\nu\Theta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathfrak{I}}q_1 + q_2\right)\frac{m}{12\pi r^3} \tag{4.22}$$

となる．この 2 式をたし合わすと

$$K_{\mu\nu} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\mathfrak{I}}q_1 + q_2\right)\frac{m}{12\pi r^3} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\mathfrak{I}}q_1 + q_2\right)\frac{m}{\pi r^3} \tag{4.23}$$

であり，(4.19) 式と比べると，$1/r^3$ があるので，

$$1 - \gamma = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\mathfrak{I}}q_1 + q_2\right)\frac{m}{\pi a} \tag{4.24}$$

（今，$\Theta = \frac{1}{2}$ であるので，$2\Theta R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}$）

と書ける．ところで，シュヴァルツシルト半径は，テンソル場による重力の効果だから，重力定数G_0 を使って，

$$a = 2G_0 m = \frac{2m}{8\pi} = \frac{m}{4\pi} \tag{4.25}$$

と表わすことができる（$8\pi G_0 = 1$ とした）．(4.25) 式を (4.24) 式へ代入すると，

$$1 - \gamma = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\mathfrak{I}}q_1 + q_2\right) = 4\frac{1}{8}\left(\frac{1}{\mathfrak{I}}q_1 + q_2\right)$$

となるので，

$$\gamma = 1 - 4\frac{1}{8}\left(\frac{1}{\mathfrak{I}}q_1 + q_2\right) \tag{4.26}$$

という関係が導かれる．(4.26) 式を受けて，(4.17) 式は，

$$\beta = \frac{1+\gamma}{2} = 1 - 2\frac{1}{8}\left(\frac{1}{\mathfrak{I}}q_1 + q_2\right) \tag{4.27}$$

となる．これらの式より，純粋な一般相対論からのずれは，$\left(\frac{1}{\mathfrak{I}}q_1 + q_2\right)$ によって引き起こされる事が分かる．よってその大きさの範囲は，(4.4) を考慮すると

$$4\frac{1}{8}\left(\frac{1}{\mathfrak{I}}q_1 + q_2\right) \leq 10^{-3}$$

である．

5.　まとめと議論

1，非最小結合の部分にスカラー場だけでなく，ベクトル場も導入して考察した．
2，運動方程式もベクトル場を導入した一般の形を得た．ベクトル場を導入しても等価原理を破る事が無いことが分かった．
3，弱い場の近似で，ベクトル場の寄与を推定したが，スカラー場とほぼ同じ形で，ポテンシャル項として表れ，観測される重力定数にスカラー場と同じく寄与する．

B-D 理論に従って，スカラー場以外にベクトル場を非最小結合として導入し，その効果を調べたが，重力場を介して物質場と相互作用する効果は，ほぼスカラー場と同様であることが分かった．

ベクトル場のバックグラウンドが期待値を持ち，それが異方性を導くような観測にかかれば，観測の等方性の上限からその値の制限を受けるが，今回は観測量に影響するかどうかの解析にまで至らなかった．もし制限を受ければ，それからの更なるずれをここでは問題にしていることになる．

銀河の回転曲線問題へのとりくみ として重力理論の拡張を，ベクトル場を導入して試みたが，これまでのところ新しい特徴的な性質は見出せなかった．今後，一つの方向として，スカラー場では Fujii のように等価原理を犠牲にして，共形不変性を仮定したとき，新しい有限到達力としての重力の拡張である Dilaton 場の可能性が生まれたが，ベクトル場ではどのような効果を期待出来るのかを調べるのが課題である．

もう一つの可能性として，ベクトル場と物質場との直接的な相互作用を導入することが考えられる．電磁場との類推を拡張すると，すべての物質にある種の電荷を持たせ，その斥力により，重力と反対の万有斥力をベクトル場は導入することが可能と思われる．しかし電荷がある場合の，Reisner-Nordstrom 解では，計量の 00 成分であるポテンシャルの項に距離に対して逆二乗の形でその効果が表れており，太陽系でその効果を減じて，銀河スケールでその効果を期待するのは困難と予想される．

一方，クーロン場的な新しい電荷の導入によるポテンシャルは，距離に関して逆一乗であり，重力場を介さず，直接的に粒子の運動に影響を与える．つまり新しい電荷の導入は力として逆二乗の形となりすぐには回転曲線への解決につながるとは予想しがたい．しかしベクトル場が $m \simeq 10^{-27}$eV 程度の質量をもてば，Yukawa 型の potential が予想され $r_0 \simeq 20$kpc 付近でその効果が現れ，回転曲線の解決への可能性は残る．

DM の検出の研究がこれほど精力的に行われていても，いまだ DM は見つかってはいない [12]．その道は困難でなかなか先行きが不明ではあるが，今後しばらく銀河曲線を DM 無しで説明可

能となる理論が模索されるであろう [13].

付録 A.　(2.3) 式の導出

$\xi_A = 0, F_{\mu\nu} = 0$ の場合，$F(\phi) = \xi\phi^2/2$ とおくと (2.1) 式の $g^{\mu\nu}$ による変分して 0 にすることから

$$2F(\phi)G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + T^{\phi}_{\mu\nu} - 2(g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)F(\phi) \tag{A.1}$$

である（[10]）．ここで

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad \Box = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu) \tag{A.2}$$

であり，$T_{\mu\nu}$ は，物質のエネルギー運動量テンソルで，

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}L_m)}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{(\mu\nu)} \tag{A.3}$$

である．$(\mu\nu)$ のカッコは，対称化を意味しており，

$$T_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}) \tag{A.4}$$

である．今，$\xi_A \neq 0$ により，

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}\frac{1}{2}\xi_A g^{\mu\nu}A_\mu A_\nu R)}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2}\xi_A A_\mu A_\nu(\sqrt{-g}R) + \frac{1}{2}\xi_A g^{\mu\nu}A_\mu A_\nu\frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{A.5}$$

が得られる．第 2 項は，$\frac{1}{2}\xi_A A^\mu A_\mu = H$ と置けば，

$$2HG_{\mu\nu} = -2(g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)H \tag{A.6}$$

という形で，運動方程式に寄与し，第 1 項は，$2/\sqrt{-g}$ をかけることにより，

$$\xi_A A_\mu A_\nu R \tag{A.7}$$

という形で (A.1) 式の左辺に寄与する．つまり，$F_{\mu\nu} = 0$ のとき，

$$2(F + H)G_{\mu\nu} + \xi_A A_\mu A_\nu R = T_{\mu\nu} + T^{\phi}_{\mu\nu} - 2(g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)(F + H) \tag{A.8}$$

となる．また，$F_{\mu\nu} \neq 0$ の時は，

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\frac{\delta(\sqrt{-g}g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}F_{\alpha\beta}F_{\rho\sigma})}{\delta g^{\mu\nu}} &= \frac{1}{4}\frac{\delta(\sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4}\sqrt{-g}(\delta^\alpha_\mu\delta^\rho_\nu g^{\beta\sigma} + g^{\alpha\rho}\delta^\beta_\mu\delta^\sigma_\nu)F_{\alpha\beta}F_{\rho\sigma} \\ &= -\frac{1}{8}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} + \frac{1}{2}\sqrt{-g}F_{\mu\beta}F^\beta_\nu\end{aligned} \tag{A.9}$$

より，(A.1) 式の右辺への寄与は，$2/\sqrt{-g}$ をかけて足せばよい．以上をまとめると，

$$\xi_A A_\mu A_\nu R + 2\Theta G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + T^A_{\mu\nu} + T^\phi_{\mu\nu} - 2(g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)\Theta \tag{A.10}$$

となる．

付録 B.　(2.5) 式の導出

(2.1) 式を，A_μ で変分して 0 にすると，

$$\begin{aligned}&\frac{\delta(\sqrt{-g}(\frac{1}{2}\xi_A g^{\alpha\beta}A_\alpha A_\beta R - \frac{1}{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}))}{\delta(A_\mu)}\\ &\quad = \sqrt{-g}R\frac{\partial}{\partial A_\mu}(\frac{1}{2}\xi_A g^{\alpha\beta}A_\alpha A_\beta) + \frac{1}{4}\partial_\nu\left(\frac{\partial\sqrt{-g}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}\right)\end{aligned} \tag{B.1}$$

第 1 項は，$\sqrt{-g}\xi_A g^{\alpha\beta}A_\beta R$，第 2 項は

$$g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta}F_{\rho\sigma}F_{\alpha\beta} = g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta}(A_{\sigma,\rho} - A_{\rho,\sigma})(A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta})$$

を考えると，これを $\partial_\nu A_\mu = A_{\mu,\nu}$ により微分するから，

$$\begin{aligned}&(g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta}\delta^\rho_\mu\delta^\sigma_\nu - \delta^\sigma_\mu\delta^\rho_\nu)(A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta}) + g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta}((A_{\sigma,\rho} - A_{\rho,\sigma})(\delta^\beta_\mu\delta^\alpha_\nu - \delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu))\\ &= g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta} - g^{\nu\alpha}g^{\mu\beta}F_{\alpha\beta} + g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu}F_{\rho\sigma} - g^{\rho\nu}g^{\sigma\mu}F_{\rho\sigma}\\ &= F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu} + F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu} = 4F^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{B.2}$$

より

$$\begin{aligned}\partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\nu\alpha}F^\mu{}_\alpha) &= \sqrt{-g}(\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}))\\ &= \sqrt{-g}(\partial_\nu F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\nu}F^{\mu\nu}) = \sqrt{-g}(F^{\mu\nu}{}_{;\nu})\end{aligned}$$

であるから

$$\sqrt{-g}\xi_A A^\mu R + \sqrt{-g}F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{B.3}$$

または

$$\xi_A A^\mu R + F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{B.4}$$

が成立．

付録 C.　(2.12) 式の導出

(2.3) 式を反変形にして，両辺に ∇_μ を作用させると

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = -\nabla_\mu T^{\phi\mu\nu} + 2G^{\mu\nu}\nabla_\mu\Theta(\phi, A_\mu) + 2\nabla_\mu(g^{\mu\nu}\Box - \nabla^\mu\nabla^\nu)\Theta(\phi, A_\mu)$$
$$+ \nabla_\mu\left(\frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} - F^\mu{}_\beta F^{\nu\beta}\right) + \xi_A\nabla_\mu(A^\mu A^\nu R) \tag{C.1}$$

であり，$\Theta = F + H$ のうちの，F の部分の項は，文献([10])の付録 B により 0 となり，残りの右辺の項は,

$$2(G^{\mu\nu}\nabla_\mu + (\nabla^\nu, \Box))H + \nabla_\mu\left(\frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} - F^\mu{}_\beta F^{\nu\beta}\right) + \nabla_\mu(\xi_A A^\mu A^\nu R)$$

となる．第 2 項は純粋にベクトル場のみがある場合の $T^A_{\mu\nu}$ で，あるが，付録 D に示すように

$$-\nabla_\mu T^{\mu\nu}_A = \xi_A A^\beta F^\nu_\beta R \tag{C.2}$$

となり，一方，第 1 項の方は，H もまたスカラー場であるので,

$$(\nabla^\nu, \Box)H = -R^{\lambda\nu}\partial_\lambda H = -R^{\mu\nu}\partial_\mu H \tag{C.3}$$

を用いると

$$2\left(R^{\mu\nu}\nabla_\mu - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\nabla_\mu - R^{\mu\nu}\nabla_\mu\right)H = -g^{\mu\nu}R\nabla_\mu H \tag{C.4}$$

となり，結果として,

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}R\nabla_\mu H + \xi_A A^\beta F^\nu_\beta R + \nabla_\mu(\xi_A A^\mu A^\nu R)$$

となる．ここで，$F^\nu{}_\beta = g^{\nu\alpha}F_{\alpha\beta} = g^{\nu\alpha}(\nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\alpha A_\beta)$（ただし$F_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha$）を考慮すると，第 3 項の最初の項は，$\xi_A R g^{\nu\alpha}(\nabla_\alpha A_\beta)A^\beta$ となり，第 1 項は，$-\xi_A R g^{\nu\alpha}(\nabla_\alpha A_\beta)A^\beta$ となるので，これらは打ち消しあう．つまり,

$$\nabla_\mu(T^{\mu\nu}) = \nabla_\mu(\xi_A A^\mu A^\nu R) - \xi_A R g^{\nu\alpha}(\nabla_\beta A_\alpha)A^\beta = \xi_A\nabla_\mu(A^\mu R)A^\nu \tag{C.5}$$

となり，(2.6) 式から $\nabla_\mu(A^\mu R) = 0$ より

$$\nabla_\mu(T^{\mu\nu}) = 0 \tag{C.6}$$

が成立する．

付録 D.　(C.2) 式の導出

$$\nabla_\mu(\frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} - F^\mu{}_\beta F^{\nu\beta}) = -\nabla_\mu T^{\mu\nu}_A$$
$$= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}\nabla_\mu F_{\rho\sigma} - (\nabla_\mu F^\mu{}_\beta)F^{\nu\beta} - F^\mu{}_\beta\nabla_\mu(F^{\nu\beta}) \tag{D.1}$$

ここで,

$$\nabla_\mu F_{\alpha\beta} = -\nabla_\alpha F_{\beta\mu} - \nabla_\beta F_{\mu\alpha} \tag{D.2}$$

であるから，(D.1) の右辺は,

$$= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta}(-\nabla_\alpha F_{\beta\mu} - \nabla_\beta F_{\mu\alpha}) - (g^{\mu\alpha}\nabla_\mu F_{\alpha\beta})F^{\nu\beta} - g^{\nu\alpha}F^{\mu\beta}(\nabla_\mu F_{\alpha\beta}) \tag{D.3}$$

となり，最初の 2 項は,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} g^{\mu\nu}(-F^{\alpha\beta}\nabla_\alpha F_{\beta\mu} - F^{\alpha\beta}\nabla_\beta F_{\mu\alpha}) \\ &\quad = g^{\mu\nu}(-F^{\alpha\beta}\nabla_\alpha F_{\beta\mu}) = g^{\alpha\nu}(-F^{\mu\beta}\nabla_\mu F_{\beta\alpha}) \end{aligned} \tag{D.4}$$

となり，(D.3) の第 4 項と打ち消しあう．ここで，付録 B の $F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -\xi_A A^\mu R$ という結果を用いると，(D.1) の右辺は,

$$\text{右辺} = -(\nabla_\mu F^{\mu\beta})F^\nu{}_\beta = \xi_A A^\beta F^\nu{}_\beta R \tag{D.5}$$

となる．つまり,

$$-\nabla_\mu T_A^{\mu\nu} = \nabla_\mu(\frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} - F^\mu_\beta F^{\nu\beta}) = \xi_A A^\beta F^\nu{}_\beta R \tag{D.6}$$

となる.

付録 E.　(3.16) 式の導出

(3.15) 式を (3.13) 式へ代入すると

$$\begin{aligned} &\Box\chi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\Box\chi - 2Z\xi v\eta_{\mu\nu}\Box\sigma - 2Z_A\xi_A\eta_{\mu\nu}\mathcal{A}^\rho\Box a_\rho - \partial_\mu\partial_\lambda\chi^\lambda{}_\nu + \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\lambda\eta^\lambda_\nu\chi \\ &\quad + 2Z\xi v\eta^\lambda_\nu\partial_\mu\partial_\lambda\sigma + 2Z_A\xi_A\mathcal{A}^\rho\eta^\lambda_\nu\partial_\mu\partial_\lambda a_\rho - \partial_\nu\partial_\mu\chi^\lambda{}_\mu + \frac{1}{2}\partial_\nu\partial_\lambda\eta^\lambda_\mu\chi + 2Z\xi v\eta^\lambda_\mu\partial_\lambda\partial_\mu\sigma \\ &\quad + 2Z_A\xi_A\mathcal{A}^\rho\eta^\lambda_\mu\partial_\nu\partial_\lambda a_\rho + \partial_\mu\partial_\nu(-\chi - 8Z\xi v\sigma - 8Z_A\xi_A\mathcal{A}^\rho a_\rho) + \eta_{\mu\nu}(\partial_\rho\partial_\sigma\chi^{\rho\sigma} \\ &\quad - \frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma}\partial_\rho\partial_\sigma\chi - 2Z\xi v\eta^{\rho\sigma}\partial_\rho\partial_\sigma\sigma - 2Z_A\xi_A\mathcal{A}^\alpha\eta^{\rho\sigma}\partial_\rho\partial_\sigma a_\alpha + \Box\chi + 8Z\xi v\Box\sigma \\ &\quad + 8Z_A\xi_A\mathcal{A}^\alpha\Box a_\alpha) - 4Z\xi v(\eta_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu)\sigma - 4Z_A\xi_A\mathcal{A}^\alpha(\eta_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu)a_\alpha \\ &\quad = \Box\chi_{\mu\nu} + (-2Z\xi v\eta_{\mu\nu}\Box + 6Z\xi v\eta_{\mu\nu}\Box - 4Z\xi v\eta_{\mu\nu}\Box)\sigma + (-2Z_A\xi_A\mathcal{A}^\rho\eta_{\mu\nu}\Box \\ &\quad\quad + 6Z_A\xi_A\mathcal{A}^\rho\eta_{\mu\nu}\Box - 4Z_A\xi_A\mathcal{A}^\rho\eta_{\mu\nu}\Box)a_\rho = \Box\chi_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{E.1}$$

となる.

参　考　文　献

[1]　C. Brans and H. Dicke, Phys. Rev. **124** (1961) 925.

[2] C. M. Misner, K. Thorne, J. A. Wheeler, “*Gravitation*”, Freeman and Company 1970.
[3] S. Weinberg, “*Gravitation and Cosmology*”, John Wiely and Sons 1972.
[4] R. M. Wald, “*Genaral Relativity*”, Chicago Press 1984.
[5] L. Smolin, ArXiv hep-th/0303185.
[6] P. Jordan, “*Schwerkraft und Weltall*”, Vieweg und Sohn, Braunschweig 1955.
[7] Y. Fujii, Nature Phys. Sci. **234** (1971) 5; Phys Rev. **D9** (1974) 874.
[8] M. Milgrom, Astrophys. J. **270** (1983) 365.
[9] R. H. Sandersi, Astrophys. J. **480** (1997) 492.
[10] 「重力とスカラー場」（講談社サイエンティフィク），藤井保憲著 (1997).
[11] 「場の古典論」（原書第 6 版），ランダウ，リフシッツ著，恒藤敏彦，広重徹訳，(1984) 91–95.
[12] C. Munoz, ArXiv hep-ph/0309346.
[13] J. D. Bekenstein, ArXiv astro-ph/0403694.

On a Nonminimal Coupling of Scalar and Vector Fields to Gravity

Daigo KAJIURA
Keita SAKAI
Tetsuya HARA

Abstract

The nonminimal coupling of scalar field to gravity is known as a Brans-Dicke (B-D) theory [1]. The theoretical meaning of B-D theory is discussed as one of the modification of Einstein's general theory of relativity. Including a vector field to the scalar field in the nonminimal coupling, we investigate what kind of effects could be expected. By introducing a simple form of the vector field, the equations are derived by variations of Lagrangian through the metric, vector and scalar fields, respectively. Even including the vector field, it is found that the equivalent principle still holds and particles obey the geodesic equation. In the weak field approximation, the effect of the vector field is found to be similar to that of the scalar field.

Keywords: B-D theory , scalar field, vector field, nonminimal coupling, equivalent principle