

通常粒子がブラックホールになる時の エントロピー変化の連続性

梶 浦 大 吾
原 哲 也

(平成 19 年 10 月 10 日提出)
(平成 20 年 2 月 13 日修正)

要 旨

通常物質がブラックホール (BH) になる時、エントロピーが不連続に変化するという問題がある。これは BH のもつ特異性によるものと考えられている。その問題に対し、この論文では一般化された不確定性原理 (GUP) を用い新たなエントロピー形式を導出することで、このような不連続性、特異性は存在しないことを考察する。まず相対論的な通常 (BH でない) 粒子にエネルギーを与えていき BH になる変化のプロセスを考えることで、通常粒子と BH のエントロピーは連続的に滑らかに接続されることをみる。また、BH からのエントロピーは GUP を用いて解くと Hawking [1] や Bekenstein [2] のエントロピー形式に余剰項が付く形式 (Medved と Vagenas 等 [3]) になる。本論文で得られた新たなエントロピー形式が近似的にこれを包含していることを見る。そしてこの形式によると Medved と Vagenas [3] 等のエントロピーは修正されなければならないことになる。

キーワード：ブラックホール、エントロピー、GUP、不確定性原理、プランク質量

1. イントロダクション

その質量が太陽質量よりも大きな、超大質量の星の崩壊を考える。超大質量星は放射圧が優勢で、その重力不安定性から崩壊すると考えられている。オーダーの推定ではあるが、重力エネルギーと放射エネルギーが等しいとすると $GM^2/r \simeq \epsilon V/3$ が成立し、 $M \simeq \epsilon V/c^2$ を用いると $r \simeq r_g$ の関係式を得る。ただしここで、放射密度を、 $\tilde{a} = \pi^2 k_B^4 / (15 \hbar^3 c^3)$ を用いて、 $\epsilon = \tilde{a} T^4$ とした。半径 r 程度に、質量 M 、温度 $T (= T_*)$ の黒体放射があると、 $r \simeq (3Mc^2/(4\pi\epsilon))^{1/3}$ であり、これが、重力半径程度とすれば、温度 T_* に対して、

$$\frac{k_B T_*}{m_{pl} c^2} \simeq \left(\frac{45}{32\pi^3} \right)^{1/4} \left(\frac{m_{pl}}{M} \right)^{1/2} \quad (1.1)$$

の関係が得られる。ここで m_{pl} はプランク質量 $m_{pl} \simeq \sqrt{\hbar c/G}$ である。(1.1) 式は $T_* \propto M^{-1/2}$ であ

り，これよりエントロピー $S = \int dU/T = 4Mc^2/(3T_*)$ を求めると，

$$\frac{S}{k_B} \simeq \frac{4}{3} \left(\frac{2}{45} \right)^{1/4} \left(\frac{A}{L_{pl}^2} \right)^{3/4} \simeq 10^{58} (M/M_\odot)^{3/2} \quad (1.2)$$

となる．ただし A は星が BH になった時の表面積であり， L_{pl} はプランク波長 $L_{pl} \simeq \sqrt{G\hbar/c^3}$ である．一方，BH になった後のエントロピー S_{BH} は表面積 A に比例する [2] ので

$$\frac{S_{BH}}{k_B} \simeq \left(\frac{A}{4L_{pl}^2} \right) \simeq 10^{77} (M/M_\odot)^2 \quad (1.3)$$

と表わされる．これより，BH 形成前と後ではファクターでおよそ $\left(\frac{A}{4L_{pl}^2} \right)^{1/4} \simeq 10^{19} (M/M_\odot)^{1/2}$ の違いが生じる．つまり，超巨大質量天体などの天体は，BH を形成したとたんにファクターがおよそ $\left(\frac{A}{4L_{pl}^2} \right)^{1/4}$ 程，不連続に大きくなる．これは BH のもつ特異性と考えられている．

通常天体が BH になる過程で生じる，このエントロピー変化の特異性の問題は，現在多くの物理学者を悩ませている．この不連続性を，一般相対論の時空の歪みによる固有体積の増加として，もしくは BH の内側の体積の増大，そしてそこへの粒子の自由拡散によるエントロピーの増大として，不連続性を理解しようとする試みがあるが [4]，その試みも一般に受け入れられているわけではない．視点を変えて，我々は，GUP の立場から考えた時，通常粒子 1 粒子の場合はこの特異性が生じないことに注意して，特異性が生ずる原因を調べていく．

ベケンシュタインによって BH にエントロピーが存在し，そのエントロピーは BH の表面積に比例することが示され，ホーキングにより BH から輻射があることが示された ([1],[2])．黒体輻射のアナロジーから，ハイゼンベルグの不確定性関係を用いて，BH 半径を位置の不確定さに対応させることでホーキング輻射 T はファクターを無視すると

$$k_B T \simeq \frac{\hbar c}{R_g} \quad (1.4)$$

と表わせることが知られている．ここで， k_B, R_g, \hbar, c はそれぞれ，ボルツマン定数，BH 半径，プランク定数，光速である．一方，同様に質量の無い通常粒子 (BH ではない状態) の輻射エネルギーはファクターを無視すると

$$k_B T \simeq \frac{\hbar c}{\lambda_c} \quad (1.5)$$

と表わせることが知られている．ここで， λ_c はこの粒子の位置の不確定さであり，粒子の大きさ (広がり) である．この λ_c を以下コンプトン波長と呼ぶことにする．

2004 年 Medved と Vagenas [3] らは一般化された不確定性原理 (Generalized Uncertainty Principle (GUP))

$$\Delta x \simeq \frac{\hbar}{\Delta p} + L_{pl}^2 \frac{\Delta p}{\hbar} \quad (1.6)$$

(Δx を位置の不確定さ, Δp を運動量の不確定さ) を用いて ([5],[6],[7]), BH からの輻射形式が, 単純にシュヴァルツシルト半径に反比例するものではなく, エントロピーもまた単純に BH の表面積に比例するのではなく余剰項が付く形式であると示した (この関係は 4 次元時空の物理から求まることを後に示す). しかしながら, GUP を用いて BH からの輻射やエントロピーを議論する研究者達は, ほとんど BH になった物質の状態のみを研究対象にしている. 我々は, BH ではない通常粒子が BH に変わるプロセスでのエントロピーの変化を見ていく. このようなプロセスの研究は新しい試みと考えられる.

1.1 ニュートンのアプローチからの GUP の導出

GUP は String 理論 [9] やループ重力理論 [10] 等から求められ, 支持される関係であった. しかし現在, 4 次元時空の理論である一般相対論や, より古典的なニュートンの万有引力の法則における重力を考慮しても, 導出できる事がわかっている [8]. 我々は, String 理論やループ重力理論の是非にかかわらず, この 4 次元時空において GUP の (1.6) 式が成立するという立場をとる.

この重力的不確定性をも考慮する GUP 形式の導出方法は, 以下のようなニュートンのアプローチがある. もし我々が同じような相対論的な粒子 A と粒子 B を考え (またはある粒子が粒子 A と粒子 B に分かれたとして), 粒子 A のエネルギーを E_a とおくと, その実効質量 m_a は $m_a = \frac{E_a}{c^2}$ とかける. そのとき, この粒子 A は粒子 B と重力相互作用する (もしくは自分自身と重力相互作用する) とすると, 粒子 B の受ける加速度 a_b は以下のように与えられる.

$$a_b \simeq \frac{Gm_a}{r^2}$$

いま, 相互作用領域が L の大きさであり, $c\Delta t \sim L \sim r$ という関係を持つと考える. そのとき, 粒子 B の速度変化 Δv_b は

$$\Delta v_b (\simeq \Delta v_a) \simeq a_b \Delta t \simeq \frac{GE_a}{c^2 r^2} \frac{c\Delta t}{c} = \frac{GE_a}{c^3 L} \quad (1.7)$$

で与えられる. この相互作用による位置の不確定さ Δx_G は

$$\Delta x_G \simeq \Delta v_b \Delta t \simeq \frac{GE_a}{c^3 L} \Delta t \simeq \frac{GE_a}{c^4 L} c\Delta t \simeq \frac{GE_a}{c^4} \simeq L_{pl}^2 \frac{\Delta p}{\hbar} \quad (1.8)$$

によってえられる. ここで $G \simeq L_{pl}^2 c^3 / \hbar$, $E_a / c \equiv \Delta p$ とした. 一方, ハイゼンベルグの位置の不確定性 Δx は

$$\Delta x_H \simeq \frac{\hbar}{\Delta p} \quad (1.9)$$

とかける. ゆえにトータルの位置の不確定性 Δx は

$$\Delta x \simeq \frac{\hbar}{\Delta p} + L_{pl}^2 \frac{\Delta p}{\hbar} \quad (1.10)$$

である．自分とほぼ同等な粒子との重力相互作用（もしくは自分自身との自己重力相互作用を考慮に入れたとき），上記のような不確定性関係が得られる．

これから 1 個の相対論的な通常粒子のエネルギーを上げて行き，BH になる過程における輻射エネルギー，エントロピーを議論する．その中で従来のものとは異なる新しいエントロピー形式の導出をみる．

2. 通常粒子から BH へ

通常（BH ではない）の質量ゼロと見なせるような，相対論的粒子のエネルギーを上げていく場合を議論する（例えば仮想的にある箱の中に閉じ込めてあると考える）．エネルギーを加えていくと，その粒子のコンプトン波長は小さくなって行く（質量ゼロの粒子に対しても，粒子の広がりをコンプトン波長と呼ぶことにしている）．やがて粒子は BH になる．この過程でのエントロピーの表面積のベキの連続性を見る．プランク波長 L_{pl} ，光速 c ，プランク定数 \hbar を用いて一つの粒子のエネルギー E を，以下のように定義する．

$$E = \alpha \frac{\hbar c}{L_{pl}} \quad (2.1)$$

α はこの粒子が保持するエネルギーの大きさを表わすパラメータである．

$E \simeq \Delta pc$ とおき，1 粒子の大きさ（広がり） λ_g を $\lambda_g \simeq \Delta x$ とおく．すると GUP (1.6) 式は

$$\lambda_g \simeq \frac{\hbar c}{\Delta pc} + L_{pl}^2 \frac{\Delta pc}{\hbar c} \simeq L_{pl} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \quad (2.2)$$

と表わせる．ゆえに，粒子の大きさがエネルギーパラメータ α に依存する形式になる．この形式が導出されたことは興味深い． α は 1 より小さい値から始まり 1 を経由して 1 より大きくなっていく．このとき λ_g は， $2L_{pl}$ まで小さくなったところで折り返し，再び大きくなって行く． $\alpha < 1$ の時， λ_g はコンプトン波長の大きさを表わしており，粒子は通常粒子である．

一方， α （エネルギーパラメータ）はどこまでも大きくなれるが λ_g が $2L_{pl}$ より小さくならないということは，それ以上の輻射エネルギーモードが存在しないことを意味している．言いかえると GUP の立場からは，我々の時空にはプランクスケールより小さな波長のもが存在しないことを意味する．これは GUP の意味合いから考えて，重力による cut off であると考えられる． $\alpha > 1$ の時， λ_g はシュヴァルツシルト半径を表わし，粒子は BH になると解釈できる．1 粒子のエネルギーに対応する α を使って，コンプトン波長とシュヴァルツシルト半径の両方を連続的にあわすことの出来る形式を GUP から導き出せたことは，GUP の新たな可能性を示している．

この粒子の輻射温度を T ，ボルツマン定数を k_B とすると，粒子からの輻射エネルギー $k_B T$ は，

(1.6) 式で $\Delta pc = k_B T$ とすることにより,

$$k_B T \simeq \frac{\lambda_g \hbar c}{2 L_{pl}^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4L_{pl}^2}{\lambda_g^2}} \right) \quad (2.3)$$

であると求められる．しかしこれには二つの解が出てくる． $\alpha \ll 1$ で相対論的粒子の輻射エネルギー形式 $\simeq \frac{\hbar c}{\lambda_g}$ ((1.5) 式の λ_c を λ_g に書き換えた) に, $\alpha \gg 1$ でホーキングの輻射エネルギー形式 $\simeq \frac{\hbar c}{\lambda_g}$ ((1.4) 式の R_g を λ_g に書きかえた) に, 漸近しなければならないので, ルートの前の符号はマイナスをとることが妥当である．

$$k_B T \simeq \frac{\lambda_g \hbar c}{2 L_{pl}^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4L_{pl}^2}{\lambda_g^2}} \right) \quad (2.4)$$

この符号の議論は他の論文でもなされており, 同じくマイナスの符号を採用している (例えば [3],[8],[11] など)．

この粒子のエントロピーを s とする (1 個の粒子に輻射温度とかエントロピーが定義できるのかという問題があるが, 1 個あたりと考えて議論を続ける)．この粒子は相対論的であるのでエネルギーは熱力学第一法則から $dE \simeq T ds$ となる．今簡単のため $E \simeq Ts$ と近似すると, (2.1) 式は,

$$E = \alpha \frac{\hbar c}{L_{pl}} \simeq Ts \simeq k_B T \times \frac{s}{k_B} \quad (2.5)$$

とかけるので, エントロピー $\frac{s}{k_B}$ は

$$\begin{aligned} \frac{s}{k_B} &\simeq \frac{E}{k_B T} \simeq \frac{2\alpha L_{pl}}{\lambda_g} \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4L_{pl}^2}{\lambda_g^2}}} \simeq \alpha \frac{\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2}} \right) \\ &= \frac{\alpha}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} + \left| \alpha - \frac{1}{\alpha} \right| \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

と記述される．これは $\alpha < 1$ のとき

$$\frac{s}{k_B} \simeq 1 \quad (2.7)$$

$\alpha > 1$ のとき

$$\frac{s}{k_B} \simeq \alpha^2 \quad (2.8)$$

となり, $\alpha = 1$ を境に関数形が変わってしまうのである．

この粒子の表面積を A とする．この粒子の大きさ (広がり) を λ_g であらわすと, それは以下のようなになる．

$$A = 4\pi\lambda_g^2 \simeq 4\pi L_{pl}^2 \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)^2 \quad (2.9)$$

(2.6) 式を (2.9) 式の面積 A の n 乗の形式であらわすと,

$$\frac{s}{k_B} \simeq \frac{\alpha}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} + \left| \alpha - \frac{1}{\alpha} \right| \right) \simeq \left(\frac{A}{4L_{pl}^2} \right)^n \quad (2.10)$$

となり, ベキ n は $\alpha < 1$ のとき

$$n = 0$$

$\alpha > 1$ のとき

$$n \simeq 1$$

となる.

この結果は通常粒子 ($\alpha < 1$) のエントロピーがエネルギー, コンプトン波長の大きさにかかわらず常に一定であることをあらわす. これは通常天体のエントロピーが構成している粒子数に比例することに対応する. ただし, 厳密にいうとこの解釈は正しくない. なぜなら, ヒートアップされてエネルギーが大きくなって行くのだから当然, 一つの粒子の持つ状態数はエネルギー量に比例するはずである. よってエントロピーはエネルギーパラメータ α の対数に比例する項があるはずである. 実際, 非縮退の相対論的フェルミ粒子のエントロピー S_F はエネルギーを E_F とおくと

$$\frac{S_F}{k_B} = 4 + 3 \ln \left(\frac{L_{pl}}{\hbar c} E_F \right) + C_F \quad (2.11)$$

(C_F は定数) と対数の入った形式で書けることが知られている. 我々の求めたエントロピーがこのような形式にならない理由は, (2.5) 式でこの粒子のエネルギーを $E \simeq Ts$ と近似したためである. これは相対論的粒子のエントロピーの一次近似に対応する.

一方 BH の場合 ($\alpha > 1$) のエントロピーは, その表面積に比例することが分かる. これは BH のエントロピーとしてよく知られた形式である. ただし我々の求めたエントロピー形式は, 通常粒子から BH に変化する境目である $\alpha = 1$ の周辺で n が連続的に変化するが滑らかではない. このことは通常粒子から BH に変化する過程において特異性があるように見える. しかし, このような結果になるのは $E = Ts$ と近似したためである. この近似は通常粒子から BH へのエントロピー変化を見る際, 連続性は示せるが滑らかさは示す事はできないという困難がある.

以下では, より正確な考察をしてみよう.

$$dE = T ds$$

としてエントロピーをとくと, (2.1) 式と (2.4) 式を用いて

$$\frac{ds}{k_B} = \frac{dE}{k_B T} \simeq \frac{\lambda_g}{2L_{pl}} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4L_{pl}^2}{\lambda_g^2}} \right) d\alpha \quad (2.12)$$

となる．これより α に依存するエントロピーの傾き $\frac{1}{k_B} \frac{ds}{d\alpha}$ は

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_B} \frac{ds}{d\alpha} &\simeq \frac{\lambda_g}{2L_{pl}} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4L_{pl}^2}{\lambda_g^2}} \right) \simeq \frac{\lambda_g}{2L_{pl}} \left(1 + \frac{|\alpha - \frac{1}{\alpha}|}{\alpha + \frac{1}{\alpha}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} + |\alpha - \frac{1}{\alpha}| \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

である．すなわち $\alpha < 1$ のとき

$$\frac{1}{k_B} \frac{ds}{d\alpha} \simeq \frac{1}{\alpha}$$

$\alpha > 1$ のとき

$$\frac{1}{k_B} \frac{ds}{d\alpha} \simeq \alpha$$

と， $\alpha = 1$ を境に形式が変わるが連続である．このことは実際エントロピーは

$\alpha < 1$ のとき

$$\frac{s}{k_B} \simeq \ln \alpha + C_1 \quad (2.14)$$

(C_1 : 積分定数)．また， $\alpha > 1$ のとき

$$\frac{s}{k_B} \simeq \alpha^2/2 + C_1 - 1/2 \quad (2.15)$$

となり， α の関数としての s が $\alpha = 1$ で滑らかに解析接続されることを意味する．つまり，エントロピー s の α に関する変化は滑らかである．このエントロピー形式が妥当であることは $\alpha < 1$ の通常粒子においては非縮退の相対論的フェルミ粒子のエントロピー S_F を表わした (2.11) 式の形式と同形であることからわかる． $\alpha > 1$ の BH 状態の粒子においては，(2.9) 式，(2.10) 式の議論からエントロピーが面積に比例することからわかる．

つまり，この GUP による考察のもとでは通常粒子から BH へのエントロピー変化が連続で滑らかであることを導いた．このことは，通常粒子から BH へのエントロピー変化において特異性がないことを意味する．次章で，我々が導き出したこのエントロピー形式の導出方法が妥当であるかどうかを考察するとともに，従来信じられていたエントロピー形式との違いを見る．

3. GUP から導出されたメドベドエントロピーとの比較

前節で導出したエントロピー形式 s は，エネルギーパラメータ α (または粒子 1 個あたりのエネルギー E) に関して連続で滑らかであることを表わす．これは通常粒子から BH への変化のプロセスにおいて特異性がないことを意味している．まずメドベドらが導き出したエントロピーと比較することで，我々のエントロピーの導出が妥当であることを見る．つづいて，我々

の導出したエントロピーは従来広く信じてこられたメドベドのエントロピーや、その他のいくつかのエントロピーと異なる事を見る．

3.1 エントロピー導出法の妥当性

このエントロピー形式が妥当なものであるかを見ていく．本論文で用いたような GUP から BH のエントロピー形式を、最初に導いたのはメドベドである [3]．メドベドは BH のエントロピーを面積で展開した形式を導いた．メドベドの導出した BH のエントロピー形式 S_{GUP} と我々の導き出したエントロピー形式と比較することで導出の妥当性を見る．メドベドのエントロピー形式は

$$\frac{S_{GUP}}{k_B} \simeq \frac{A}{4L_{pl}^2} - \frac{\pi}{4} \ln \left(\frac{A}{4L_{pl}^2} \right) + \frac{\pi^2}{16} \left(\frac{4L_{pl}^2}{A} \right) + \sum_{i=2}^{\infty} c_i \left(\frac{A}{4L_{pl}^2} \right)^{-i} \quad (3.1)$$

である．ここで A は BH の表面積， c_i は i で展開される係数である．これは通常粒子と BH の間の繋がり（連続性）を考慮しないことで導き出されたものである．一方我々の導出したエントロピーは、通常粒子と BH の間の繋がり（連続性）を考慮して導き出したものであるからこのままでは比較することができない．そこで $\lambda_g \simeq \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha\right)L_{pl}$ を通常粒子と BH の間の繋がり（連続性）を考慮しない形式 $\lambda_g \simeq \alpha L_{pl}$ にかえてエントロピーを導出する．前節でのエントロピー導出に使った (2.12) 式を BH の表面積 A で展開する．

$$dE = T ds$$

より (2.1) 式と (2.4) 式を使って

$$\frac{ds}{k_B} = \frac{dE}{k_B T} \simeq \frac{2L_{pl}}{\lambda_g(\alpha)} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4L_{pl}^2}{\lambda_g^2(\alpha)}} \right)^{-1} d\alpha \simeq \frac{2L_{pl}}{\lambda_g(\alpha)} \frac{\lambda_g^2(\alpha)}{4L_{pl}^2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4L_{pl}^2}{\lambda_g^2(\alpha)}} \right) d\alpha$$

の関係が得られ，ここで $\chi(\alpha) = \frac{4L_{pl}^2}{\lambda_g^2(\alpha)}$ とおいてテイラー展開する．

$$\simeq \frac{2L_{pl}}{\lambda_g} \left(\frac{2}{\chi(\alpha)} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\chi(\alpha) - \frac{3}{16}\chi^2(\alpha) - \dots \right) d\alpha \quad (3.2)$$

となる．いま通常粒子と BH の間の繋がり（連続性）を考慮しないので， $\lambda_g \simeq \alpha L_{pl}$ とすると， $d\alpha \simeq \frac{1}{L_{pl}} d\lambda_g$ ， $\chi(\lambda_g) = \frac{4L_{pl}^2}{\lambda_g^2}$ と置き， λ_g の変数に置きかえると，

$$\simeq \frac{2}{\lambda_g} \left(\frac{2}{\chi(\lambda_g)} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\chi(\lambda_g) - \frac{3}{16}\chi^2(\lambda_g) - \dots \right) d\lambda_g$$

となる．表面積 A は $8\pi\frac{\lambda_g}{2}d\frac{\lambda_g}{2} = dA$ をみたくから， $d\lambda_g = \frac{dA}{2\pi\lambda_g}$ であり $\lambda_g^2 = \frac{A}{\pi}$ と書けるから，上式は

$$\begin{aligned} &\simeq \frac{1}{A} \left(\frac{2}{\pi} \left(\frac{A}{4L_{pl}^2} \right) - \frac{2}{4} - \frac{2\pi}{16} \left(\frac{4L_{pl}^2}{A} \right) \right) dA \\ &\simeq \left(\frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{4L_{pl}^2} \right) - \frac{2}{4A} - \frac{2\pi}{16} \left(\frac{4L_{pl}^2}{A^2} \right) \right) dA \end{aligned}$$

と表わせる．これを積分してエントロピーを求めると

$$\begin{aligned} \frac{s}{k_B} &\simeq \int_{4L_{pl}}^A \left(\frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{4L_{pl}^2} \right) - \frac{2}{4} - \frac{2\pi}{16} \left(\frac{4L_{pl}^2}{A^2} \right) \right) dA \\ &\simeq \frac{2}{\pi} \frac{A}{4L_{pl}^2} - \frac{2}{4} \ln \left(\frac{A}{4L_{pl}^2} \right) + \frac{2\pi}{16} \left(\frac{4L_{pl}^2}{A} \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

となる．ある面で不確定性関係で考察してきたために，ファクター $\frac{\pi}{2}$ を掛けてやると

$$\frac{s}{k_B} \simeq \frac{A}{4L_{pl}^2} - \frac{\pi}{4} \ln \left(\frac{A}{4L_{pl}^2} \right) + \frac{\pi^2}{16} \left(\frac{4L_{pl}^2}{A} \right) + \dots$$

が得られ，(3.1) 式に一致する．よって我々のエントロピー導出は， $\lambda_g \simeq \alpha L_{pl}$ において妥当であると推定できる．

3.2 新たなエントロピー形式

3.1 では $\lambda_g \simeq \alpha L_{pl}$ として計算した．これは BH 領域のみ考慮したものである．しかし，この論文で我々は通常物質と BH の広がり統合的にあらわせることを見てきた．今度は通常粒子と BH の間の繋がりを考慮した我々のエントロピーの表面積展開形式を見て行こう．そうすると従来のエントロピー形式 (3.1) 式は修正される．まず (3.2) 式において

$$\frac{ds}{k_B} \simeq \frac{2L_{pl}}{\lambda_g} \frac{1}{\chi(\alpha)} \left(1 + \sqrt{1 - \chi(\alpha)} \right) d\alpha$$

であり，ここで通常物質と BH の広がりを統合的に表わした形式 $\lambda_g \simeq \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha \right) L_{pl}$ を用いると $d\alpha = \frac{d\lambda_g}{\left(1 - \frac{1}{\alpha^2} \right) L_{pl}}$ であるから

$$\frac{ds}{k_B} \simeq \frac{2L_{pl}}{\lambda_g} \frac{1}{\chi(\lambda_g)} \left(1 + \sqrt{1 - \chi(\lambda_g)} \right) \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \frac{1}{L_{pl}} d\lambda_g$$

となる．ここで

$$\alpha = \frac{\lambda_g}{2L_{pl}} \left(1 \pm \sqrt{1 - \chi} \right)$$

の関係より一次のテイラー展開から，ルートの前の符号がマイナスのとき $\alpha \propto \frac{1}{\lambda_g}$ なので $\alpha < 1$ で通常粒子のエントロピーを表わし，プラスのとき $\alpha \propto \lambda_g$ なので $\alpha > 1$ であるから BH のエントロピーを表わす．

通報粒子 ($\alpha < 1$) の場合は,

$$\frac{ds}{k_B} \simeq \frac{2}{\lambda_g} \frac{1}{\chi(\lambda_g)} \frac{(1 - \sqrt{1 - \chi(\lambda_g)})}{\frac{1}{\chi(\lambda_g)}(1 - \sqrt{1 - \chi(\lambda_g)})^2 - 1} d\lambda_g \quad (3.4)$$

となり, BH($\alpha > 1$) の場合は

$$\frac{ds}{k_B} \simeq \frac{2}{\lambda_g} \frac{1}{\chi^2(\lambda_g)} \frac{(1 + \sqrt{1 - \chi(\lambda_g)})^3}{\frac{1}{\chi(\lambda_g)}(1 + \sqrt{1 - \chi(\lambda_g)})^2 - 1} d\lambda_g \quad (3.5)$$

と書ける.

(3.1) 式との比較をするため BH($\alpha > 1$) の場合の式 (3.5) 式をテイラー展開する. いま $D(\lambda_g) \equiv \sqrt{1 - \chi(\lambda_g)}$ とおく. (3.2) 式をつかって

$$\begin{aligned} \frac{ds}{k_B} &\simeq \frac{2}{\lambda_g} \frac{\frac{1}{\chi(\lambda_g)}(1 + D(\lambda_g))^2}{\frac{1}{\chi(\lambda_g)}(1 + D(\lambda_g))^2 - 1} \left(\frac{2}{\chi(\lambda_g)} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\chi(\lambda_g) - \frac{1}{16}\chi^2(\lambda_g) - \dots \right) d\lambda_g \\ &\simeq \frac{2}{\lambda_g} \frac{1}{-2\chi(\lambda_g)} \frac{(2 - \chi(\lambda_g) + 2D(\lambda_g))(1 - \chi(\lambda_g) - D(\lambda_g))}{1 - \chi(\lambda_g)} \\ &\quad \times \left(\frac{2}{\chi(\lambda_g)} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\chi(\lambda_g) - \frac{1}{16}\chi^2(\lambda_g) - \dots \right) d\lambda_g \end{aligned}$$

ここで, $(1 - \chi)^{-1} \simeq 1 + \chi + \chi^2 + \chi^3 + \chi^4 + \dots$ と展開して

$$\begin{aligned} &\simeq \frac{2}{\lambda_g} \frac{1}{-2\chi(\lambda_g)} \left(-4 - \frac{1}{4}\chi^2(\lambda_g) - \frac{1}{4}\chi^3(\lambda_g) - \frac{15}{64}\chi^4(\lambda_g) - \frac{7}{32}\chi^5(\lambda_g) - \frac{105}{512}\chi^6(\lambda_g) \right) \\ &\quad \times \left(\frac{2}{\chi(\lambda_g)} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\chi(\lambda_g) - \frac{1}{16}\chi^2(\lambda_g) - \dots \right) d\lambda_g \\ &\simeq \frac{2}{\lambda_g} \left(\frac{2}{\chi} + \frac{1}{8}\chi + \frac{1}{8}\chi^2 + \frac{15}{128}\chi^3 + \dots \right) d\lambda_g \end{aligned}$$

ここで再度 $d\lambda_g = \frac{A}{2\pi\lambda_g}$, $\lambda_g^2 = \frac{A}{\pi}$, $\chi = \pi \frac{4L_{pl}^2}{A}$ と書くと

$$= \frac{1}{A} \left(\frac{2}{\pi} \left(\frac{A}{4L_{pl}^2} \right) + \frac{\pi}{8} \left(\frac{4L_{pl}^2}{A} \right) + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{4L_{pl}^2}{A} \right)^2 + \dots \right) dA$$

と表わせる. これを積分してエントロピーを求めると

$$\frac{s}{k_B} \simeq \frac{2}{\pi} \left(\frac{A}{4L_{pl}^2} \right) - \frac{\pi}{8} \left(\frac{4L_{pl}^2}{A} \right) - \frac{\pi^2}{16} \left(\frac{4L_{pl}^2}{A} \right)^2 - \dots$$

となる. これに先ほどと同様にファクター $\frac{\pi}{2}$ を掛けてやると,

$$\frac{s}{k_B} \simeq \left(\frac{A}{4L_{pl}^2} \right) - \frac{\pi^2}{16} \left(\frac{4L_{pl}^2}{A} \right) - \frac{\pi^3}{32} \left(\frac{4L_{pl}^2}{A} \right)^2 - \dots \quad (3.6)$$

となる. これと, メドベドのエントロピー [3](3.1) 式を見比べると, 第 1 項の表面積比例項以外全て書き変わっている事が分かる. 特に対数項が消えている事は特徴的である. メドベド以来

そのエントロピー形式の修正案はいくつか出されている．GUP を用いてブラックホールのエントロピー形式を研究した Zhao Hai-Xia 等 [12] は

$$\frac{S'_{GUP}}{k_B} \simeq \frac{A}{4L_{pl}^2} + \frac{\pi}{4} \ln \left(\frac{A}{4L_{pl}^2} \right) - \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{4L_{pl}^2}{A} \right) + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left(\frac{A}{4L_{pl}^2} \right)^{-n}$$

という形式を導いた．これはメドベドのエントロピーとは違い対数項の前の符号が正になるものである．また，Nozari and Fazlpour [13] 等は，Noncommutative Geometry (NCG) を用いて

$$\frac{S_{NCG}}{k_B} \simeq \frac{A}{4L_{pl}^2} - \frac{\pi}{2} \ln \left(\frac{A}{4L_{pl}^2} \right) + \frac{\pi^2}{16} \left(\frac{4L_{pl}^2}{A} \right) + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left(\frac{A}{4L_{pl}^2} \right)^{-n}$$

という形式を得た．しかし，これらは何れも対数項が何らかの形で存在し，それ以外の (3.1) 式からの違いはわずかなものである．それに対し我々の形式 (3.6) 式は対数項がないという意味で彼らの形式とは異なっているといえる．これは彼らが BH のみのエントロピーを議論しているのに対し，我々は通常粒子の状態から BH へ連続的に議論しているからである．我々はこの発想から，通常粒子とBHの連続した議論をする事により新しいBHのエントロピー形式を得た．

4. エントロピーの物理的解釈

1 粒子にエネルギーを与えて行くと通常物質 ($\alpha < 1$) より BH ($\alpha > 1$) になった時の方が急激にエントロピーが大きくなることがわかった．このことを物理的に解釈してみよう．まずはじめに，議論を簡単にするため，エントロピーは (2.6) 式で近似したように，トータルエネルギーを輻射エネルギーで割ったもの $\frac{E}{k_{BT}}$ とする．

1 粒子の大きさ (広がり) λ_g は (2.2) 式より

$$\lambda_g \simeq L_{pl} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)$$

である．

通常粒子 ($\alpha < 1$) のとき，(2.7) 式で示したように

$$\frac{S}{k_B} \simeq 1$$

と一定なのに対し，BH ($\alpha > 1$) のとき，(2.8) 式で示したように

$$\frac{S}{k_B} \simeq \alpha^2 \propto A$$

と粒子の表面積に比例する．これは，GUP で考えた時，粒子スケールに最小値が存在することに関係する．粒子スケール λ_g はエネルギーが増大する (α が増大する) と $\alpha < 1$ の領域では小さくなって行くが， $\alpha > 1$ の領域では大きくなって行く．これを解釈するために，粒子の大き

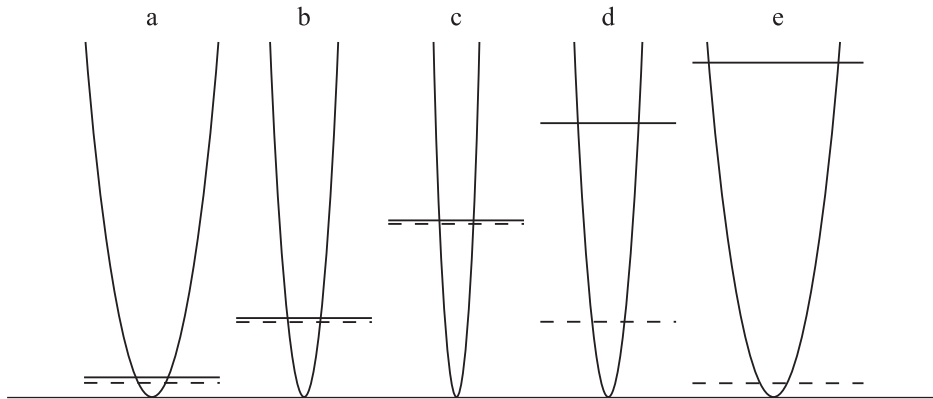


図1 太線がトータルエネルギー，破線が基底エネルギー

さが波長 λ_g に対応するような，調和振動子を考える（図1参照）．これを見ると，図1の a~c ($\alpha \leq 1$) では基底エネルギーが粒子のエネルギーであり，増大するが，図1の d, e ($\alpha > 1$) の領域では再びスケールが大きくなって基底エネルギーは減少するのに対し，トータルエネルギーは上昇する．我々の GUP の解釈では，この状態の時空では， λ_g より小さな波長モードは存在しない．よって，トータルエネルギー E の上昇は，同じエネルギーモード $k_B T$ の調和振動子の数が増大することに対応する．この調和振動子の数がこの粒子のエントロピーと一致する．よって，エントロピーを解釈する上では， $\frac{E}{k_B T}$ は粒子数に対応すると解釈できる．

いま議論したエントロピーは相対論的粒子のエントロピーの一次近似である．そこで次に $\frac{E}{k_B T}$ が，エントロピーに関して，本当に粒子数とみなせるのかを議論する．より具体的にエントロピーの議論をするために，体積 $V = L^3$ の容器に入った理想気体のエントロピーのアナロジーから BH のエントロピーを解釈してみる．この場合でも， $\frac{E}{k_B T}$ は，粒子の個数として，エントロピーに寄与することを見る．

理想気体の場合，1分子の量子状態は運動量によって決まる． N 個の分子がある場合，1分子の運動量の成分は3つあり，独立なので i 番目の運動量の成分 p_i は

$$p_i = \frac{2\pi\hbar}{L} n_i \quad (n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

と量子化される．これは $3N$ 次元の運動量空間に，粒子が体積 $(2\pi\hbar)^{3N}/L^{3N}$ に1分子の割合で一様に分布する． N 粒子系全体のエネルギー E は

$$E = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{3N} p_i^2$$

である．ここで m は理想気体1分子の質量である．エネルギーが E より小さい量子状態の数

$\Omega(E)$ を求めるには、 $3N$ 次元空間における半径 R が

$$R = \sqrt{2mE}$$

の球の体積 V_R を知る必要がある．それは

$$V_R = \frac{2\pi^{\frac{3N}{2}}}{3N\Gamma(\frac{3N}{2})} R^{3N}$$

で与えられる．ここで $\Gamma(\frac{3N}{2})$ はガンマ関数である．これより N 粒子系のエネルギーが E より小さい量子状態の数 $\Omega(E)$ は

$$\Omega(E) = \frac{L^{3N}}{(2\pi\hbar)^{3N}} \frac{2\pi^{\frac{3N}{2}}}{3\Gamma(\frac{3N}{2})} (2mE)^{\frac{3N}{2}}$$

となる．

エネルギー E と $E + \Delta E$ の間の量子状態の数 $W(E)$ は

$$W(E) = \frac{d\Omega(E)}{dE} \Delta E$$

であるから

$$W(E) = \frac{L^{3N}}{(2\pi\hbar)^{3N}} \frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma(\frac{3N}{2})} (2mE)^{\frac{3N}{2}} \frac{\Delta E}{E}$$

と与えられる．したがって、エントロピーは $S(E) = k_B \ln W(E)$ より

$$\frac{S(E)}{k_B} \simeq N \left(\frac{3}{2} \ln \left(\frac{4\pi}{3(2\pi\hbar)^2} \frac{mE}{N} \right) + 3 \ln L + \frac{3}{2} \right) \quad (4.1)$$

で与えられる．

さて、これを我々の議論してきた通常粒子からBHへの変化に伴うエントロピーに適用する．扱っているのは相対論的な一つの粒子である．ここで N は、エネルギーモード $k_B T$ の調和振動子の数 $\frac{E}{k_B T}$ であると仮定し、 m は考慮する粒子の実効質量と考え、 $m = \alpha \frac{\hbar}{L_{pl} c}$ とする． E は $E = \alpha \frac{\hbar c}{L_{pl}}$ である． N は (2.6) 式を用いると

$$N = \frac{E}{k_B T} \simeq \frac{\alpha}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} + \left| \alpha - \frac{1}{\alpha} \right| \right)$$

であるから、 $\alpha < 1$ のとき

$$N = \frac{E}{k_B T} \simeq 1$$

$\alpha > 1$ のとき

$$N = \frac{E}{k_B T} \simeq \alpha^2$$

である．これらを用いて (4.1) 式のエントロピーの式 $S(E)$ を，我々の解釈のエントロピー s に書き直すと

$$\frac{s}{k_B} \simeq \frac{3}{2} N \ln \left(\frac{1}{3\pi L_{pl}^2} \frac{\alpha^2}{N} \right) + \dots \quad (4.2)$$

となる． N は $\alpha = 1$ を境に形式が変わるのでそれぞれの場合を考えると， $\alpha < 1$ のとき

$$N = \frac{E}{k_B T} \simeq 1$$

だから

$$\frac{s}{k_B} \simeq 3 \ln \left(\frac{\alpha}{3\pi L_{pl}^2} \right) \propto \ln \alpha \quad (4.3)$$

であり， $\alpha > 1$ のとき

$$N = \frac{E}{k_B T} \simeq \alpha^2$$

だから

$$\frac{s}{k_B} \simeq \frac{3}{2} \alpha^2 \ln \left(\frac{1}{3\pi L_{pl}^2} \right) \propto \alpha^2 \quad (4.4)$$

となる．(4.3) 式と (4.4) 式の結論は我々が 2 節で導いたエントロピー形式，(2.14) 式，(2.15) 式とほぼ同形になる．このことより，理想気体のエントロピー (4.1) 式の， N に関する我々の仮定が妥当であるとして物理的解釈を試みよう．

まず，通常粒子 ($\alpha < 1$) のとき， $N \simeq 1$ であり，この粒子のエントロピーは理想気体が 1 分子の場合のエントロピー形式に対応する．これは，通常粒子 ($\alpha < 1$) において，調和振動子の数 N が理想気体の分子数に対応することを意味する．一方，BH ($\alpha > 1$) になったとき， N は α^2 で増加する．この場合のエントロピーは，理想気体の分子の数が N 個の場合のエントロピー形式に対応する．これは，BH ($\alpha > 1$) になると，エネルギーモード $k_B T$ の調和振動子の数が理想気体でいうところの分子の役割をすると解釈できる．BH ($\alpha > 1$) になった時の急激なエントロピー上昇は，図 1 で見て分かるように，エネルギーモード $k_B T$ の調和振動子の数 N が急激に増加することに起因していると推察される．

5. BH の蒸発の停止にかんする考察

(2.4) 式より一般的に BH の蒸発は Schwarzschild 半径が $2L_{pl}$ よりも小さければ輻射 $k_B T$ が複素数になってしまうため BH がプランク波長の大きさ程度までとまってしまうと考えられている．この解釈 [8] は数学的ではあるが，物理的意味は不明確である．しかし，我々は，これ

を物理的に考察する．この論文で我々は通常粒子のコンプトン波長も BH の大きさも、ともに $\lambda_g \simeq L_{pl} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)$ と、統一的に記述できるとしてきた． λ_g は α に関して、 $\alpha = 1$ で $\lambda_g \simeq 2L_{pl}$ を極小とする滑らかな関数であることを知っている． α は、エネルギーパラメータであるから、いかなるエネルギーであっても $\lambda_g < 2L_{pl}$ にはなり得ないことが分かる． $\lambda_g \simeq 2L_{pl}$ の地点は特異点ではなく折り返し地点である． $\lambda_g \simeq 2L_{pl}$ で BH からの輻射が終わった時、もし、そこから仮にエネルギーを取り出せたとしても、大きさ λ_g は $2L_{pl}$ より小さくなることが無いので、エネルギーが虚数になることはない．

6. 結論及び議論

我々はこの論文で、String 理論の詳細に入る事無く GUP の関係式

$$\Delta x \simeq \frac{\hbar}{\Delta p} + L_{pl}^2 \frac{\Delta p}{\hbar}$$

を導くことができる事について触れた．この関係式を用いることで相対論的な通常粒子 ($\alpha < 1$) のエントロピーと BH ($\alpha > 1$) のエントロピーまでの変化を統一的に記述することができた．このようにして求められた BH のエントロピー形式を表面積で展開したものは、従来信じてこられた対数項の存在がないことに対応することになる．

熱力学第 1 法則を $E \simeq Ts$ と近似することで通常粒子から BH になる時のエントロピーの急激な増加の物理的解釈を試みた．BH になった時のエントロピーの急激な増加は、その粒子の持つトータルエネルギー E と輻射エネルギー $k_B T$ の比の急激な増加が原因であると考えることができた．その比 $\frac{E}{k_B T}$ は、同一エネルギーの調和振動子の個数と解釈することで、エントロピーの物理的意味を考察した．係数の一致までは議論してはいないが、BH のエントロピーを、 $\frac{E}{k_B T}$ が分子の数であると考えることで、理想気体のエントロピー形式で議論することができることがわかった．それゆえに BH のエントロピーを、理想気体のエントロピーの類推のもとで、解釈する方法を与えた．

GUP は、プランクエネルギー以上のエネルギーが、BH になるなどして、この時空に存在しえないことを、暗示している．このことは String 理論のような抽象的な理論を考慮しなくても、4 次元時空で確立している物理のみから理解できることを意味する．これは興味深いことで、例えば宇宙の始まりの問題の議論 [14] に適用することも考えられる．また、量子論で生じる零点発散の問題に対してプランクスケールで cut off することの根拠となりうる．GUP に基いた物理は応用がもっと広がって行くものと期待される．また、従来不明瞭であった様々な仮定に対して、より明確な根拠を与えられるかもしれない．今後、GUP に基く物理が、一つの枠組みとして確立される日が近い可能性も考えられる．

参 考 文 献

- [1] S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* 43 (1975), 199.
- [2] J. D. Bekenstein, “Black Holes and Entropy”, *Phys. Rev. D* 7 (1973), 2333.
- [3] A. J. M. Medved and E. C. Vagenas, *Phys. Rev. D* 70 (2004), 124021.
- [4] T. Hara, K. Sakai and D. Kajiura, “On the Entropy Increase in the Black Hole Formation”, arXiv:gr-gc/0503105.
- [5] G. Veneziano, *Europhys. Lett.* 2, 199 (1986); E. Witten, *Phys. Today*, Apr. 24 (1996).
- [6] R. J. Adler and D. I. Santiago, *Mod. Phys. Lett. A* 14, 1371 (1999).
- [7] M. Maggiore, *Phys. Lett. B* 304, 65 (1993); F. Scardigli, *Phys. Lett. B* 452, 39 (1999).
- [8] Pisin Chen, *Generalized Uncertainty Principle and Dark Matter*, astro-ph/0305025.
- [9] J. Polchinski, *String Theory* (CUP, Cambridge, 1998).
- [10] A. Ashtekar and J. Lewandowski, *Class. Quant. Grav.* 21 (2004) R53-R152; C. Rovelli, *Quantum Gravity* (CUP, Cambridge, 2004); T. Thiemmn, gr-qc/0110034.
- [11] 酒井啓太, “重力と熱力学 第5章”, <http://www.cc.kyoto-su.ac.jp/miyoshi/review/sakai.pdf>.
- [12] Zhao Hai-Xia, Li Huai-Fan, Hu Shuang-Qi and Zhao Ren, “Generalized uncertainty principle and correction value to the black hole entropy”, arXiv:gr-qc/0608023.
- [13] Kourosh Nozari and Behnaz Fazlpour, “Thermodynamics of an Evaporating Schwarzschild Black Hole in Noncommutative Space”, arXiv:hep-th/0605109v2.
- [14] Marco Valerio Battisti, Giovanni Montani, arXiv:gr-qc/0703025v2.

Continuation of the Entropy Variation in the Process from an ‘Ordinary’ Particle to the Black Hole

Daigo KAJIURA

Tetsuya HARA

Abstract

Falling an ‘ordinary’ matter (non-Black Hole) into the Black Hole (BH), there is a problem that the entropy increases discontinuously. Such a problem is understood because the BHs have the singular nature. In this paper we show that there is no discontinuity and singular nature by deriving the new entropy formalism by using Generalized uncertainty principle (GUP). At first we show that the entropy variation between ‘ordinary’ particle and BH is continuously and smoothly connected assuming the process that a relativistic ‘ordinary’ particle varies to BH by increasing an energy of the particle. On the other hand, the formulation of BH entropy has extra terms, solving BH entropy based on GUP (Medved. et. al. 2004). We show that the new entropy formulation derived in this paper approximately include them. At the end, we show that the entropy formulation must be rewritten by a theory in this paper.

Keywords: black hole, entropy, GUP, Uncertainty Principle, Planckmass