

# 非半単純リー代数に基づく弱混合行列の研究

小 西 康 文  
矢 崎 隆

(平成 19 年 10 月 24 日提出)

## 要 旨

$SU(2) \times U(1)$  と同型である非半単純リー代数の 4 つの群パラメータによって特徴づけられたフレーバー混合行列を使い、レプトンとクォークセクターの実験結果をもとに数値解析を行った。ニュートリノ振動のデータを調査するため、その絶対値が十分小さいと観測されている混合行列の 1-3 成分を厳密に 0 とする自然な仮定  $V_{13} = 0$  を課す。この仮定は、4 つのパラメータのうち 2 つに依存する解析関数で、レプトンフレーバー行列を表現することを可能にする。クォークの混合行列の群パラメータは、階層的構造を持つ非常に異なる値をとることが確かめられたのに対し、レプトンの混合行列を構成する全ての群パラメータは、近似的に同じオーダーの大きさの値を持つことがわかった。

キーワード：フレーバー混合行列，ニュートリノ振動，非半単純リー代数，群パラメータ，数値解析

## 1. 序論

素粒子の標準模型を越える理論的枠組を与える候補の 1 つに、フレーバー対称性を持つ理論体系がある。これは質量を除いて同じ性質を持つ粒子が作る世代構造を説明するものである。質量固有状態とフレーバー固有状態の違いから、弱荷電カレントに弱混合行列が現れる [1, 2]。通常、この混合行列は 3 つの回転角と 1 つの CP の破れを表す位相で表される。3 つのパラメータが  $SO(3)$  対称性の角度であるのに対し、CP の破れの位相は数学的な形式で導入されたものではない。このようにして表現された混合行列は、その形を一意的に表すことはできず、さまざまな形が存在する [3]。混合行列の 4 つより多くの成分に位相が現れる時、混合行列は無限に多くの表現形態をとる [4]。

曾我見により提案された弱混合行列に対する新たな理論は、この混合行列を非半単純リー代数  $\tilde{A}$  から作られるリー群  $\tilde{G}$  の要素とし、それは対応する 4 つの群パラメータにより特徴づけられる [5]。その論文では、この理論でクォークセクターの実験結果が高い精度で再現されることが示された。その理論は、レプトンセクターにも用いることができる。レプトン混合行列の情報は、主にニュートリノ振動による観測実験により得られる。このレプトンセクターの観測量は、クォークセクターには及ばないものの、その値の精度が飛躍的に向上してきた。

この論文の目的は、曾我見によって作られた非半単純リー代数に基づく弱混合行列をレプトンセクターに適用し、その性質を調べ、クォークセクターと比較することである。まず、2節ではレプトン混合行列とその観測実験を要約する。次に、この論文の基礎となる非半単純リー代数に基づくフレーバー混合行列を3節で簡単に紹介する。4節では混合行列の1-3成分を0に置き、この混合行列を求め、4つの解を示す。5節では、この4つの解と実際の実験データとの対比を行う。6節では、求められた群パラメータの特徴を基に、混合行列の1-3成分の制限を省き、簡単なパラメータを例にあげ、数値計算による解を表す。7節では、クォークセクターの解を示し、8節でレプトンセクターとの比較を行う。

## 2. レプトン混合

素粒子の標準模型を構成するフェルミオンとして、クォーク、荷電レプトン、そしてニュートリノがある。クォークや荷電レプトンが荷電を持つのにに対し、ニュートリノは電氣的に中性で質量が極めて小さいため、その情報を得ることは非常に困難であった。しかし、現在では、太陽ニュートリノや大気ニュートリノ、原子炉反ニュートリノ等のさまざまな実験から豊富な情報が得られてきている [6]。

ニュートリノが質量を持つとき、フレーバー固有状態は質量固有状態の線型結合で

$$l_{\alpha}^L = \sum_{i=1}^3 V_{l\alpha i}^L l_i^L, \quad \nu_{\alpha}^L = \sum_{i=1}^3 V_{\nu\alpha i}^L \nu_i^L, \quad (\alpha = e, \mu, \tau) \quad (1)$$

の様に表現される。ここで  $V_l^L, V_{\nu}^L$  は  $3 \times 3$  のユニタリ行列である。この質量固有状態で、弱荷電カレントを表すとレプトン混合行列 [1]

$$V = V_l^{L\dagger} V_{\nu}^L \quad (2)$$

が現れる。ニュートリノ振動による観測は、この混合行列の各成分の大きさと各質量固有状態がもつ質量の2乗差に制限を与える。この混合行列のパラメータ化にはいくつかの種類が存在するが、通常 Particle Data Group により採用されている形 [7] で実験値が与えられる：

$$V = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\alpha_1}{2}} \\ e^{-i\frac{\alpha_2}{2}} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

ここで  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}, s_{ij} = \sin \theta_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) とし、 $\theta_{ij}$  は回転角、 $\delta$  は CP の破れの位相、そして  $\text{diag}(e^{-i\frac{\alpha_1}{2}}, e^{-i\frac{\alpha_2}{2}}, 1)$  はニュートリノがマヨラナタイプのときのみ考慮される位相である。このマヨラナ位相はニュートリノ振動による観測実験からはその情報が得られるものでないので、以

下ではこの項を無視して議論する [6]. この時, 混合行列を特徴づけるパラメータは  $\theta_{ij}$  と  $\delta$  の 4 つとなる .

太陽ニュートリノ観測は主に

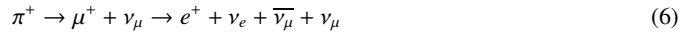


の過程の  $\nu_e$  を観測する . スーパーカミオカンデ [8] では巨大な水タンクの中で生じる反応



で, 太陽から飛来したニュートリノ  $\nu_e$  を観測する . このとき発生するチェレンコフ光が水タンクの回りに備え付けられた光電子増倍管で検出される . 太陽ニュートリノ観測とその他の  $\theta_{12}$  に関係している観測は, スーパーカミオカンデの他に, SNO [9] や KamLAND [10] 等の観測がある . KamLAND 観測は, 原子炉で生じる  $\bar{\nu}_e$  を利用して, KamLAND に設置された水タンク内の反応  $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$  を検出することによって  $\theta_{12}$  を観測する . 原子炉を利用した観測は, CHOOZ [11] や PALO VERDE 観測 [12] 等がある .

大気ニュートリノ観測は主に



の過程を観測する . この観測では太陽ニュートリノとは異なる振動パラメータ,  $\theta_{23}$ ,  $\Delta m_{23}^2$  が観測される . 現在行われている大気ニュートリノ, もしくは  $\theta_{23}$  を探す実験として, スーパーカミオカンデ [13], K2K [14], MINOS [15] 等がある . K2K や MINOS 等の実験は, 加速器を使って人工的に発生させた  $\nu_\mu$  を検出器で観測するものである .

さらに WMAP [16] のデータも考慮に入れ, 以上の様な観測実験を総合すると, 質量の 2 乗差と混合角に対する現在の制限は次のように与えられている [17]:

$$\begin{aligned} \Delta m_{21}^2 &= 7.92(1 \pm 0.09) \times 10^{-5} \text{eV}^2, \\ |\Delta m_{31}^2| &= 2.6(1_{-0.15}^{+0.14}) \times 10^{-3} \text{eV}^2, \\ \sin^2 \theta_{12} &= 0.314(1_{-0.15}^{+0.18}), \\ \sin^2 \theta_{23} &= 0.45(1_{-0.20}^{+0.35}), \\ \sin^2 \theta_{13} &= 0.008_{-0.008}^{+0.023}. \end{aligned} \quad (7)$$

ここで  $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$ ,  $\Delta m_{21}^2 \ll \Delta m_{31}^2$  とする .  $\theta_{13}$  が小さな値を持つか, あるいは厳密に 0 に等しいかの何れかは今後の検証を待たなければならない .

CPの破れの位相  $\delta$  に関するデータは、現段階ではまったく観測されていない。しかし、この位相  $\delta$  は  $\theta_{13}$  と結びついているため、今後の  $\theta_{13}$  の観測が進むことで、その情報も得られると期待されている [6].

### 3. 非半単純リー代数

3つの回転角と1つの位相により表された弱混合行列の多様性を制限する試みとして、混合行列にフレーバー対称性を課す1つの方法が、曾我見により提案された [5]. その理論では、非半単純リー代数  $\check{A}$  とそれに対応するリー群  $\check{G}$  の群パラメータが、混合行列を一意的に決定する。リー群を構成する非半単純リー代数は、4つのエルミート行列

$$D = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\check{\tau}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \check{\tau}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & -i & i \\ i & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \check{\tau}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

で構成される。ここで、行列  $\check{\tau}_a (a = 1, 2, 3)$  はパウリ型の積則

$$\check{\tau}_a \check{\tau}_b = \delta_{ab} (I - D) + i \sum_{c=1}^3 \epsilon_{abc} \check{\tau}_c \quad (9)$$

を満たし、等冪の性質 ( $D^2 = D$ ) を持つ  $D$  と

$$D \check{\tau}_a = \check{\tau}_a D = 0 \quad (10)$$

の様に直交する。その結果、リー代数  $\check{A}$  は非半単純リー代数となる。

これらのエルミート行列の線形結合を指数関数型の写像関数で写像したユニタリ行列

$$\exp \left( i \vartheta_0 D + i \sum_{a=1}^3 \vartheta_a \check{\tau}_a \right) = e^{i \vartheta_0} D + (I - D) c + j_0(\theta) \left( i \sum_{a=1}^3 \vartheta_a \check{\tau}_a \right) \quad (11)$$

はリー群を構成する。ここで、 $\vartheta_\mu (\mu = 0, 1, 2, 3)$  は実パラメータであり、 $j_0, c, \theta$  は

$$j_0(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}, \quad c = \cos \theta, \quad \theta = \sqrt{\sum_{a=1}^3 \vartheta_a^2} \quad (12)$$

である。式 (11) の元で構成される群は非半単純であり、 $SU(2) \times U(1)$  と同型である。

#### 4. 群パラメータの分類

前の節で作上げられたユニタリ行列 (11) をレプトン混合行列 (2) に適用する．つまり，混合行列を特徴づける 4 つのパラメータを  $\check{G}(\check{A})$  の連続パラメータ  $\vartheta_\mu$  とする．ここでは，3 つの仮定を置いて，観測実験により制限されている混合行列の大きさを示す群パラメータ  $\vartheta_\mu$  を解析的に求める．観測実験によるこれら 3 つの仮定に対する妥当性は次の節で考察する．

1 つ目の仮定として

$$V_{13} = 0 \quad (13)$$

とおく．これは 4 つのパラメータ間に，実部，虚部に対する 2 つの関係式を与える強い条件となる．その 2 つの関係式から

$$e^{i\vartheta_0} = c + \sqrt{3}j_0\vartheta_2 + ij_0(\sqrt{3}\vartheta_1 - \vartheta_3) \quad (14)$$

を得る．この式に，その複素共役量をかけ  $\vartheta_0$  を消去することで，関係式

$$j_0 = -\frac{\sqrt{3}\vartheta_2}{\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 - \sqrt{3}\vartheta_1\vartheta_3}c \quad (15)$$

が得られる．混合行列 (11) は  $\vartheta_0$  を消去することにより

$$V = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3c + j_0(2\sqrt{3}i\vartheta_1 + \sqrt{3}\vartheta_2) & j_0(\sqrt{3}i\vartheta_1 + 2\sqrt{3}\vartheta_2 - 3i\vartheta_3) & 0 \\ j_0(\sqrt{3}i\vartheta_1 - 3i\vartheta_3) & 3c + j_0(\sqrt{3}\vartheta_2) & j_0(2\sqrt{3}i\vartheta_1 + 2\sqrt{3}\vartheta_2) \\ 2\sqrt{3}j_0\vartheta_2 & 2\sqrt{3}ij_0\vartheta_1 & 3c + j_0(\sqrt{3}i\vartheta_1 + \sqrt{3}\vartheta_2 - 3i\vartheta_3) \end{pmatrix} \quad (16)$$

と簡単化される．この行列の成分  $V_{22}, V_{31}$  と  $V_{21}, V_{32}$  はそれぞれ実数と純虚数であり，実変数  $R_1, R_2, I_1, I_2$  を用いて

$$R_1 \equiv c + \frac{1}{\sqrt{3}}j_0\vartheta_2, \quad R_2 \equiv \frac{2}{\sqrt{3}}j_0\vartheta_2, \quad I_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{3}}j_0\vartheta_1 - j_0\vartheta_3, \quad I_2 \equiv \frac{2}{\sqrt{3}}j_0\vartheta_1 \quad (17)$$

と定義する．これらの変数を用いることで，ユニタリ行列 (16) は

$$V = \begin{pmatrix} R_1 + iI_2 & R_2 + iI_1 & 0 \\ iI_1 & R_1 & R_2 + iI_2 \\ R_2 & iI_2 & R_1 + iI_1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

と表され，関係式 (15) は

$$R_1R_2 + I_1I_2 = 0 \quad (19)$$

となり，ユニタリ条件は

$$R_1^2 + R_2^2 + I_1^2 + I_2^2 = 1 \quad (20)$$

となる．さらに

$$R_2^2 + I_1^2 = \frac{1}{3}j_0^2(\vartheta_1^2 + 4\vartheta_2^2 + 3\vartheta_3^2 - 2\sqrt{3}\vartheta_1\vartheta_3) \equiv \alpha, \quad R_1^2 + I_2^2 = \frac{4}{3}j_0^2(\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2) \equiv \beta \quad (21)$$

と置くことで，混合行列の各成分に対する大きさの 2 乗は

$$(|V_{ij}|^2) = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha & 0 \\ \alpha(1-\beta) & (1-\alpha)(1-\beta) & \beta \\ \alpha\beta & \beta(1-\alpha) & 1-\beta \end{pmatrix} \quad (22)$$

と表される．

ここで， $\vartheta_i$  の間の関係を調べるために， $(R_2/I_2)^2$  と  $(I_1/I_2)^2$  を計算すると，

$$\left(\frac{R_2}{I_2}\right)^2 = \left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\right)^2 = \frac{\alpha}{1-\alpha}, \quad \left(\frac{I_1}{I_2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 - \sqrt{3}\frac{\vartheta_3}{\vartheta_1}\right)^2 = \frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)} \quad (23)$$

となるので，これらを符号の違いに注意することで

$$\begin{aligned} \text{場合 1: } \vartheta_1 &= \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\vartheta_2, & \vartheta_2 &= \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{B_+}\vartheta_3, & \vartheta_3 &= \frac{B_+}{\sqrt{\beta(1-\alpha)}}\vartheta_1, \\ \text{場合 2: } \vartheta_1 &= -\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\vartheta_2, & \vartheta_2 &= -\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{B_+}\vartheta_3, & \vartheta_3 &= \frac{B_+}{\sqrt{\beta(1-\alpha)}}\vartheta_1, \\ \text{場合 3: } \vartheta_1 &= \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\vartheta_2, & \vartheta_2 &= \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{B_-}\vartheta_3, & \vartheta_3 &= \frac{B_-}{\sqrt{\beta(1-\alpha)}}\vartheta_1, \\ \text{場合 4: } \vartheta_1 &= -\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\vartheta_2, & \vartheta_2 &= -\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{B_-}\vartheta_3, & \vartheta_3 &= \frac{B_-}{\sqrt{\beta(1-\alpha)}}\vartheta_1 \end{aligned} \quad (24)$$

と分類できる．ここで

$$B_{\pm} \equiv \sqrt{\frac{\beta(1-\alpha)}{3}} \pm 2\sqrt{\frac{\alpha(1-\beta)}{3}} \quad (25)$$

とする．このそれぞれの場合（場合 1～場合 4）に対する  $\theta$  を 1 変数で表すと

$$\theta = C_{\pm} \sqrt{\frac{\vartheta_1^2}{\beta(1-\alpha)}} = C_{\pm} \sqrt{\frac{\vartheta_2^2}{\alpha\beta}} = C_{\pm} \sqrt{\frac{\vartheta_3^2}{B_{\pm}^2}} \quad (26)$$

となる．ここで

$$C_{\pm} \equiv \sqrt{\beta + (B_{\pm})^2} \quad (27)$$

とし， $C_{\pm}, B_{\pm}$  の + 符号は場合 1, 場合 2 に対応し，- 符号は場合 3, 場合 4 に対応する．

2つ目の仮定として,  $B_-$  は負の値をとるとして

$$2\sqrt{\alpha(1-\beta)} > \sqrt{\beta(1-\alpha)} \quad (28)$$

とする. この条件を課すことで, それぞれの場合に対する  $\tan \theta$  の値と  $\vartheta_i$  の範囲は

$$\begin{aligned} \text{場合 1: } & \tan \theta = A_{+(+)}, \quad \vartheta_1 > 0, \quad \vartheta_2 > 0, \quad \vartheta_3 > 0, \\ & \tan \theta = A_{+(-)}, \quad \vartheta_1 < 0, \quad \vartheta_2 < 0, \quad \vartheta_3 < 0, \\ \text{場合 2: } & \tan \theta = A_{+(+)}, \quad \vartheta_1 < 0, \quad \vartheta_2 > 0, \quad \vartheta_3 < 0, \\ & \tan \theta = A_{+(-)}, \quad \vartheta_1 > 0, \quad \vartheta_2 < 0, \quad \vartheta_3 > 0, \\ \text{場合 3: } & \tan \theta = A_{-(-)}, \quad \vartheta_1 > 0, \quad \vartheta_2 > 0, \quad \vartheta_3 < 0, \\ & \tan \theta = A_{- (+)}, \quad \vartheta_1 < 0, \quad \vartheta_2 < 0, \quad \vartheta_3 > 0, \\ \text{場合 4: } & \tan \theta = A_{-(-)}, \quad \vartheta_1 < 0, \quad \vartheta_2 > 0, \quad \vartheta_3 > 0, \\ & \tan \theta = A_{- (+)}, \quad \vartheta_1 > 0, \quad \vartheta_2 < 0, \quad \vartheta_3 < 0 \end{aligned} \quad (29)$$

と分類される. ここで

$$\begin{aligned} A_{+(+)} &\equiv \frac{\sqrt{3}C_+}{2\sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)} - \sqrt{\alpha\beta}}, & A_{+(-)} &\equiv \frac{-\sqrt{3}C_+}{2\sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)} - \sqrt{\alpha\beta}}, \\ A_{-(-)} &\equiv \frac{-\sqrt{3}C_-}{2\sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)} + \sqrt{\alpha\beta}}, & A_{- (+)} &\equiv \frac{\sqrt{3}C_-}{2\sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)} + \sqrt{\alpha\beta}} \end{aligned} \quad (30)$$

とする. この  $\tan \theta$  に式 (26) を入れることで  $\vartheta_i$  の値が求まる. これらの解は  $\theta$  に関して周期解となるため,  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$  の範囲で主値のみをとることにする.

3つ目の条件として

$$2\sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)} > \sqrt{\alpha\beta} \quad (31)$$

を仮定する. この時,  $\theta$  が正であるのに対して,  $A_{+(-)}, A_{-(-)}$  は負の値となるので, 主値の範囲内では解とはならず, 最終的に解の組は

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \pm \frac{\sqrt{\beta(1-\alpha)}}{C_+} \arctan A_{+(+)}, & \vartheta_2 &= \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{C_+} \arctan A_{+(+)}, & \vartheta_3 &= \pm \frac{\sqrt{B_+^2}}{C_+} \arctan A_{+(+)}, \\ & & & & & \text{(複号同順)} \\ \vartheta_1 &= \mp \frac{\sqrt{\beta(1-\alpha)}}{C_-} \arctan A_{- (+)}, & \vartheta_2 &= -\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{C_-} \arctan A_{- (+)}, & \vartheta_3 &= \pm \frac{\sqrt{B_-^2}}{C_-} \arctan A_{- (+)} \end{aligned} \quad (32)$$

と4組求まる.

## 5. 観測値と条件式の妥当性

上の4つの解(32)は3つの仮定(13), (28), (31)のもとに導かれた．ここではニュートリノ振動による実験値とこれらの仮定を対比し，その妥当性を検討する．そして，実際に混合行列の値を表す $\theta_\mu$ の値を示す．

まず，仮定(13)であるが，これはフレーバー混合行列が持つ4つの自由度を2つに減らす大変強い条件であった．観測値(7)ではベストフィット値として $\theta_{13}$ にわずかな値が与えられているが，まだ厳密に0である可能性を否定する段階にはない．

残った2つの自由度に対応する変数は $\alpha, \beta$ である．仮定(28), (31)の不等式はこの $\alpha, \beta$ に制限を与えるものであり，それぞれの不等式は

$$\beta < \frac{4}{3} \left( 1 - \frac{1}{1+3\alpha} \right), \quad (33)$$

$$\beta < \frac{4}{3} \left( 1 - \frac{1}{4-3\alpha} \right) \quad (34)$$

と変形できる．これまで $V_{13} = 0$ を仮定して，解析してきたので，これらの不等式と(7)の観測値を対比する際，観測値として(7)のベストフィット値からわずかにずれた値を考えなくてはならないであろう．しかし，そのずれは，誤差の範囲から考えても，ほとんど無視できると考えられる．したがって，この節では観測値として

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_{12} &= \alpha = 0.314(1_{-0.15}^{+0.18}), \\ \sin^2 \theta_{23} &= \beta = 0.45(1_{-0.20}^{+0.35}), \\ \sin^2 \theta_{13} &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

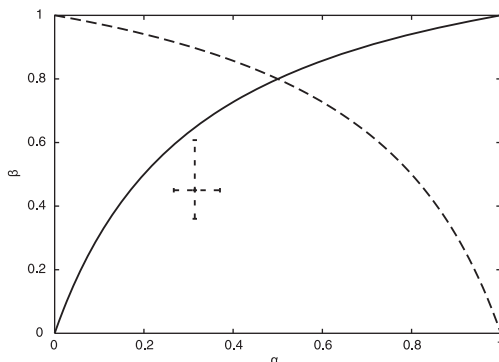


図1 実線以下の範囲が不等式(33)を表し，破線以下の範囲が不等式(34)を表す．クロスバーはニュートリノ振動で制限される $\alpha, \beta$ の範囲を示し，2つの条件がほぼ満たされることがわかる．



表1 レプトンセクターでの  $\vartheta_\mu$  の値

解	$\vartheta_0$	$\vartheta_1$	$\vartheta_2$	$\vartheta_3$
1	0.1405	0.6013	0.4068	0.8665
2	-0.1405	-0.6013	0.4068	-0.8665
3	1.3301	0.5156	-0.3489	-0.1476
4	-1.3301	-0.5156	-0.3489	0.1476

を採用する． $\alpha, \beta$  に対してこの観測値を用いたとき，これらの値は仮定した条件 (28), (31) を満たしていることが図 1 よりわかる．つまり，レプトンセクターの混合行列を表す  $\vartheta_\mu$  を求めるにあたって，仮定 (13), (28), (31) を課すことは現在の観測結果と矛盾するものではない．実際にこれらの観測値 (35) を採用し，4 つの解 (32) を評価した値を表 1 に示す．さらに，主値以外の解も考慮した解を図 2 で表す．

## 6. 単純な群パラメータを用いた例

観測量をよく表す近似としてトリバイマキシマル混合 [18] がある．式 (22) で  $\alpha = 1/3, \beta = 1/2$  とした時，混合行列の大きさの 2 乗は

$$(|V_{ij}|^2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (36)$$

となり，トリバイマキシマル混合と同じ値をとる．実験データを表す際に，通常使われている形 (3) では，この混合行列の値を再現する回転角の値は  $\theta_{13} = 0, \theta_{23} = \pi/4, \sin \theta_{12} = 1/\sqrt{3}$  となる．一方，非半単純リー代数に基づくフレーバー混合行列 (11) では， $V_{13} = 0$  とした観測量は解 1 から解 4 の値で再現される．前者とは異なり，これらの解はパラメータの 1 つを 0 とはせず，等しいオーダーのパラメータを 4 つとも用いていることがわかる（特に，解 1, 解 2 がそのような性質をよく表している）．フレーバー混合行列 (11) は 4 つの連続パラメータで特徴づけられており， $V_{13} \neq 0$  の混合行列もこの値に近いもので表せるだろう．例えば

$$\vartheta_0 = \frac{1}{5}, \quad \vartheta_1 = \frac{3}{5}, \quad \vartheta_2 = \frac{2}{5}, \quad \vartheta_3 = \frac{4}{5} \quad (37)$$

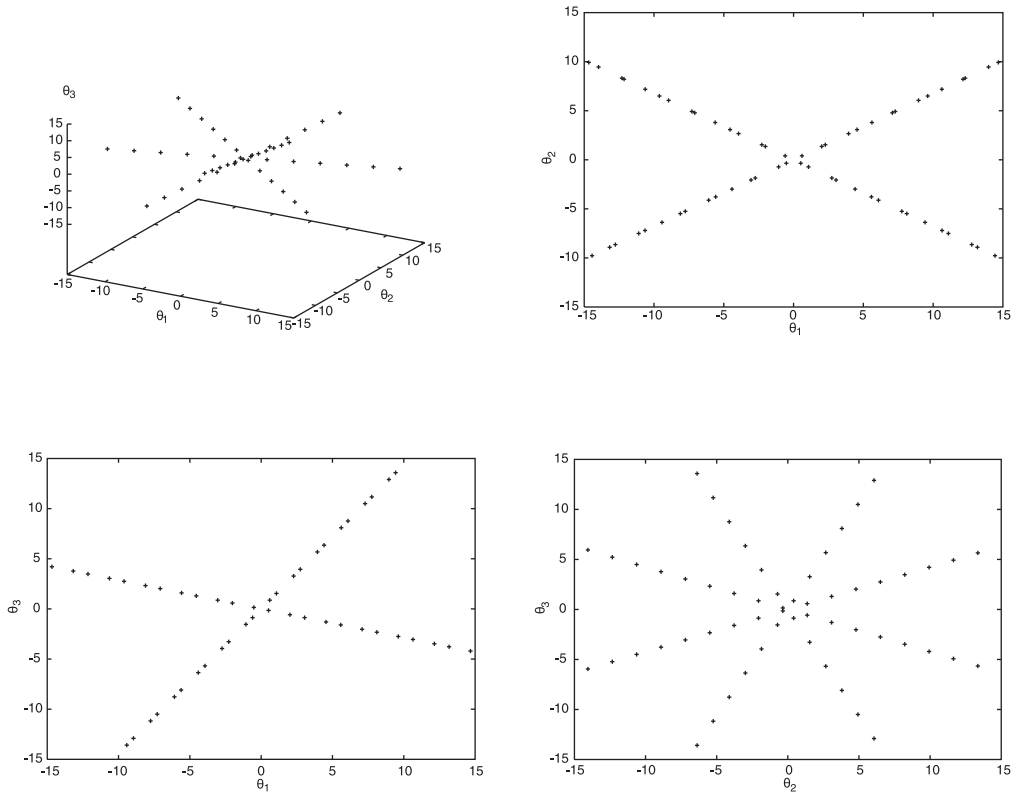


図2 左上の図では、それぞれの点が表1の解とその周期解を表している．他の図は  $\vartheta_i$  の中の2変数の間の関係を表しており、直線状に並んだ点の傾きは関係式(24)の係数にあたる．

とおくと、数値計算により

$$(|V_{ij}|^2) = \begin{pmatrix} 0.7350 & 0.2646 & 0.0004 \\ 0.1372 & 0.4130 & 0.4498 \\ 0.1278 & 0.3224 & 0.5498 \end{pmatrix} \quad (38)$$

となり、特に小さなパラメータを導入することなく、0に近い  $|V_{13}|$  を得ることができる．この値は現在の観測をほぼ再現する．さらには、

$$\vartheta_0 = \frac{\pi}{12}, \quad \vartheta_1 = \vartheta_2 = \frac{\pi}{6}, \quad \vartheta_3 = \frac{\pi}{4} \quad (39)$$

とおくと、混合行列の値は

$$(|V_{ij}|^2) = \begin{pmatrix} 0.7044 & 0.2860 & 0.0096 \\ 0.1233 & 0.4080 & 0.4687 \\ 0.1723 & 0.3060 & 0.5217 \end{pmatrix} \quad (40)$$

となり、現在のベストフィット値と極めて近くなる。

ここで用いた2つの例は、 $\vartheta_\mu$ の値を $\vartheta_0$ の整数倍に取ったものである。このような単純な値から現在のレプトンセクターの混合行列の値をある程度再現できたことは興味深い。特に後者の例では $15^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $45^\circ$ の3つの角でベストフィット値に近い値を表せた。

## 7. クォークセクター

ここまで、レプトンセクターの混合行列についてのみ調べてきたが、この節ではクォークセクターについての調査を簡単にまとめる。レプトンセクターと同様に、クォークセクターでも弱荷電カレントにフレーバー混合行列が現れ [2]、その行列をユニタリ行列 (11) と同定する。クォークセクターの混合行列は、レプトンセクターに比べはるかに精度良くその値が制限されており、混合行列  $|V|$  の大きさは

$$(|V_{ij}|) = \begin{pmatrix} 0.97383^{+0.00024}_{-0.00023} & 0.2272^{+0.0010}_{-0.0010} & 0.00396^{+0.00009}_{-0.00009} \\ 0.2271^{+0.0010}_{-0.0010} & 0.97296^{+0.00024}_{-0.00024} & 0.04221^{+0.00010}_{-0.00080} \\ 0.00814^{+0.00032}_{-0.00064} & 0.04161^{+0.00012}_{-0.00078} & 0.999100^{+0.000034}_{-0.000004} \end{pmatrix} \quad (41)$$

と制限されている [7]。全体として混合の度合は小さく、1-3成分は大変小さいが値を持つため、その成分を0と置くことは実験結果と矛盾することになる。そこで、4節の様な議論はせず、数値計算により上のベストフィット値を表す $\vartheta_\mu$ を調べる。その結果、レプトンセクターと同様に4つの組の解があり、その値を表2に示す。文献 [5] で、すでに1組の解が記述されており、表2では解cがその値に対応する。4つ共が階層的な値を取ることが特徴的である。またそれぞ

表2 クォークセクターでの $\vartheta_\mu$ の値

解	$\vartheta_0$	$\vartheta_1$	$\vartheta_2$	$\vartheta_3$
a	-0.190248	0.039513	0.004903	0.248724
b	0.183660	-0.033776	0.004319	-0.252033
c	0.274818	0.033798	-0.004203	-0.206454
d	-0.268207	-0.039501	-0.005064	0.209744

表 3 Jarlskog の不変量と  $V_{td}$  の実部と虚部

解	Re $V_{td}$	Im $V_{td}$	$\mathcal{J}$
a	0.007306	-0.003572	$3.08293 \times 10^{-5}$
b	0.007583	-0.002941	$3.08338 \times 10^{-5}$
c	-0.007647	0.002769	$3.08363 \times 10^{-5}$
d	-0.007251	0.003684	$3.08340 \times 10^{-5}$

れの解に対する  $V_{td}$  の実部, 虚部そして Jarlskog の不変量 [19]  $\mathcal{J} = \text{Im}(V_{us}V_{cb}V_{ub}^*V_{cs}^*)$  の値を表 3 に示す.

## 8. 議論

4 節で行った解の分類は  $\theta_i$  に対する変数変換

$$\begin{aligned}\vartheta_1 &= \Theta(\omega, \phi) \sin \omega \cos \phi, \\ \vartheta_2 &= \Theta(\omega, \phi) \sin \omega \sin \phi, \\ \vartheta_3 &= \Theta(\omega, \phi) \cos \omega,\end{aligned}\tag{42}$$

を用いても行うことができる. この変換は  $\theta$  を動径方向とする極座標的なものである. この時, 式 (15), (23) は

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{\sqrt{3} \sin \phi}{\sqrt{3} \cos \omega \cos \phi - \sin \omega}, \\ \alpha &= \sin^2 \phi, \\ \beta &= \frac{4}{3} \sin^2 \Theta \sin^2 \omega,\end{aligned}\tag{43}$$

$$\tag{44}$$

となる.  $\alpha, \beta$  の値を入れることにより  $\omega, \phi$  の値が求まるので, 式 (42) からそれらに対応する  $\theta_i$  が求まり, 式 (32) と同じ値となる [20].

この時も前と同様に混合行列の 1-3 成分を 0 と仮定した. この仮定が正しいなら, ニュートリノ振動から制限された混合行列の大きさを表す 4 つのパラメータは近似的に同じオーダーの値を持ち, 例え 0 でなくともその値が小さければ, それと同じ特徴をもつ. 一方, 実験により混合行列にかなりの制限がなされているクォークセクターに適用したとき, 群パラメータ  $\vartheta_\mu$  は階層構造をもつことが表 2 よりわかる. つまり, それぞれのセクターに対する群パラメータは特徴的な異なる性質を持つことがわかった.

Jarlskog の不変量に関しては，レプトンセクターではまだ観測されるレベルにはない． $V_{13}$  が 0 であればこの不変量も 0 となるが， $V_{13} \neq 0$  であるなら不変量も 0 でない値を持つはずである．そこで，6 節で用いた 2 つの例でこの値を示す． $\vartheta_0 = 1/5$  とした前者の例では，混合行列そのものの値は

$$V = \begin{pmatrix} 0.642651 + 0.567460i & 0.357519 - 0.369817i & -0.020103 + 0.001027i \\ -0.020103 - 0.369817i & 0.642651 + 0.001027i & 0.357519 + 0.567460i \\ 0.357519 + 0.001027i & -0.020103 + 0.567460i & 0.642651 - 0.369817i \end{pmatrix} \quad (45)$$

となり，Jarlskog の不変量は  $\mathcal{J} = -0.0011288155$  となる． $\vartheta_0 = \pi/12$  とした後者の例では，

$$V = \begin{pmatrix} 0.636531 + 0.547035i & 0.411619 - 0.341408i & -0.082225 + 0.053191i \\ -0.082225 - 0.341408i & 0.636531 + 0.053191i & 0.411619 + 0.547035i \\ 0.411619 + 0.053191i & -0.082225 + 0.547035i & 0.636531 - 0.341408i \end{pmatrix}, \quad (46)$$

$\mathcal{J} = -0.0151715978$  となる．これら不変量の値はクォークセクターのものに比べ数オーダー大きい．これらの値も含め，今後レプトンセクターにさらなる制限が付くことを期待する．

## 謝 辞

この論文を書くにあたり，基礎となる考えや多くの指摘をいただいた曾我見郁夫教授に感謝いたします．また，小泉耕蔵講師には幾度と議論していただいたことに感謝いたします．

## 参 考 文 献

- [1] Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, Prog. Theor. Phys. 28 (1962), p. 870.
- [2] M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. 49 (1973), p. 652.
- [3] L. -L. Chau and W. -Y. Keung, Phys. Rev. Lett. 53 (1984), p. 1802.  
F. J. Botella and L. -L. Chau, Phys. Lett. B 163 (1986), p. 97.  
H. Harari and M. Leurer, Phys. Lett. B 181 (1986), p. 123.  
H. Fritzsch and J. Plankl, Phys. Rev. D 35 (1987), p. 1732.  
F. J. Botella and L. -L. Chau, Phys. Lett. B 168 (1986), p. 97.  
C. D. Froggatt and H. B. Nielsen, Nucl. Phys. B 147 (1979), p. 277.  
H. Fritzsch, Nucl. Phys. B 155 (1979), p. 189.  
S. Dimopoulos, L. J. Hall and S. Raby, Phys. Rev. Lett. 68 (1992), p. 1984.
- [4] H. Fritzsch and Z. -Z. Xing, Phys. Rev. D 57 (1998), p. 594.
- [5] I. S. Sogami, Prog. Theor. Phys. 114 (2005), p. 873.  
I. S. Sogami, Prog. Theor. Phys. 115 (2006), p. 461.

- [6] M. C. Gonzalez-Garcia and M. Maltoni, arXiv : hep-ph/0704.1800.  
V. Barger, D. Marfatia and K. Whisnant, arXiv : hep-ph/0308123.  
S. M. Bilenky, C. Giunti and W. Grimus, arXiv : hep-ph/9812360.
- [7] W. M. Yao *et al.* (Particle Data Group), J. Phys. G 33 (2006), p. 1.
- [8] M. B. Smy *et al.* ( Super-kamiokande I Collaboration), Phys. Rev. D 69 (2004), p. 011104.
- [9] S. N. Ahmad *et al.* (SNO Collaboration), Phys. Rev. Lett. 92 (2004), p. 181301.  
B. Aharmim *et al.* (SNO Collaboration), Phys. Rev. C 72 (2005), p. 055502.
- [10] T. Araki *et al.* (KamLAND Collaboration), Phys. Rev. Lett. 94 (2005), p. 081801.
- [11] M. Apollonio *et al.* (CHOOZ Collaboration), Eur. Phys. J. C 27 (2003), p. 331.
- [12] F. Boehm *et al.* (Palo Verde Collaboration), Phys. Rev. D 64 (2001), p. 112001.
- [13] J. Hosaka *et al.* ( Super-kamiokande I Collaboration), Phys. Rev. D 74 (2006), p. 032002.
- [14] E. Ahn *et al.* (K2K Collaboration), Phys. Rev. Lett. 94 (2005), p. 081802.
- [15] D. G. Michael *et al.* (MINOS Collaboration), Phys. Rev. Lett. 97 (2006), p. 191801.
- [16] D. N. Spergel *et al.* (WMAP Collaboration), Astrophys. J. Suppl. Ser. 170 (2007), p. 377.
- [17] G. L. Fogli *et al.*, Phys. Rev. D 75 (2007), p. 053001.
- [18] H. Fritzsch and Z. -Z. Xing, Phys. Lett. B 372 (1996), p. 265.  
P. F. Harrison, D. H. Perkins and W. G. Scott, Phys. Lett. B 530 (2002), p. 167.  
L. Wolfenstein, Phys. Rev. D 18 (1978), p. 958.
- [19] C. Jarlskog, Phys. Rev. Lett. 55 (1985), p. 1039.
- [20] I. S. Sogami and Y. Konishi, Prog. Theor. Phys. 119 (2008), p. 339.

# Studies of Weak Mixing Matrices Based on Non-Semisimple Lie Algebra

Yasufumi KONISHI

Takashi YASAKI

## Abstract

Using flavor mixing matrix characterized by four group parameters of a non-semisimple Lie algebra being isomorphic to  $SU(2) \times U(1)$  symmetry, numerical analyses are made on experimental results of the lepton and quark sectors. To investigate the data of neutrino oscillations, the 1-3 element of the mixing matrix whose absolute value is observed to be very small is naturally assumed to vanish exactly, i.e.,  $V_{13} = 0$ . This assumption enables us to express the lepton flavor matrix in terms of analytical functions depending essentially on two of the four group parameters. It is found that, while all group parameters of the lepton mixing matrix have values of approximately same order of magnitude, those of the quark mixing matrix have extremely different values with hierarchical structures.

**Keywords:** Flavor mixing matrix, Neutrino oscillations, Non-Semisimple Lie algebra, Group parameters, Numerical analyses