Gupta-Bleuler 形式による第二類拘束系の量子化法

小　泉　耕　蔵
小　西　康　文
寺　倉　徹　也
曽 我 見　郁　夫

(平成 20 年 9 月 24 日提出
平成 20 年 12 月 16 日修正)

要　旨

第二類拘束条件を有する非相対論的粒子系が，量子電気力学に対する共変量子化の際に用いられたGupta-Bleuler形式と類似の手法により，適切な補助条件の下で量子化される．この新しい相空間を次元簡約化しない構成法は，系の力学変数と対称性の物理的意味を保持する．配位空間上の波動関数が複素エルミート多項式を使って明確に構成され，物理状態に対応する波動関数を確率振幅として解釈することが可能となる．

キーワード： 一般正準理論，Gupta-Bleuler 形式，複素エルミート多項式，確率振幅，対称性と生成子

1.　序　論

拘束条件を内包する力学系は，ローレンツ不変性やゲージ不変性などで代表される高い対称性を示す系の中でしばしば見出される．ディラックは，これらの系を系統的に扱うために一般正準理論を提唱した [1, 2]．拘束条件の重要な分類として，第一類拘束条件と第二類拘束条件が挙げられる．前者は系のゲージ対称性と関係しており，後者は系の力学的自由度を縮減する役割を果たす．ディラックの理論では，第一類拘束条件を有する系の量子化は，量子状態ベクトル空間上に補助条件を課すことにより適切に行われる．また，第二類拘束条件を有する系では，縮減された系の独立変数のみを使って正準量子化される．

しかし，第二類拘束条件による相空間の次元簡約化の立場では，もともと系が持つ力学的対称性が明白でなくなるという欠点がある．この欠点は，相対論的量子場の理論において摂動理論と関係して顕著になる．拘束条件を有する力学系の対称性を明白な形に保ったまま量子化を行う例として，Gupta-Bleuler 形式による電磁場の量子化がよく知られている．この形式は，ローレンツゲージを拘束条件として課すことにより，明白にローレンツ共変な電磁場の量子化を導く．

本論文では，第二類拘束条件のみを有する SO(2) 対称性を示す非相対論的粒子系のある力学

模型について考察する．この系の力学変数と対称性を保ったまま量子化するために，量子電気力学で発展させられたGupta-Bleuler形式と同様な構成法を用いる．

本論文は，以下のように構成される．第2節では，拘束系を有する力学系に対して，ディラックらによって提唱された一般正準形式の古典的手法について概略する．第3節では，二次元平面内を運動するSO(2)対称性を示すある力学模型を古典論の範囲で考察する．この力学模型は，第二類拘束条件のみを有する．系の時間発展を司る全ハミルトニアンは整合性の条件から決定され，粒子の時間発展がラグランジュ形式とハミルトン形式で差異がないことが確かめられる．第4節では，ディラックの次元簡約化による一般正準形式を用いて，第3節で導入された力学模型の古典論およびその量子化について調べる．この手法で得られた有効ハミルトン関数は，通常の調和振動子のものと一致する．力学変数の時間発展は，ラグランジュ方程式の時間発展と同じことが示される．この一般正準形式の観点から，系の正準量子化が行われる．量子力学系のハミルトニアンは，古典論と同様に調和振動子のハミルトニアンと同じことが示される．その結果，系のエネルギースペクトルが明確に導出される．しかしながら，次元簡約化による代償として，力学変数の物理的意味や系の対称性といった多くの情報が失われる．特に，波動関数を確率振幅として解釈できないことが示される．この問題を克服するために第5節では，力学的自由度を縮減しないGupta-Bleuler形式による量子化を行う．適切な補助条件の下で物理的状態および非物理状態に対する状態ベクトルが明確に構成される．状態ベクトルに対応する配位空間上の固有関数は，複素エルミート多項式を用いて求められる．その結果として，物理状態に対する波動関数が得られ，その確率解釈が可能となる．確率振幅の時間発展は，角運動量ωで反時計周りに回転する古典的運動に対応することが明示される．第6節では，この力学模型の対称性および保存量について古典論および量子論で調べられる．ラグランジュ関数がSO(2)対称性を示すのに対して，ハミルトン関数およびハミルトニアンはSO(2,2)の大域的対称性を持つことが示される．この対称性の生成子が，系の保存量であることが確かめられる．特に，拘束面を拘束面に写像する変換がSO(2,2)の部分代数によって生成されることが示される．

2.　ディラックの一般正準形式

この節では，ディラックらによって発展させられた拘束系を有する力学的模型の一般論について概略する[1, 2, 3, 4, 5]．N次元空間内の保存力による力学系の状態を記述するラグランジュ形式は，配位空間とその接空間からなる一般化座標$q^i (i = 1, \cdots, N)$と一般化速度$\dot{q}^i (i = 1, \cdots, N)$によって張られる$2N$次元の速度相空間上で定式化される．すなわち，ラグランジュ関数は，$L(q^i, \dot{q}^i)$の形によって記述される．

拘束系の問題は，ラグランジュ関数$L(q^i, \dot{q}^i)$が特異である場合に生じる．ここで，ラグラン

ジュ関数が特異であるとは，一般化座標 q^i と一般化運動量 $p_i \equiv \frac{\partial L(q^i,\dot{q}^i)}{\partial \dot{q}^i}$ を使って $\dot{q}^i$ が一意的に表現できないことを言う．数学的には特異であるための必要十分条件は，ヘッシアン行列

$$A_{ij} \equiv \frac{\partial^2 L(q^i,\dot{q}^i)}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \tag{1}$$

が非正則であることと同値である．これは，一般化座標と運動量の間にある関係式が存在する証である．特に，ヘッシアン行列 A の階数が $N-R$ である場合，一般化座標と運動量の間に R 個の関係式

$$\Phi_\alpha(q^i,p_i) \approx 0 \qquad (\alpha = 1,\cdots,R) \tag{2}$$

が存在することになる．ここで，$\approx$ は，弱等式と呼ばれるものである．その意味は，拘束条件 $\Phi_\alpha(q,p)$ と正準変数に対するポアソン括弧が零にならないことがあり，$\Phi_\alpha(q,p)=0$ と強い等式にはできないことに拠る．関係式 (2) は，ラグランジュ関数の特異性のみに依存する．この関係式を一次拘束条件と呼ぶ．

拘束条件を有する力学系では，系の時間発展を司るハミルトン関数の形は，一意的でなく全ハミルトン関数

$$H_{\mathrm{T}} = H + \upsilon^\alpha \Phi_\alpha \tag{3}$$

によって，より一般的に置き換えられる．ここで，H は正準ハミルトン関数

$$H(q^i,p_i) = p_i\dot{q}^i - L(q^i,\dot{q}^i)\Big|_{(q^i,\dot{q}^i)\to(q^i,p_i)} \qquad (\mathrm{mod}\ \Phi_\alpha) \tag{4}$$

であり，υ^α はラグランジュの未定係数である．

粒子の運動が拘束条件 $\Phi_\alpha(q^i,p_i)$ によって規定される拘束面に停留するためには，その時間発展

$$\dot{\Phi}_\alpha = \{\Phi_\alpha, H_{\mathrm{T}}\} \approx 0 \tag{5}$$

が弱等式の意味で零であることが要請される．この要請は，整合性の条件と呼ばれる．整合性の条件から，新しい拘束条件が見出される可能性がある．この条件から見出される新しい拘束は，二次拘束条件と呼ばれる．以下では，一次拘束条件と二次拘束条件を併せて $\varphi_a(a=1,\cdots,R+T)$ と記す．ここで，T は，独立な二次拘束条件の総数を表わす．

ディラックに倣い，すべての拘束条件 φ_a に対して

$$\{f(q^i,p_i),\varphi_a\} \approx 0 \tag{6}$$

を満たす相空間上のある関数 $f(q^i,p_i)$ は，第一類の量と呼ばれる．それ以外の量を第二類の量と呼ぶ．第一類の量を使って表わされる拘束条件を第一類拘束条件と呼び，第二類の量によっ

て与えられる拘束条件を第二類拘束条件と呼ぶ[†1]．全ての拘束条件 $\varphi_a (a = 1, \cdots R + T)$ は，第一類拘束条件 $\psi_i (i = 1, \cdots I)$ および第二類拘束条件 $\phi_i (i = 1, \cdots, M)$ に分類される．

第二類拘束条件 $\phi_i (i = 1, \cdots, M)$ に対して，$M \times M$ の正則行列

$$C_{ij} = \{\phi_i, \phi_j\} \tag{7}$$

が定義できる．行列 C が正則であるため

$$C_{ij} C^{-1}_{jk} = \delta_{ik} \tag{8}$$

となる逆行列 C^{-1} が存在する．ディラックの一般正準理論では，任意の力学変数 A, B に対するポアソン括弧の役割が

$$\{A, B\}^* = \{A, B\} - \{A, \phi_i\} C^{-1}_{ij} \{\phi_j, B\} \tag{9}$$

によって定義されるディラック括弧に置き換えられる．ディラック括弧が有する特性から，全ての第二類拘束を強く零であると要請することができる．また，拘束条件が全て第二類拘束条件のとき，全ハミルトン関数 (3) に現れる係数 υ^m は，整合性の条件 (5) から

$$\upsilon^m = -\{H_T, \phi_i\} C^{-1}_{im} \tag{10}$$

と選ぶことができる[†2]．

3.　第二類拘束条件のみを有する非相対論的粒子

本論文では，ラグランジュ関数

$$L = \omega(q^1 \dot{q}^2 - q^2 \dot{q}^1) - \omega^2[(q^1)^2 + (q^2)^2] \tag{11}$$

によって記述される二次元平面内を運動する非相対論的粒子について考察する．ここで，(q^1, q^2) は粒子の座標であり，ω は角速度である．この系のラグランジュ関数は，明らかに SO(2) 回転対称性を示す(第 6 節を参照のこと)．オイラー・ラグランジュ方程式から，運動方程式は

$$\dot{q}^1 = -\omega q^2, \qquad \dot{q}^2 = \omega q^1 \tag{12}$$

[†1]　第二類拘束条件は第一類拘束条件の線形結合だけの不定性がある．さらに，例えば第二類拘束条件の二乗は，第一類拘束条件である．

[†2]　係数 υ^m の選択の仕方には，拘束条件の任意の線形結合 $\alpha^{(m)}_i \varphi_i$ だけの不定性が存在することに注意せよ．ここで，$\alpha^{(m)}_i$ は，相空間上の任意の関数である．さらに，第一類拘束条件が存在する場合は，それに対応する係数 υ^m は決定されない．第一類拘束条件の場合に対する未定係数は，系のゲージ自由度と関係している．

と導かれる．この方程式の解は，

$$q^1 = A\cos(\omega t + \delta), \quad q^2 = A\sin(\omega t + \delta) \tag{13}$$

と求められる．ここで，A および δ は，初期条件によって決定される定数である．よって，この力学系は，半径 A の円を角速度 ω で反時計周りに回転運動する粒子系を記述する．

ラグランジュ関数 (11) からヘッシアン行列 (1) を求めると，明らかに零行列である．したがって，この行列の階数が零であるため，二つの一次拘束条件が存在する．実際，正準運動量は

$$p_1 = -\omega q^2, \quad p_2 = \omega q^1 \tag{14}$$

と得られ，座標と運動量の間に一次拘束条件

$$\Phi_1 = p_1 + \omega q^2 \approx 0, \qquad \Phi_2 = p_2 - \omega q^1 \approx 0 \tag{15}$$

が見出される．ここで，これらの拘束条件 Φ_1 と Φ_2 は，関係

$$\{\Phi_1, \Phi_2\} = \{p_1 + \omega q^2,\ p_2 - \omega q^1\} = 2\omega \tag{16}$$

を満たすため，第二類拘束条件に分類される．

正準ハミルトン関数は，式 (4) により

$$H = \omega^2[(q^1)^2 + (q^2)^2] \tag{17}$$

となる．拘束条件を有する系の時間発展は，全ハミルトニアン

$$H_{\mathrm{T}} = H + \upsilon^1(q^i, p_i)\Phi_1 + \upsilon^2(q^i, p_i)\Phi_2 \tag{18}$$

によって生成される．拘束条件 Φ_i が第二類拘束であるため，整合性の条件

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_1 &= \{\Phi_1, H_{\mathrm{T}}\} \approx 2\omega(\upsilon^2 - \omega q^1) \approx 0 \\ \dot{\Phi}_2 &= \{\Phi_2, H_{\mathrm{T}}\} \approx -2\omega(\upsilon^1 + \omega q^2) \approx 0\end{aligned} \tag{19}$$

により，未定係数 υ^1 および υ^2 は，それぞれ

$$\upsilon^1 = -\omega q^2, \quad \upsilon^2 = \omega q^1 \tag{20}$$

と選ばれる．よって，系の時間発展を支配する全ハミルトン関数は

$$H_{\mathrm{T}} = -\omega(q^2 p_1 - q^1 p_2) \tag{21}$$

と決定される．実際，力学変数 q^i, p_i に対する時間発展は

$$\dot{q}^1 = \{q^1, H_T\} = -\omega q^2, \qquad \dot{q}^2 = \{q^2, H_T\} = \omega q^1,$$
$$\dot{p}_1 = \{p_1, H_T\} = -\omega p_2, \qquad \dot{p}_2 = \{p_2, H_T\} = \omega p_1 \tag{22}$$

となる．上式は，拘束面上 $\Phi_i = 0$ において，ラグランジュ形式で導出された運動方程式 (12) と等しい．

4.　ディラックの次元簡約化法とその量子化

第二類拘束を有する力学系に対するディラックの処方箋は，ポアソン括弧をディラック括弧に置き換えることで全ての第二類拘束条件を理論形式から除去できるようにするものである．第二類拘束条件を強く零と要請できるこの方法は，相空間の次元を縮減できることを意味する．Gupta-Bleuler 形式による量子化を行う前に，本節ではディラックによって提案された次元簡約化による古典論とその量子化について考察する．

拘束条件としては第二類拘束条件 Φ_1, Φ_2 のみが存在しているため，式 (7) で定義された行列 C とその逆行列 C^{-1} は，それぞれ

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2\omega \\ -2\omega & 0 \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2\omega} \\ \frac{1}{2\omega} & 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

と求まる．これにより，ディラック括弧 (9) は

$$\{A,\, B\}^* = \frac{1}{2}\left(\{A, B\} - \frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial A}{\partial q^1}\frac{\partial B}{\partial q^2} - \frac{\partial A}{\partial q^2}\frac{\partial B}{\partial q^1}\right) - \omega\left(\frac{\partial A}{\partial p_1}\frac{\partial B}{\partial p_2} - \frac{\partial A}{\partial p_2}\frac{\partial B}{\partial p_1}\right)\right) \tag{24}$$

と定まる．よって，正準変数に対する基本ディラック括弧は

$$\{q^1,\, q^2\}^* = -\frac{1}{2\omega}, \quad \{p_1,\, p_2\}^* = -\frac{1}{2}\omega, \quad \{q^j,\, p_k\}^* = \frac{1}{2}\delta^j{}_k \tag{25}$$

となる．

以下では簡単化のために，相空間内の線形な正準変換によって得られる正準座標

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q^1 + \frac{1}{\omega}p_2\right), \qquad p = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(p_1 - \omega q^2\right),$$
$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}\omega}\Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q^2 + \frac{1}{\omega}p_1\right), \qquad P = \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(p_2 - \omega q^1\right) \tag{26}$$

を用いる．ここで，変数 Q および P は，それぞれ拘束条件 Φ_1 および Φ_2 と等価な変数である．全ハミルトン関数 (21) は，この新しい正準変数 (26) を使って

$$H_{\mathrm{T}} = \left(\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2\right) - \left(\frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}\omega^2 Q^2\right) \tag{27}$$

と書き表わされる．

正準変数 (26) に対するディラック括弧は，

$$\{q,\, p\}^* = 1, \quad \{Q,\, P\}^* = 0, \quad \{q,\, P\}^* = 0, \quad \{Q,\, p\}^* = 0 \tag{28}$$

となることが示される．特に，座標 Q, P と相空間上の任意の関数 f のディラック括弧は，

$$\{Q, f\}^* = 0, \qquad \{P, f\}^* = 0 \tag{29}$$

となる．ハミルトン形式を支配するポアソン括弧をディラック括弧に置き換えるディラックのアルゴリズムにより，正準座標 Q, P は強い等式で零であると見做される．よって，相空間として変数 q, p のみによって張られる二次元平面に縮減される．この縮減の下，全ハミルトン関数 (27) は，

$$H_{\mathrm{T}}^* = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2 \tag{30}$$

の形に置き換えられる．ここで H_{T}^* は簡約された空間上での有効ハミルトン関数を表わす．このハミルトン関数は，一次元調和振動子系と同じ形である．粒子の位置座標の時間発展を記述する運動方程式は，式 (12) と一致することが示される．

ディラックの量子化は，ディラック括弧を交換関係に置き換えにより成し遂げられる．この下で，正準変数 q, p は，交換関係

$$[\hat{q},\, \hat{p}] = i\hbar \tag{31}$$

を満たす演算子 $\hat{q}, \hat{p}$ に置き換えられる．このとき，ハミルトン関数 (30) に対応する量子力学系のハミルトニアンは

$$\hat{H}_{\mathrm{T}}^* = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 \hat{q}^2 \tag{32}$$

となる．このハミルトニアンは，通常の一次元量子調和振動子のものと同じである．したがって，系のエネルギースペクトルは，

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{33}$$

と導かれ，零点エネルギーを持つことが示される．

ディラックアルゴリズムによる量子化は，ディラック括弧の代数的特性を利用して行われた．第二類拘束条件を恒等的に零と要請するこの方法は，簡約空間上での量子化を代数レベルで成し遂げている．拘束条件を強く零と置いた結果，位置演算子と運動量演算子の線形結合からなる非自明な演算子 $\hat{q}, \hat{p}$ が系の状態ベクトルを指定するのに重要な役割を果たす．しかし，系の力学変数を縮減するこの方法は，力学変数間の不確定性関係を破り，粒子の配位空間を指定す

る q^1 と q^2 が同時対角化できない事態を引き起こす．よって，波動関数が配位空間上で明確には構成されず，通常の量子力学の確率解釈は捨てざるを得ないこととなる．さらに，元来ラグランジュ関数が有する SO(2) 対称性は，明白でなくなる．

5.　Gupta-Bleuler形式による量子化

前節で議論したように，ディラックの次元縮減による方法は，第二類拘束条件を有する古典力学系を解析するのに系統的方法を与える．しかしながら，量子化に際して次元簡約化のため系から多くの物理的情報が失われることとなった．この問題を避けるには，系の次元簡約化を行うことなしに量子化する形式が必要となる．本節では，量子電気力学で発展させられた Gupta-Bleuler 形式を用いて，第 3 節から議論してきた第二類拘束条件を有する力学模型の量子化を試みる．

5.1　Gupta の補助条件と状態ベクトル

通常の正準量子化の手続きに倣い，正準変数 (q^j, p_k) を演算子

$$q^j \to \hat{q}^j, \quad p_j \to \hat{p}_j \tag{34}$$

に置き換える．ここで，演算子 $(\hat{q}^j, \hat{p}_k)$ は，交換関係

$$[\hat{q}^j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta^j_k \tag{35}$$

に従う．この置き換えにより，系のハミルトン関数および第二類拘束条件は，それぞれ，ハミルトニアン

$$\hat{H}_{\mathrm{T}} = -\omega(\hat{q}^2\hat{p}_1 - \hat{q}^1\hat{p}_2) \tag{36}$$

および量子拘束条件

$$\hat{\Phi}_1 = \hat{p}_1 + \omega\hat{q}_2, \qquad \hat{\Phi}_2 = \hat{p}_2 - \omega\hat{q}^1 \tag{37}$$

へと演算子化される．ここで，量子拘束条件 $\hat{\Phi}_1$ と $\hat{\Phi}_2$ の交換関係は

$$[\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2] = 2i\hbar\omega \tag{38}$$

となる．この交換関係により量子拘束条件 $\hat{\Phi}_i$ を強く零と要請することは出来ない．その代わりに，拘束条件を演算子として零と考えるのではなく，量子拘束条件を状態ベクトル空間への制限条件であると見做す必要がある．例えば，補助条件 $\hat{\Phi}_i|\mathrm{Phys}\rangle = 0$ を満たすような状態 $|\mathrm{Phys}\rangle$ が物理的に意味があると解釈してみる．この制限条件はフェルミの補助条件と呼ばれている．し

かし，このフェルミの補助条件では，まだ上式の交換関係と整合的でないことが示される．したがって，さらに弱い制限条件が必要となる．

適切な補助条件を見出すために，代数関係

$$[a_j, a_k^\dagger] = \delta_{jk} \tag{39}$$

を満たすディラックの消滅・生成演算子 $a_j, a_j^\dagger$ を導入する．位置演算子および運動量演算子は，これらの生成・消滅演算子を使って

$$\hat{q}^j = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(a_j^\dagger + a_j), \quad \hat{p}_j = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(a_j^\dagger - a_j) \tag{40}$$

と表わされる．同様に，量子拘束条件 $\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2$ は，それぞれ

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_1 &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}[(a_1^\dagger - ia_2^\dagger) - (a_1 + ia_2)],\\ \hat{\Phi}_2 &= -\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}[(a_1^\dagger - ia_2^\dagger) + (a_1 + ia_2)]\end{aligned} \tag{41}$$

となる．式 (26) で導入した正準変数に対応する演算子は，q_j, p_j の演算子化の下で

$$\begin{aligned}\hat{q} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(A^\dagger + A), &\quad \hat{p} &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(A^\dagger - A),\\ \hat{Q} &= i\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(B^\dagger - B), &\quad \hat{P} &= -\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(B^\dagger + B)\end{aligned} \tag{42}$$

と書き表される．ここで，

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 - ia_2), \quad & A^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^\dagger + ia_2^\dagger),\\ B &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + ia_2), \quad & B^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^\dagger - ia_2^\dagger)\end{aligned} \tag{43}$$

である．これらの演算子が満たす代数関係は，式 (39) から

$$[A, A^\dagger] = [B, B^\dagger] = 1, \quad [A, B] = [A^\dagger, B^\dagger] = [A, B^\dagger] = [A^\dagger, B] = 0 \tag{44}$$

であることが示される．ここで新しく導入された演算子 $A, A^\dagger$ は正準変数 $\hat{q}, \hat{p}$ に対するモードの消滅・生成演算子であり，演算子 $B, B^\dagger$ は正準変数 $\hat{Q}, \hat{P}$ に対するモードの消滅・生成演算子として解釈できる．この演算子表記で，ハミルトニアンは

$$\hat{H}_{\mathrm{T}} = \hbar\omega(N_A - N_B) \tag{45}$$

と表現される．ここで，演算子 N_A および N_B は，それぞれ $N_A = A^\dagger A$ および $N_B = B^\dagger B$ によって定義される数演算子である．数演算子と $A, A^\dagger$ および $B, B^\dagger$ の代数関係は

$$[N_A, A] = -A, \quad [N_A, A^\dagger] = A^\dagger, \quad [N_B, B] = -B, \quad [N_B, B^\dagger] = B^\dagger \tag{46}$$

である．ただし，上記以外の交換関係は零である．

第二類拘束条件を有する系を量子化するために，物理的状態ベクトルが補助条件

$$B|\mathrm{phys}\rangle = 0 \tag{47}$$

を満たすことを要請する．この補助条件は，Gupta の補助条件として知られている．また，この条件を満たす任意の物理的状態ベクトル間に対する量子拘束条件 $\hat{\Phi}_i$ による遷移振幅は

$$\langle \mathrm{phys}'|\hat{\Phi}_i|\mathrm{phys}\rangle = 0 \tag{48}$$

となる．このことは，量子拘束条件 $\hat{\Phi}_i$ が物理的過程の下で系の散乱行列に直接寄与しないことを保証する．

任意の物理的状態ベクトルおよび非物理的状態ベクトルを構成するために，数演算子 N_A および N_B の固有値が必ず零を含む正定値であることを示す．ノルムの正定値性[†3]から，任意の状態ベクトル $|\ \rangle$ に対して条件

$$\langle N_A\rangle = \langle\ |A^\dagger A|\ \rangle \geq 0, \quad \langle N_B\rangle = \langle\ |B^\dagger B|\ \rangle \geq 0 \tag{49}$$

が得られる．交換関係 (46) により，A, B はそれぞれ N_A, N_B の固有値を 1 だけ下げる役割を果たし，$A^\dagger, B^\dagger$ は N_A, N_B の固有値を 1 だけ上げる役割を果たす．したがって，任意の状態ベクトルが上式を満たすためには，基底状態

$$A|0\rangle = B|0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1 \tag{50}$$

が存在しなければならないことが示される．生成演算子 $A^\dagger$ および $B^\dagger$ を基底状態へ作用することにより，数演算子 N_A と N_B の同時固有状態 $|m, n\rangle$ が

$$|m,n\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!n!}}(A^\dagger)^m(B^\dagger)^n|0\rangle, \qquad \langle m,n|m',n'\rangle = \delta_{mm'}\delta_{nn'} \tag{51}$$

と構成される．したがって，ハミルトニアン (45) の固有値問題は

$$\hat{H}_{\mathrm{T}}|m,n\rangle = (m-n)\hbar\omega|m,n\rangle \tag{52}$$

と解かれる．Gupta の補助条件により，物理的状態空間は固有ベクトル $|m, 0\rangle$ によって張られる．物理的状態に対するハミルトニアンの零点エネルギーは，A と B の両モードの零点エネルギーが互いに相殺するために現れない．

[†3] 相対論的量子力学に於いて，明白にローレンツ共変な量子論を構成する際には，状態ベクトルの空間として不定計量のヒルベルト空間が必要となる．ここでは，非相対論的量子力学について考察しているので，不定計量の問題は現れない．

5.2　状態ベクトルに対する座標表示

ハミルトニアンの固有ベクトル (51) に対する座標表示を得るために，任意の状態 $|\ \rangle$ に対する一般的な規約表現 [6]

$$\langle\, q^1,\, q^2\,|\,\hat{q}^j\,|\ \rangle = q^j\langle\, q^1,\, q^2\,|\ \rangle,\quad \langle\, q^1,\, q^2\,|\,\hat{p}_j\,|\ \rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q^j}\langle\, q^1,\, q^2\,|\ \rangle \tag{53}$$

を導入する．

式 (50) により，基底状態を表わす波動関数は

$$\langle\, q^1, q^2|0\,\rangle = \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}}\exp\left\{-\frac{\omega}{2\hbar}\left[(q^1)^2+(q^2)^2\right]\right\} \tag{54}$$

と導かれる．関係式

$$\begin{aligned}\langle\, q^1, q^2|a_1^\dagger \pm i a_2^\dagger|\ \rangle &= -\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\exp\left\{\frac{\omega}{2\hbar}\left[(q^1)^2+(q^2)^2\right]\right\}\\ &\times\left(\frac{\partial}{\partial q^1}\pm i\frac{\partial}{\partial q^2}\right)\exp\left\{-\frac{\omega}{2\hbar}\left[(q^1)^2+(q^2)^2\right]\right\}\end{aligned} \tag{55}$$

を用いると，励起状態の波動関数は,

$$\begin{aligned}\langle\, q^1,\, q^2|m,n\,\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2^{m+n}m!n!}}\left(-\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\right)^{m+n}\exp\left\{\frac{\omega}{2\hbar}\left[(q^1)^2+(q^2)^2\right]\right\}\\ &\times\left(\frac{\partial}{\partial q^1}+i\frac{\partial}{\partial q^2}\right)^m\left(\frac{\partial}{\partial q^1}-i\frac{\partial}{\partial q^2}\right)^n\\ &\times\exp\left\{-\frac{\omega}{2\hbar}\left[(q^1)^2+(q^2)^2\right]\right\}\langle\, q^1,\, q^2|\,0\,\rangle\end{aligned} \tag{56}$$

と書き改められる．さらに，波動関数の形を明確にするために，複素座標 $z = q^1 + iq^2$ を導入する．その結果，励起状態の波動関数は,

$$\begin{aligned}\langle\, q^1,\, q^2|m,n\,\rangle &= \frac{1}{\sqrt{m!n!}}\sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}}\left(-\frac{\hbar}{\omega}\right)^{m+n}\\ &\times\exp\left\{\frac{\omega}{2\hbar}(\bar{z}z)\right\}\left(\frac{\partial^{m+n}}{\partial\bar{z}^m\partial z^n}\right)\exp\left\{-\frac{\omega}{\hbar}(\bar{z}z)\right\}\\ &= \frac{1}{\sqrt{m!n!}}\sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}}\exp\left\{-\frac{\omega}{2\hbar}(\bar{z}z)\right\}H_{mn}\left(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}z,\ \sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}\bar{z}\right)\end{aligned} \tag{57}$$

と求められる．ここで，$H_{mn}(\zeta,\bar{\zeta})$ は,

$$\begin{aligned}H_{mn}(\zeta,\bar{\zeta}) &= (-1)^{m+n}e^{\bar{\zeta}\zeta}\left(\frac{\partial^{m+n}}{\partial\bar{\zeta}^m\partial\zeta^n}\right)e^{-\bar{\zeta}\zeta}\\ &= \begin{cases}\left(\zeta-\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\right)^m\bar{\zeta}^n & (n\geq m)\\ \left(\bar{\zeta}-\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^n\zeta^m & (m\geq n)\end{cases}\end{aligned} \tag{58}$$

によって定義される複素エルミート多項式である [7, 8, 9]．複素エルミート多項式の諸性質は，付録 A で調べられる．

補助条件 (47) に注意すると，物理的な状態を記述するエネルギー固有関数は，式 (57) に於ける $n = 0$ の状態に対応する．すなわち，物理的状態のエネルギー固有関数は

$$\langle\, r\cos\theta,\ r\sin\theta | m, 0\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!}}\sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}}\left(\frac{\omega}{\hbar}\right)^{\frac{m}{2}} r^m \exp\left\{-\frac{\omega}{2\hbar}r^2\right\} e^{im\theta} \tag{59}$$

で与えられる．ここで，変数 (r, θ) は，$z = re^{i\theta}$ によって定義される極座標変数である．

任意の物理的状態ベクトル $|\mathrm{Phys} : 0\,\rangle$ に対応する波動関数の時間発展は,

$$\begin{aligned}\psi(r\cos\theta, r\sin\theta : t) &= \langle\, r\cos\theta,\ r\sin\theta | \mathrm{Phys} : t\,\rangle \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{\sqrt{m!}}\sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}}\left(\frac{\omega}{\hbar}\right)^{\frac{m}{2}} r^m \exp\left\{-\frac{\omega}{2\hbar}r^2\right\} e^{im(\theta-\omega t)}\end{aligned} \tag{60}$$

によって記述される．ここで，係数 c_m は，$c_m = \langle\, m, 0 | \mathrm{Phys} : 0\,\rangle$ によって決定される．

相空間の次元を縮減せずに得られた物理的状態に対する波動関数 (60) は，確率振幅として解釈できる．この解釈の下，確率振幅 (60) が，角運動量 ω で二次元平面内を運動する量子を記述していると見做すことができる．このことは，古典論で導出された運動方程式の解 (13) と対応している[†4].

6.　大域的対称性

ラグランジュ形式に於いて，連続変換によるラグランジュ関数の対称性は，系の保存量と深くかかわっている．一方で，ハミルトン形式では，ハミルトン関数を不変にする正準変換が系の保存量に関係する．ところが，第二類拘束条件を有する力学系に於いてディラックのアルゴリズムは，相空間の次元簡約化を行うために力学系の対称性が破られる．ここでは，相空間の次元を縮減せず，系の力学的対称性について論ずる．

6.1　古典論に於ける系の対称性と保存量

ラグランジュ関数 (11) は，SO(2) 回転による座標変換

$$(q^1)' = \cos\alpha(q^1) - \sin\alpha(q^2), \quad (q^2)' = \sin\alpha(q^1) + \cos\alpha(q^2) \tag{61}$$

の下で形状不変性を示す．この不変性にともなう保存量は，角運動量

$$l = q^1\dot{q}^2 - q^2\dot{q}^1 \tag{62}$$

である．実際，l が運動の保存量であることは，運動方程式 (12) から示される．

[†4] 量子論から古典論への対応を調べるには，コヒーレント状態での対応を見なければならない．この場合，物理的状態を生成する演算子 $A^\dagger$ のみを基底状態に作用することにより，コヒーレント状態が構成される．

時間発展を司る全ハミルトン関数 (27) の形を不変にする正準変換は,

$$G_0 = \frac{1}{\omega}H_{\mathrm{T}} = \frac{1}{2\omega}(p^2 + \omega^2 q^2 - P^2 - \omega^2 Q^2), \quad G_1 = qP + Qp,$$
$$G_2 = \frac{1}{\omega}pP - \omega qQ, \quad G_3 = -\frac{1}{2\omega}(p^2 + \omega^2 q^2 + P^2 + \omega^2 Q^2) \tag{63}$$

によって定義される生成子 G_0 および $G_i\,(i = 1, 2, 3)$ によって生成される．これらの生成子が運動の保存量であることが式 (22) から示される．生成子 G_0 および G_i は，関係式

$$\{G_0, G_i\} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$
$$\{G_1, G_2\} = -2G_3, \quad \{G_2, G_3\} = 2G_1, \quad \{G_3, G_1\} = 2G_2 \tag{64}$$

を満たす SO(2,2) 対称性の生成子である．よって，ハミルトニアンを不変にする正準変換の母関数は,

$$\bar{G}^{(\epsilon)} = \epsilon_0 G_0 + \sum_{i=1}^{3} \epsilon_i G_i \tag{65}$$

で与えられる．この変換を制限するために，拘束条件 Φ_i が拘束面内に停留するための整合的条件として

$$\delta_\epsilon \Phi_i = \{\Phi_i, \bar{G}^{(\epsilon)}\} = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \Phi_1, \Phi_2) \tag{66}$$

を要請する．この式を満足する生成子は，以下の二つの生成子

$$G_A = \frac{1}{2}(G_0 - G_3), \quad G_B = -\frac{1}{2}(G_0 + G_3) \tag{67}$$

に限定される．

生成子 G_A, G_B および G_1, G_2 による正準座標 (q^i, p_i) の無限小変換は，付録 B で調べられる．生成子 G_A は，拘束面上で SO(2) 回転による点変換であると解釈される．また，生成子 G_B は，拘束面上で物理的変換を引き起こさない．他の生成子 G_1, G_2 による変換は，ハミルトン関数が等しい別の拘束条件を有する力学系への写像であると考えられる．

6.2　量子論に於ける系の対称性と保存量

量子的対称性を探すために，全ハミルトン関数を不変にする生成子 (63) は，演算子 $A, A^\dagger, B, B^\dagger$ を用いて

$$\hat{G}_0 = \hbar(A^\dagger A - B^\dagger B), \quad \hat{G}_1 = -\hbar(A^\dagger B^\dagger + AB)$$
$$\hat{G}_2 = -i\hbar(A^\dagger B^\dagger - AB), \quad \hat{G}_3 = -\hbar(A^\dagger A + B^\dagger B + 1) \tag{68}$$

と置き換えられる．これらの演算子は，交換関係

$$[\hat{G}_0, \hat{G}_i] = 0,$$
$$[\hat{G}_1, \hat{G}_2] = -2i\hbar\hat{G}_3, \quad [\hat{G}_2, \hat{G}_3] = 2i\hbar\hat{G}_1, \quad [\hat{G}_3, \hat{G}_1] = 2i\hbar\hat{G}_2 \tag{69}$$

を満足する．

量子的対称性の生成子の意味を探るために，演算子 $\hat{G}_A, \hat{G}_B, \hat{G}_+, \hat{G}_-$

$$\hat{G}_A = \frac{1}{2}(\hat{G}_0 - \hat{G}_3) = \hbar\left(A^\dagger A + \frac{1}{2}\right),\ \hat{G}_B = -\frac{1}{2}(\hat{G}_0 + \hat{G}_3) = \hbar\left(B^\dagger B + \frac{1}{2}\right),$$
$$\hat{G}_+ = -\frac{1}{2}(\hat{G}_1 - i\hat{G}_2) = \hbar A^\dagger B^\dagger, \qquad \hat{G}_- = -\frac{1}{2}(\hat{G}_1 + i\hat{G}_2) = \hbar AB \tag{70}$$

を導入する．第 5 節で明確に構成されたハミルトニアンの固有ベクトル (51) は，演算子 $\hat{G}_A, \hat{G}_B$ に対して

$$\hat{G}_A|m,n\rangle = \left(m + \frac{1}{2}\right)\hbar|m,n\rangle, \quad \hat{G}_B|m,n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar|m,n\rangle \tag{71}$$

を満たす同時固有ベクトルである．一方で，$\hat{G}_\pm$ は，ハミルトニアンの固有値が同じである物理的状態と非物理的状態を繋ぐ変換

$$\hat{G}_+|m,n\rangle = \sqrt{(m+1)(n+1)}\hbar|m+1,n+1\rangle,$$
$$\hat{G}_-|m,n\rangle = \sqrt{mn}\hbar|m-1,n-1\rangle \tag{72}$$

を生成することが分かる．したがって，物理的状態ベクトル空間を不変にする変換は，$\hat{G}_A$ と $\hat{G}_B$ によって生成される U(1)×U(1) によるユニタリー変換

$$U = e^{i\alpha\hat{G}_A}e^{i\beta\hat{G}_B} \tag{73}$$

によって与えられる．実際，$A, A^\dagger, B, B^\dagger$ は，このユニタリー変換の下

$$A' = U^\dagger AU = e^{-i\alpha}A, \quad A^{\dagger\prime} = U^\dagger A^\dagger U = e^{i\alpha}A^\dagger,$$
$$B' = U^\dagger BU = e^{-i\beta}B, \quad B'^{\dagger} = U^\dagger B^\dagger U = e^{i\beta}B^\dagger \tag{74}$$

と変換する．ここで現れた位相は，固有状態に繰り込むことができる．したがって，この変換は物理的に等価な変換である．

7. 議　論

第二類拘束条件を有する単純な非相対論的力学模型の量子化が，Gupta-Bleuler 形式と同じ構成法を適用することにより行われた．この形式による量子化法は，第二類拘束条件を零と制約

するディラックの次元簡約化法とは異なり，系の力学変数と対称性の物理的意味を保持する．さらに，相空間の構造が保たれることで，状態ベクトルに対する位置表現を構成することが可能となった．その結果，物理的および非物理的状態ベクトルに対する配位空間上の波動関数が複素エルミート多項式を使って明確に構成され，物理的状態に対応する波動関数を確率振幅として解釈することが可能となった．波動関数のシュレディンガー描像から，量子状態の時間発展が二次元平面内を角速度 ω で反時計周りに回転する古典運動に対応すると解釈できる．

力学変数を縮減しないことにより，系の対称性が保持された．その結果，ハミルトン関数を不変にする相空間上の対称性から，系の保存量である対称性の生成子が求められた．ここで得られた生成子は，SO(2,2) 対称性を生成する．この力学系に於ける適切な変換は，拘束条件を不変にする整合的条件 (66) から SO(2,2) の部分代数によって生成されることが示された．他の生成子は，別の拘束条件を有する理論に変換する生成子であると解釈される．したがって，物理的意味のある系の大域的対称性の生成子は，ハミルトニアンの不変性と整合的条件 (66) から決定できることを明らかにした．

古典論で見出された対称性の生成子が，量子状態空間上で求められた．第 5 節で明確に構成されたハミルトニアンの固有ベクトルは，演算子 $\hat{G}_A, \hat{G}_B$ の同時固有ベクトルになっていることが示された．一方で，演算子 $\hat{G}_\pm$ は，同じエネルギーを持つ物理的状態ベクトルと非物理的状態ベクトルの間の変換であることが示された．その結果，物理的に意味のある演算子は $\hat{G}_A$ と $\hat{G}_B$ であることが示され，古典論の整合的条件から得られた結果と一致することが確かめられた．

本論文で提案された第二類拘束条件を有する系に対する Gupta-Bleuler 形式による量子化は，ゲージ理論で発展させられたローレンツ共変な量子化のある種の拡張として考えられる．ここで第二類拘束条件を有する力学模型に対するこの新しい構成法が摂動理論の下でどのように適切に扱われるかは，次の論文で議論する．また，第二類拘束条件を取り扱う別の系統的手法として提唱された一般化された BRST 理論 [10, 11] と Gupta-Bleuler 形式の関係は，この形式の適用限界を調べることにより明確にされるであろう．

付録 A: 複素エルミート多項式―母関数とその性質―

複素エルミート多項式 $H_{mn}(\zeta,\bar{\zeta})$ は，一次元調和振動子を解析する際に現れる通常のエルミート多項式を拡張したものである．ここでは，その母関数といくつかの性質についてまとめる．

本文中で定義された複素エルミート多項式は,

$$
\begin{aligned}
H^*_{mn}(\zeta,\bar{\zeta}) &= H_{nm}(\zeta,\bar{\zeta}),\\
H_{mn}(\bar{\zeta},\zeta) &= H_{nm}(\zeta,\bar{\zeta})
\end{aligned}
\tag{75}
$$

という対称性を持つ．この性質を満たすように通常のエルミート多項式の母関数を拡張することで，複素エルミート多項式の母関数

$$
\begin{aligned}
\exp(-\bar{s}s+\bar{s}\zeta+\bar{\zeta}s) &= \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{1}{m!n!}\left(\frac{\partial^{m+n}}{\partial\bar{s}^m\,\partial s^n}\right)e^{-(\bar{s}-\bar{\zeta})(s-\zeta)+\bar{\zeta}\zeta}\Big|_{\bar{s},s=0}(\bar{s})^m s^n\\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{H_{mn}(\zeta,\bar{\zeta})}{m!n!}(\bar{s})^m s^n
\end{aligned}
\tag{76}
$$

が導出される．

複素エルミート多項式の直交性を見るために，複素数 ζ を 2 つの実数 x,y を用いて

$$
\zeta = x+iy \tag{77}
$$

と表わす．式 (76) から，積分に関する関係式

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{(-\bar{s}s+s\bar{\zeta}+\zeta\bar{s})}e^{(-t\bar{t}+\bar{t}\zeta+\bar{\zeta}t)}e^{-\bar{\zeta}\zeta}dxdy\\
&\quad=\sum_{m,n=0}^{\infty}\sum_{m',n'=0}^{\infty}\frac{s^m\bar{s}^n}{m!n!}\frac{\bar{t}^{n'}t^{n'}}{m'!n'!}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}H^*_{mn}(\zeta,\bar{\zeta})H_{m'n'}(\zeta,\bar{\zeta})e^{-\bar{\zeta}\zeta}dxdy
\end{aligned}
\tag{78}
$$

が得られる．ここで，上式の左辺は

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \pi\exp(\bar{s}t+\bar{t}s)\\
&= \pi\sum_{m,n=0}^{\infty}\sum_{m',n'=0}^{\infty}\frac{s^m\bar{s}^n}{m!n!}\frac{\bar{t}^{n'}t^{n'}}{m'!n'!}\,m!n!\,\delta_{mm'}\delta_{nn'}
\end{aligned}
\tag{79}
$$

と計算できる．よって，式 (78) と (79) の展開係数を比較することにより，複素エルミート多項式の直交関係

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}H^*_{mn}(\zeta,\bar{\zeta})H_{m'n'}(\zeta,\bar{\zeta})e^{-\bar{\zeta}\zeta}dxdy = \pi\,m!n!\,\delta_{mm'}\delta_{nn'} \tag{80}
$$

が示される．

付録 B: 生成母関数による無限小変換

ここでは，式 (63) および (67) によって定義される無限小変換の生成子 G_A, G_B, G_1, G_2 による正準座標 q^i, p_i の無限小変換について調べる．生成子 G_A, G_B, G_1, G_2 による正準座標 (q^i, p_i) の変換は，それぞれ

• **G_Aによる無限小変換：**

$$\begin{aligned}
\delta_{\epsilon_A} q^1 &= -\epsilon_A \left(q^2 - \frac{1}{2\omega}\Phi_1 \right) \approx -\epsilon_A q^2, \\
\delta_{\epsilon_A} q^2 &= \epsilon_A \left(q^1 + \frac{1}{2\omega}\Phi_2 \right) \approx \epsilon_A q^1, \\
\delta_{\epsilon_A} p_1 &= -\epsilon_A \left(\omega q^1 + \frac{1}{2}\Phi_2 \right) \approx -\epsilon_A \omega q^1, \\
\delta_{\epsilon_A} p_2 &= -\epsilon_A \left(\omega q^2 - \frac{1}{2}\Phi_1 \right) \approx -\epsilon_A \omega q^2,
\end{aligned} \tag{81}$$

• **G_Bによる無限小変換：**

$$\begin{aligned}
\delta_{\epsilon_B} q^1 &= \frac{1}{2\omega}\epsilon_B \Phi_1 \approx 0, \qquad \delta_{\epsilon_B} q^2 = \frac{1}{2\omega}\epsilon_B \Phi_2 \approx 0, \\
\delta_{\epsilon_B} p_1 &= \frac{1}{2}\epsilon_B \Phi_2 \approx 0, \qquad \delta_{\epsilon_B} p_2 = -\frac{1}{2}\epsilon_B \Phi_1 \approx 0,
\end{aligned} \tag{82}$$

• **G_1による無限小変換：**

$$\begin{aligned}
\delta_{\epsilon_1} q^1 &= \epsilon_1 \frac{p_1}{\omega}, \qquad \delta_{\epsilon_1} q^2 = \epsilon_1 \frac{p_2}{\omega}, \\
\delta_{\epsilon_1} p_1 &= \epsilon_1 \omega q^1, \qquad \delta_{\epsilon_1} p_2 = \epsilon_1 \omega q^2,
\end{aligned} \tag{83}$$

• **G_2による無限小変換：**

$$\begin{aligned}
\delta_{\epsilon_2} q^1 &= -\epsilon_2 q^1, \qquad \delta_{\epsilon_2} q^2 = -\epsilon_2 q^2, \\
\delta_{\epsilon_2} p_1 &= \epsilon_2 p_1, \qquad \delta_{\epsilon_2} p_2 = \epsilon_2 p_2
\end{aligned} \tag{84}$$

として得られる．ここで $\epsilon_A, \epsilon_B, \epsilon_1, \epsilon_2$ は任意の無限小量である．G_A による無限小変換は，q^1 と p_2 および q^2 と p_1 が同じ変換性を持つことを示している．これらの変換は，拘束面上で SO(2) 回転変換による点変換を表現する．G_B による微小変換は，拘束面上で物理的変換を引き起こさない．生成子 G_1 は，q^1 と p_1 および q^2 と p_2 の間の SO(1,1) 変換を表わし，G_2 は，$q^1 p_1$ と $q^2 p_2$ を保つ引き伸ばし変換に対応する．

参 考 文 献

[1] P. A. M. Dirac, Canad. J. Math. **2** (1950), 129.

[2] P. A. M. Dirac, Canad. J. Math. **3** (1951), 1.

[3] L. Anderson and P. G. Bergmann, Phys. Rev. **83** (1951), 1018.

[4] P. G. Bergmann and I. Goldberg, Phys. Rev. **127** (1955), 531.

[5] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **A246** (1958), 333.

[6] P. A. M. Dirac,*The Priciples of Quantum Mechanics.*, Oxford University Press, Oxford.

[7] I. Shigekawa, J. Func. Anal. **75** (1987), p. 92.

[8] S. Thangavelu, *Lectures on Hermite and Laguerre expansions.* Mathematical Notes, **42** (Princeton, NJ, 1993).

[9] A. Wünsche, J. Phys. A, **31** (1998), p. 8267–8287.

[10] R. Marnelius, Nucl. Phys, **B294**, (1987) 685;
R. Marnelius, *Aspects of general BRST quatization.*, International Symposium Ahrenshoop on the Theory of Elementary Particles, 25th, Gosen, Germany, Sep 23–26, 1991.

[11] R. Marnelius and I. S. Sogami, In. J. Mod. Phys, **A13** (1998), 92.

Gupta-Bleuler Quantization of Second Class Constraints System

Kozo KOIZUMI
Yasufumi KONISHI
Tetsuya TERAKURA
Ikuo S. SOGAMI

Abstract

A non-relativistic particle system with second class constraints is quantized in a scheme similar to that of Gupta-Bleuler formalism in which the constraints are treated as subsidary conditions on state vectors. In the new scheme where no reduction of the phase space takes place, the physical variables and the original symmetry of the system are preserved. The wavefunction in configuration space is explicitly constructed in terms of the complex Hermite polynomials. This formalism enables us to interpret properly the wavefunction of the physical state as a probability amplitude.

Keywords: General Canonical Formalism, Gupta-Bleuler Formalizm, Complex Hermite Polynomials, Probability Amplitude, Symmetries and Generators