特異ラグランジュ系を再現するハミルトン系の構成

濱　地　賢 太 郎

(平成 20 年 9 月 25 日提出
平成 20 年 12 月 15 日修正)

要　旨

Dirac によって与えられた，特異ラグランジアンから導かれるオイラー・ラグランジュ方程式に対応するハミルトン形式を構成する処方の問題点を幾つか挙げ，その解決策としてその構成法の改良を与えた．またここで与える手法によって，これまでオイラー・ラグランジュ方程式とハミルトン形式の同値性に関する問題を，明快な形で論じることができるようになり，特に，オイラー・ラグランジュ方程式の解を再現するハミルトン系の構成法を与えた．

キーワード：特異ラグランジアン，拘束系の力学，正準形式，Dirac の処方，拘束イデアル

1.　はじめに

ラグランジアン L のヘス行列 $\frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial \xi^j}$ が非正則であるとき，いわゆるルジャンドル変換を通して，ハミルトン形式に移行することができないことはよく知られている．このような特異系について，同値なハミルトン系を構成する処方の研究はまず Dirac によって系統的になされた [1].

外部拘束を持つ系や内部拘束をもつ典型的な系であるゲージ場の正準量子化等に対し，この Dirac の手法は有効に働くことが既によく知られている．

その一方で，この Dirac の処方箋は数学形式としてしては，非常にあいまいな概念や，証明が不完全な主張が渾然として，完成された理論とはいえない．

本論文では，まずラグランジュ形式からハミルトン形式への移行について Dirac の処方の概説を行った上で，そこに現れる問題点の幾つかを提示し，続いてその解決を図るために Dirac の処方を改良した方法を与える．

1.1　ラグランジュ形式からハミルトン形式へ

オイラー・ラグランジュ方程式は，配位空間 Q の座標変換に対して不変であることが良く知られている．しかし $(q, \xi) \in TQ$ に関する一階の微分方程式系

$$\dot{q}^i = \xi^i \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial \xi^j}\dot{\xi}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial q^j}\xi^j - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \tag{2}$$

とみるとき，TQ のどのような変換に関して不変であるかは明らかではない．また，代数的な取り扱いに適してもいない．

ハミルトン形式は，これらの不満を解消することができる．また，方程式の代数的な取り扱いが可能なる点が，量子力学との類似を見ることができ，ポアソン括弧を交換関係と置き換えることにより量子力学の代数を構成する「正準量子化」の自然さにつながっていると考えられる．

ラグランジュ形式に対応するハミルトン形式を作るには，通常 T^*Q 上自然に定義されるシンプレクティク構造

$$\omega = d\theta,\ \text{ただし}\ \theta = p_i dq^i$$

から誘導されるポアソン括弧

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial p_i}$$

を利用する．すなわち，ハミルトニアン H と呼ばれる $C^\infty(T^*Q)$ の元を適当に定めて，T^*Q 上の「正準方程式」

$$\dot{q}^i = \{q, H\} \tag{3}$$

$$\dot{p}_i = \{p, H\} \tag{4}$$

と適当な TQ から T^*Q への微分同相写像によってオイラー・ラグランジュ方程式 (1), (2) と一対一に対応させる．

この手続きは L が正則，すなわち正準共役運動量

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \xi^i}(q, \xi) \tag{5}$$

が $\xi^i = \xi^i(q, p)$ のように逆に解ける場合は以下の様に構成すればよい．すなわちハミルトニアンを

$$H(q, p) = p_i\xi^i(q, p) - L(q, \xi(q, p))$$

と定めれば，(5) から定まる TQ と T^*Q の微分同相写像によってオイラー・ラグランジュ方程式と H から定まる正準方程式が対応する．

問題は L が特異，すなわち (5) が TQ から T^*Q への微分同相でないときである．

1.2　特異ラグランジアンと Dirac の処方

特異ラグランジアンに対しては，(q, ξ, p) の関係式 (5) の中に，ξ を含まない $n - r$ 個の独立な (q, p) の関係式

$$\phi_s(q, p) = 0, s = 1, 2, \cdots, n - r \tag{6}$$

を含むと考えられる．ただし r は L のヘス行列

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial \xi^j}$$

の階数である（階数は TQ 上で一定であると仮定する）．

オイラー・ラグランジュ方程式の解を (5) によって写したものは条件式 (6) を満たさなければならないので，対応する T^*Q におけるハミルトン形式は (6) を拘束条件として持つ微分方程式系，言い換えれば $\phi_s(q,p)=0$ を満たすような集合 M_0（拘束面）内に軌道が存在するような力学系を考えなければならない．

また，ラグランジュ系に対応するハミルトニアンを構成する際,

$$E(q,\xi,p) = p_i\xi^i - L(q,\xi) \tag{7}$$

に (5) を逆に解いて ξ を (q,p) で表したものを代入することはできないのであるが,

$$\frac{\partial E}{\partial \xi^i} = p_i - \frac{\partial L}{\partial \xi^i}$$

となるので，関係式 (5) を用いて E を変形すれば ξ に依存しない式，$H_c(q,p)$ にできることを意味している．そこで，L に関するハミルトニアンを H_c と定めたい．ただし，ここで取り扱いたいハミルトン系は T^*Q 全体でなく M_0 で考えればよいので，考えられうるハミルトニアンとしては，M_0 で H_c と一致するもの全て，即ち任意の関数 $u^s \in C^\infty(T^*Q)$ を用いて

$$H_T = H_c + u^s\phi_s$$

の形まで許されるべきと考える．このハミルトニアン（の族）を全ハミルトニアンと呼ぶ．

H_T によって正準方程式

$$\dot{q}^i = \{q^i, H_T\}$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H_T\}$$

が得られる．この解 (q_t,p_t) がラグランジュ系の解と同値であるためには，解が拘束面に含まれる，すなわち $\phi_s(q_t,p_t)=0$ が成り立つ必要がある．よってこの時間微分が 0 に等しくなる条件―整合性の条件と呼ばれる―を要求しなければならない：

$$\chi_s(q,p) \equiv \frac{\partial \phi_s}{\partial q^i}\{q^i, H_T\} + \frac{\partial \phi_s}{\partial p_i i}\{p_i, H_T\} = 0 \text{ on } M_0$$

χ_s に含まれるパラメータ u^s をこの等式が成り立つように定めることができる場合は，H_T の定義においてはじめから u^s がそのように定まっていたかのように考え，決定された u^s を含む項を H_c に繰り込む．どのような u^s を選んでもこの等式が成り立たない場合は，χ_s を新たな拘束条件式として加え，引き続いて χ_s の整合性条件を成り立つようにこの手続きを繰り返す．

最終的に整合性条件が満足するような拘束条件の組 $\phi_s, \chi_s, \chi_s^{(1)}, \ldots$ と決定されずに残るパラメータのみを含む H_T を得る．

これら全ての拘束条件を満たす面で正準方程式は解を持つ．そしてそれらの解がもとのラグランジュ系の解と一致することを主張する．

1.3　Dirac の処方についての反省

先に概説した Dirac の処方については，幾つかの問題点が含まれている．以下にそれを列挙する．

1. 正準共役運動量の定義式 (5) で TQ 全体を写像した T^*Q の部分集合 M_0' と，この定義式の中に含まれる (q,p) の関係式 $\phi_s(q,p)$ の共通零点によって定められる集合 M_0 とは一致しないことがある．そもそも，「逆に解けない」からといって T^*Q 全体で定義された関係式として ϕ_s が存在する保証がない．せいぜい逆写像定理によって M_0' のある近傍ごとに $\phi_s = 0$ の様に記述できることまでしかいえない．すなわち，拘束面 M_0' はうまく定義できるが，拘束条件 ϕ_s は一般にはうまく定義できない概念である．
2. H_c の定義において，$E(q,\xi,p)$ を関係式 (5) を用いて ξ を消去するように変形するわけであるが，変形の方法は一通りではない—そもそも (5) を ξ について解けなかった—のだから，H_c は一意に決まるものではない．この H_c の曖昧さが一次拘束条件で生成されるならば，H_T は well-defined となるが，それは明らかではない．すなわち，一般的に許されるハミルトニアンの形は曖昧である．
3. 一次拘束に適当な拘束条件を更に加えることによって，M_0 より小さい空間で閉じたハミルトン系を得られるのであるが，こうして得られたハミルトン系の軌道がオイラー・ラグランジュ方程式のどういった解に対応しているかは不明であるし，そもそも何をもって「対応」しているとするのかという定義すらない．

2.　特異ラグランジアンにおけるオイラー・ラグランジュ方程式の構造

L が特異な場合は，写像 (5) が微分同相でないから，このヤコビ行列すなわち L のヘス行列 $\frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial \xi^j}$ が正則でない．

よってオイラー・ラグランジュ方程式の (2) は，$\dot{\xi}^i$ について解くことができないので，正規でない常微分方程式系である．正規系でない常微分方程式については，「解の存在定理」が適応できないので，この力学系を研究するには注意が必要となる．

まず極端な例として $\frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial \xi^j}$ が，幾つかの $(q,\xi)_s$ を除いて正則である場合を考える．このときは $(q,\xi)_s$ を特異点とした正規な常微分方程式系が得られる．このような常微分方程式系は複素関数（超幾何関数）の範囲まで広げて議論すべき対象であるが，目下興味のある力学系において

は時刻が実数で，かつ解の分岐が無いような範囲に制限したいので，このような特異点を除いた領域を速度位相空間として研究する．また，同様な理由で $\frac{\partial^2 L}{\partial\xi^i\partial\xi^j}$ の階数が一定でない場合もそのような「跳躍」が起こる点を除いた領域で考える．

ヘス行列の階数が (q,ξ) に関係なく一定の場合は，その固有値 $\mu(s)$ と固有ベクトル e^i_s:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\xi^i\partial\xi^j}e^j_s = \mu(s)\delta_{ij}e^j_s, \quad s = 1, 2, \ldots, n$$

を考える．ただし番号を並び替えて，$s = 1, \ldots, n-r$ のとき $\mu(s) = 0$ としておく．

0-固有値の固有ベクトル $e^i_s, s = 1, \ldots, n-r$ を (2) に乗ずれば，以下のような $\dot{\xi}^i$ を含まない (q,ξ) の関係式を得る．

$$\chi_s(q,\xi) \equiv e^i_s\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\xi^i\partial q^j}\xi^j - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right) = 0, \quad s = 1, \ldots, n-r. \tag{8}$$

これは系の時間発展を記述するのではなく，系がどのような空間に制限されるかを表す方程式である．これらをラグランジュ形式における一次拘束条件と呼ぶことにする．また，ラグランジュ形式における一次拘束面を

$$\tilde{M}_0 = \{(q,\xi) \in TQ | \chi_s(q,\xi) = 0, s = 1, \ldots n-r\}$$

と定める．

注意 2.1. 定義式 *(8)* からすぐに分かるように，L によっては χ_s が項等的に 0 に等しくなることもある．すなわち，特異系であっても拘束条件を持たないことがある．

オイラー・ラグランジュ方程式の一次拘束条件 χ_s と，Dirac の処方における一次拘束条件 ϕ_s の間には関係があることが知られている [2, 3] が，その対応についてはあまり明確に表されているとは言いがたい．後に Dirac の処方を別の定式化で表すとき，この対応を明確な形で表す．

拘束条件を満たす (q,ξ) については，方程式 (2) は以下のように解くことができる：

$$\dot{\xi}^i = F^i + \sum_{s=1}^{n-r} v^s e^i_s$$

ただし F^i は x^i に関する連立方程式

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\xi^i\partial\xi^j}x^j = -\frac{\partial^2 L}{\partial\xi^i\partial q^j}\xi^j + \frac{\partial L}{\partial q^i}$$

の特解で，v^s は (q,ξ) の任意関数である．

以上をまとめると，

命題 2.1. 方程式 *(1), (2)* は以下のように書き直される：

$$\dot{q}^i = \xi^i \tag{9}$$

$$\dot{\xi}^i = F^i + \sum_{s=1}^{n-r} v^s e^i_s \tag{10}$$

$$\chi_s(q,\xi) \equiv e^i_s\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\xi^i\partial q^j}\xi^j - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right) = 0, \quad s = 1,\ldots,n-r. \tag{11}$$

次に，この方程式の解空間について考える．任意に v^s を与えれば，微分方程式 (9), (10) は正規系であるから，常微分方程式の解の存在定理より，任意の (q_0,ξ_0) を初期値とした軌道 (q_t,ξ_t) の存在が保証される．この軌道は v^s の選択に依存するので，v_s-軌道と呼ぶことにし，またこれより TQ の（局所）1 パラメータ変換群 $\Phi^{v_s}_t : TQ \to TQ$ が定義される．

(11) を満たす解を記述するために，以下の概念を用意する．

定義 2.1. 部分集合 $R \subset TQ$ で，

$$\Phi^{v_s}_t(R) \subset R \quad \textit{for any } t,$$

を満たすものを $\Phi^{v_s}_t$-不変部分集合と呼ぶ．また，任意の $\Phi^{v_s}_t$-不変部分集合の和集合も $\Phi^{v_s}_t$-不変部分集合になるので，部分集合 S に含まれる最大の $\Phi^{v_s}_t$-不変部分集合が考えられる．これを $\mathrm{Inv}(\Phi^{v_s}_t;S)$ で表す．

以上の準備のもと，次のことが言える．

命題 2.2. 方程式系 *(9), (10), (11)* の解は任意の $(q_0,\xi_0) \in \mathrm{Inv}(\Phi^{v_s}_t;S)$ を初期値とする v_s-軌道で与えられる．

Proof. $(q_0,\xi_0) \in \mathrm{Inv}(\Phi^{v_s}_t;S)$ を初期値とする v_s-軌道 (q_t,ξ_t) は $\mathrm{Inv}(\Phi^{v_s}_t;S)$ の定義により，$(q_t,\xi_t) \in \mathrm{Inv}(\Phi^{v_s}_t;S)$．また $\mathrm{Inv}(\Phi^{v_s}_t;S) \subset \tilde{M}_0$ により，(q_t,ξ_t) は $\tilde{M}_0$ 上の点．即ち (11) を満たす． □

集合 $\mathrm{Inv}(\Phi^{v_s}_t;S)$ は v^s に依存して決まるので，たとえば $\mathrm{Inv}(\Phi^{v_s}_t;S) = \emptyset$ になるような v^s ならば，上の命題による解は存在しない．

また，v^s, v'^s で，$\mathrm{Inv}(\Phi^{v_s}_t;S) \subset \mathrm{Inv}(\Phi^{v'_s}_t;S)$ となるときは，パラメータの上手な選択で解空間を拡張できることを意味している．そこで $\mathrm{Inv}(\Phi^{v_s}_t;S)$ が最も大きくなるように v_s を限定した，方程式系 (9), (10), (11) を元のオイラー・ラグランジュ方程式の意味することと定める．

注意 2.2. $\mathrm{Inv}(\Phi^{v_s}_t;S)$ が v^s の選び方に関して，常に包含関係にある場合を除き，「$\mathrm{Inv}(\Phi^{v_s}_t;S)$ が最も大きくなる」という言明は一般には意味をもたない．v^s, v'^s で $\mathrm{Inv}(\Phi^{v_s}_t;S), \mathrm{Inv}(\Phi^{v'_s}_t;S)$ が互いに包含関係にないときは，どちらがより「広い解空間をもつ」ことを比べられない．このような事情がおきるときは「ゲージ非同値な力学系」が存在すると言っていいかもしれないが，今のところこのような例の存在については知られていない．

また，$v_s \neq v'_s$ であっても $\mathrm{Inv}(\Phi_t^{v_s}; S) = \mathrm{Inv}(\Phi_t^{v'_s}; S)$ になることがあるので，一般に一意的な微分力学系を定められないことに注意する．このような「時間発展の非一意性」をゲージと呼ぶべきかどうかはよく分からない．

これまでは $\mathrm{Inv}(\Phi_t^{v_s}; S)$ と v^s を公理的に特徴づけていただけで，具体的な計算の方法は与えていない．そこで代数的にこれを定める手続きを考える．

軌道 (q_t, ξ_t) が (11) を満たすならば，$\chi_s(q_t, \xi_t)$ の任意の階数の微分が 0 である．

$$\frac{d^n}{dt^n}\chi_s(q_t, \xi_t) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{12}$$

合成関数の微分を行い，左辺を (9), (10) を用いて表せば，任意関数 v^s を含む (q_t, ξ_t) の関数に書き換えることができる．すなわち $\chi_s^{(0)} = \chi_s$ とおいて，$\chi_s^{(n)}$ を

$$\chi_s^{(n)}(q, \xi) \equiv \frac{d}{dt}\chi_s^{(n-1)}(q_t, \xi_t) = \frac{\partial \chi_s^{(n-1)}}{\partial q^i}\xi^i + \frac{\partial \chi_s^{(n-1)}}{\partial \xi^i}(F^i + \sum_{s=1}^{n-r} v^s e_i^s),$$

の様に帰納的に定める．

これらを用いれば，(12) 式が成り立つ必要条件として，$(q, \xi) \in \mathrm{Inv}(\Phi_t^{v_s}; S)$ ならば $\chi_s^{(n)}(q, \xi) = 0$ と表すことができる．即ち $\mathrm{Inv}(\Phi_t^{v_s}; S)$ は $\chi_s^{(n)}(q, \xi)$ の共通零点に含まれる．また，最も大きな $\mathrm{Inv}(\Phi_t^{v_s}; S)$ を得るには，方程式系 $\chi_s^{(n)}(q, \xi) = 0$ の独立な式が最も少なくなるように v^s を定めていけばよいことになる．

3.　Dirac の処方の再定式化

オイラー・ラグランジュ方程式と同値なハミルトン形式を作るためには，同値を実現するような速度位相空間と位相空間の間の写像が必要となる．特異系における正準共役運動量を定義する写像は微分同相でないから，普通の意味ではこの目的を果たす写像は構成できないが，運動量の空間が限定されていることに注意すれば，その限定された空間で逆写像を構成することは可能なはずである．そのような適当な制限のもと逆写像になるようなもの全体を考え，それらに対応するハミルトン形式をすべて考えることによってオイラー・ラグランジュ方程式を再現するハミルトン形式を探すことを考える．また，拘束条件式の選び方に依存する曖昧さを避けるために，拘束面とその上で 0 になるような関数全体からなるイデアルを理論構成の中心にすえる．

3.1　部分逆写像による定式化

正準共役運動量を速度位相空間 TQ から，位相空間 T^*Q への写像として定義する．以下では，Q の座標を q^i, TQ の座標は T_qQ の基底として $(\partial/\partial q^i)$ をとり，$T_qQ \ni \xi = \xi^i(\partial/\partial q^i)$ の意味で (q^i, ξ^i) を用いて表し，T^*Q の座標系は TQ の双対基底を経由して (q^i, p_i) で表す．

定義 3.1. ラグランジアン L に関する正準共役運動量とは，以下で定義される写像 $\Psi : T_qQ \to T_q^*Q$ である：

$$\Psi_i(q,\xi) = \frac{\partial L}{\partial \xi^i}(q,\xi).$$

L が特異であるときには Ψ は全射ではない．Ψ による TQ の像は対応する位相空間における軌道が含まれるべき空間，すなわち拘束面である．

定義 3.2.

$$M_0 = \Psi(TQ) \subset T^*Q$$

とおき，M_0 を一次拘束面と呼ぶ．また，M_0 上で 0 に値をとる $C^\infty(T^*Q)$ の元全体を $\mathfrak{R}(M_0)$ あるいは $\mathfrak{R}_0$ で表し，一次拘束イデアルと呼ぶ．

注意 3.1. *Dirac* の処方における一次拘束条件式とは，$\mathfrak{R}_0$ の独立な $n-r$ 個の元 ϕ_s で $M_0 = \{(q,p)|\phi_s(q,p)=0\}$ を成り立たせるようなものとして対応させられる．

関係式 $p_i = \Psi_i(q,\xi)$ を満たす (q,p) は M_0 に含まれるので，この関係式を任意の $(q,p) \in T^*Q$ に対して ξ について解くことはできない．そこで「部分的な逆写像」すなわち写像 $\Xi : T_q^*Q \to T_qQ$ で

$$p_i = \Psi_i(q, \Xi(q,p))$$

が $(q,p) \in M_0$ について成立するようなものを考える．

定義 3.3. 写像 $\Xi : T_q^*Q \to T_qQ$ が Ψ の部分逆写像であるとは，ある M_0 上で 0 になる写像 $Z : T_q^*Q \to T_q^*Q$ が存在して

$$p_i - \Psi_i(q,\Xi(q,p)) = Z_i(q,p) \quad \textit{for any } (q,p) \in T^*Q$$

が成り立つものをいう．とくに特異系において，一般に部分逆写像 Ξ は一意に定まらない．

注意 3.2. L が正則，すなわち Ψ が逆を持つ場合には上定義おける Z は零写像のみとなるが，特異の場合は部分逆写像が存在するための解の存在条件あるいは *Dirac* の処方における一次拘束条件式に関係し，一般に非自明な写像となる．後述の例を参照のこと．

部分逆写像を一つ固定すれば，$E(q,\xi,p) = p_i\xi^i - L(q,\xi)$ に $\xi^i = \Xi^i(q,p)$ と代入することでハミルトニアンを構成することができる．

定義 3.4. 部分逆写像 Ξ に関するハミルトニアンを

$$H_\Xi(q,p) = p_i\Xi^i(q,p) - L(q,\Xi(q,p))$$

と定める．

これにより Ξ の選択毎にハミルトン系を記述することができる．とくに正準座標に関しては簡単な計算により

$$\{q^i, H_\Xi\} = \Xi^i + Z_j \frac{\partial \Xi^j}{\partial p_i} \tag{13}$$

$$\{p_i, H_\Xi\} = \frac{\partial L}{\partial q^i} - Z_j \frac{\partial \Xi^j}{\partial q^i} \tag{14}$$

ハミルトン系は正規な常微分方程式であるから，常微分方程式の解の存在定理により任意の $(q_0, p_0) \in T^*Q$ を初期値とする解曲線 (q_t, p_t) が存在する．しかし，(q_t, p_t) がオイラー・ラグランジュ方程式の解曲線を Ψ で写したものに一致するためには，$(q_t, p_t) \in M_0$ となる必要がある．この条件は Dirac の処方における「整合性条件」に他ならない．

$(q_t, p_t) \in M_0$ であれば，任意の $\phi \in \mathfrak{N}_0$ に対して $\phi(q_t, p_t) = 0$ が成り立つので，整合性条件が成り立つ必要条件として

$$0 = \frac{d}{dt}\phi(q_t, p_t) = \{\phi, H_\Xi\},$$

が得られる．即ち $\mathfrak{N}_0$ を用いて

$$\{\mathfrak{N}_0, H_\Xi\} \subset \mathfrak{N}_0$$

のように記述できる．

しかし一般には $\mathfrak{N}_0$ が「小さい」ので，$\{\mathfrak{N}_0, H_\Xi\} \not\subset \mathfrak{N}_0$ となり整合性条件は満たされない．そこで $\mathfrak{N}_0$ を時間発展不変なイデアルへ拡大することを考える．

定義 3.5. $C^\infty(T^*Q)$ の部分集合 $\mathfrak{N}$ が $H \in C^\infty(T^*Q)$-不変であるとは

$$\{\mathfrak{N}, H\} \subset \mathfrak{N}$$

を満たすことをいう．

この定義よれば，$\mathfrak{N}$ で生成されるベクトル空間も自動的に H-不変になることが分かる．しかし $\mathfrak{N}$ が H-不変であっても，$a \in C^\infty(T^*Q), \phi \in \mathfrak{N}$ に対し

$$\{a\phi, H\} = a\{\phi, H\} + \{a, H\}\phi \subset a\mathfrak{N} + \mathfrak{N}^2,$$

となるから，一般に $a\phi$ は $\mathfrak{N}$ に含まれないことに注意しておく．

そこで $\mathfrak{N}_0$ を H-不変かつ拘束条件として意味があるように $\mathfrak{N}_0$ の不変拡大を限定的に定義する．

定義 3.6. イデアル $\mathfrak{N}_0$ に対し，$\mathfrak{N}$ が H-不変なイデアルで $\mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{N}$ を満たすとき，$\mathfrak{N}$ は $\mathfrak{N}_0$ の H-不変拡大であるという．

自明な $\mathfrak{N}_0$ の H-不変拡大として $\mathfrak{N} = C^\infty(T^*Q)$ が存在するが，これは拘束面が空集合であることを意味するので，つまらない拡大ということになる．

できるだけ多くの軌道を持つことが，より意味のある力学系であると考えられるので $\mathfrak{N}_0$ の不変拡大としてはできるだけ小さいものを考えることが適当であろう．

補題 3.1. $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ を $\mathfrak{N}_0$ の H-不変拡大とする．このとき $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$ は $\mathfrak{N}_0$ の H-不変拡大である．

Proof. ほぼ自明． □

$\mathfrak{N}_0$ の全ての H-不変拡大の共通部分をとることで，最小の H-不変拡大 $\mathfrak{N}$ を得ることができる．

定義 3.7. L をラグランジアン，Ψ を正準共役運動量写像，$\mathfrak{N}_0$ を一次拘束イデアル，Ξ を Ψ の部分逆写像，H_Ξ を Ξ に関するハミルトニアンとする．

このとき，$\mathfrak{N}_0$ の最小な H_Ξ-不変拡大を $\mathfrak{N}_\Xi$ で表す．また，

$$M(\Xi) = \{(q, p) \in T^*Q | \phi(q, p) = 0 \; for \; any \; \phi \in \mathfrak{N}(\Xi)\}$$

とおいて，Ξ-拘束面とよぶ．

一次拘束イデアル $\mathfrak{N}_0$ の不変拡大は H_Ξ に依存するが，Ξ の選択によっては最小の不変拡大が $C^\infty(T^*Q)$ になる可能性もあり，この選択が物理的に好ましくないことを意味している．また，不変拡大の間に包含関係

$$\mathfrak{N}_\Xi \subset \mathfrak{N}_{\Xi'}$$

があるときは，Ξ で定まる力学系の方が Ξ' よりも多くの軌道を含んでいるので，「最も大きな」$\mathfrak{N}_\Xi$ を得られるような Ξ の選択が物理的に適当な Ξ の選択と考えられる．更に $\mathfrak{N}_\Xi = \mathfrak{N}_{\Xi'}$ となる場合は，異なる力学系でありながら状態空間を共有し，軌道の空間も一対一に対応させることができる．このような状況にあるとき，Ξ と Ξ' はゲージ同値なハミルトン系とすることは妥当と考えられる．

このようにして得られたハミルトン系と不変イデアルから，基本的な以下の定理が得られる．

定理 3.1. Z_i を定義 *3.3* で定めた M_0 上で 0 になる写像とする．このとき

$$\begin{aligned}\{Z_i, H_\Xi\} = &-\frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial \xi^j}\{\Xi^j, H_\Xi\} - \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial q^j}\Xi^j + \frac{\partial L}{\partial q^i} \\ &+ Z_k \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial \xi^j}\{\Xi^j, \Xi^k\} + \{Z_i, \Xi^k\} \right)\end{aligned}$$

が成り立つ．ここに $\frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial \xi^j}$ 等は $\frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial \xi^j}(q, \Xi(q, p))$ の意味である．特に，$Z_i \in \mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{N}(\Xi)$ ゆえ，$\{Z_i, H_\Xi\} \subset \mathfrak{N}(\Xi)$ が成り立つから，

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial \xi^j}\{\Xi^j, H_\Xi\} + \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial q^j}\Xi^j - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad mod \, \mathfrak{N}(\Xi),$$

すなわち，方程式 *(13)* とあわせると，$\xi^i = \Xi(q,p)$ という変換の元，H_Ξ で定まるハミルトン系を $M(\Xi)$ に制限した軌道はオイラー・ラグランジュ方程式を満たす．

Proof. まず $\Psi_i(q,p) \equiv \Psi_i(q,\Xi(q,p))$ に関する幾つかの恒等式を準備する．Ψ_i の定義により，

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi_i}{\partial p_j} &= \frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{\partial L}{\partial \xi^i}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial \xi^k}\frac{\partial \Xi^k}{\partial p_j} \\ \frac{\partial \Psi_i}{\partial q^j} &= \frac{\partial}{\partial q^j}\left(\frac{\partial L}{\partial \xi^i}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial q^j} + \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial \xi^k}\frac{\partial \Xi^k}{\partial q^j}.\end{aligned} \tag{15}$$

また，$p_i - \Psi_i(q,p) = Z_i(q,p)$ の両辺を偏微分して

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi_i}{\partial p_j} &= \delta_i^j - \frac{\partial Z_i}{\partial p_j} \\ \frac{\partial \Psi_i}{\partial q^j} &= -\frac{\partial Z_i}{\partial q^j}\end{aligned} \tag{16}$$

が得られる．

正準方程式 (13), (14) を用いて

$$\begin{aligned}\{Z_i, H_\Xi\} =& \{p_i - \Psi_i(q,\Xi(q,p)), H_\Xi\} \\ =& \{p_i, H_\Xi\} - \frac{\partial \Psi_i}{\partial q^j}\{q^i, H_\Xi\} - \frac{\partial \Psi_i}{\partial p_j}\{p_j, H_\Xi\} \\ =& \left(\delta_i^j - \frac{\partial \Psi_i}{\partial p_j}\right)\left(\frac{\partial L}{\partial q^j} - Z_k\frac{\partial \Xi^k}{\partial q^j}\right) - \frac{\partial \Psi_i}{\partial q^j}\left(\Xi^j + Z_k\frac{\partial \Xi^k}{\partial p_j}\right) \\ =& \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial \Psi_i}{\partial q^j}\Xi^j - \frac{\partial \Psi_i}{\partial p_j}\frac{\partial L}{\partial q^j} \\ &+ Z_k\left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial p_j}\frac{\partial \Xi^k}{\partial q^j} - \frac{\partial \Psi_i}{\partial q^j}\frac{\partial \Xi^k}{\partial p_j} - \frac{\partial \Xi^k}{\partial q^i}\right) \\ =& \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial q^j}\Xi^j - \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial \xi^k}\left(\frac{\partial \Xi^k}{\partial q^j}\Xi^j + \frac{\partial \Xi^k}{\partial p_j}\frac{\partial L}{\partial q^j}\right) \\ &+ Z_k\left(\{Z_i, \Xi^k\}\right).\end{aligned}$$

最後の等式の変形には，二項目と三項目を (15) で，最後の項を (16) を用いた．最後の式の三項目を，

$$\begin{aligned}\{\Xi^k, H_\Xi\} &= \frac{\partial \Xi^k}{\partial q^j}\{q^j, H_\Xi\} + \frac{\partial \Xi^k}{\partial p_j}\{p_j, H_\Xi\} \\ &= \left(\frac{\partial \Xi^k}{\partial q^j}\Xi^j + \frac{\partial \Xi^k}{\partial p_j}\frac{\partial L}{\partial q^j}\right) + Z_l\left(\frac{\partial \Xi^k}{\partial q^j}\frac{\partial \Xi^j}{\partial p_j} - \frac{\partial \Xi^k}{\partial p_j}\frac{\partial \Xi^j}{\partial q^j}\right) \\ &= \left(\frac{\partial \Xi^k}{\partial q^j}\Xi^j + \frac{\partial \Xi^k}{\partial p_j}\frac{\partial L}{\partial q^j}\right) + Z_l\{\Xi^k, \Xi^l\}\end{aligned}$$

の関係式を用いて書き換えると，定理の等式が得られる．　□

この定理によって，もし $\mathfrak{N}(\Xi) \neq \emptyset$ となるような Ξ が存在すれば，任意の $(q_0, p_0) \in M(\Xi)$ を初期値とするハミルトニアン H_Ξ による軌道 (q_t, p_t) もまた $M(\Xi)$ に含まれ，$\xi_t = \Xi(q_t, p_t)$ によって TQ 内の曲線を定めれば，(q_t, ξ_t) がオイラー・ラグランジュ方程式の解となることがいえる．

またこの定理の系として，ラグランジュ系における一次拘束条件式 χ_s と不変イデアル $\mathfrak{N}(\Xi)$ との関係もいえる．

系 3.1. ラグランジュ系の一次拘束条件式を Ξ で変換したもの：

$$X_s(q, p) \equiv \chi_s(q, \Xi(q, p))$$

と定めれば，$X_s \in \mathfrak{N}(\Xi)$ が成り立つ．

Proof. 定理 3.1 の主張は，オイラー・ラグランジュ方程式を $\xi = \Xi(q, p)$ で変換したものは $\mathfrak{N}(\Xi)$ に含まれるということなので，それらの関数倍と和で得られる拘束条件式 X_s も $\mathfrak{N}(\Xi)$ に含まれる． □

3.2　$\mathfrak{N}$ の first class 部分イデアル

定義 3.8. $\mathfrak{N}$ を $C^\infty(T^*Q)$ のイデアルとする．$\phi \in C^\infty(T^*Q)$ が $\mathfrak{N}$-*first class* であるとは $\{\phi, \mathfrak{N}\} \subset \mathfrak{N}$ が成り立つことをいう．また

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{N}) = \{\phi \in C^\infty(T^*Q) | \phi \text{ is } \mathfrak{N}\text{-first class}\} \cap \mathfrak{N}$$

とおく．

注意 3.3. $\mathfrak{N}$ が H 不変であることはすなわち，H が $\mathfrak{N}$-*first class* を意味する．

命題 3.1. $\mathfrak{F}(\mathfrak{N})$ は $C^\infty(T^*Q)$ のイデアルかつ，ポアソン括弧に関して部分リー代数である．

Proof. 和について閉じることは明らか．$\phi \in \mathfrak{F}(\mathfrak{N}), u \in C^\infty(T^*Q)$ とすれば，ライプニッツ則により

$$\{u\phi, \mathfrak{N}\} \subset u\{\phi, \mathfrak{N}\} + \{u, \mathfrak{N}\}\phi \subset \mathfrak{N},$$

より $u\phi \in \mathfrak{F}(\mathfrak{N})$．また，$\phi_1, \phi_2 \in \mathfrak{F}(\mathfrak{N})$ とすれば，ヤコビ恒等式より

$$\begin{aligned}\{\{\phi_1, \phi_2\}, \mathfrak{N}\} &\subset \{\phi_1, \{\phi_2, \mathfrak{N}\}\} + \{\phi_2, \{\mathfrak{N}, \phi_1, \}\} \\ &\subset \{\phi_1, \mathfrak{N}\} + \{\phi_2, \mathfrak{N}\} \\ &\subset \mathfrak{N},\end{aligned}$$

より，$\{\phi_1, \phi_2\} \in \mathfrak{F}(\mathfrak{N})$． □

イデアルの共通部分はまたイデアルなので，$\mathfrak{N} \supset \mathfrak{N}_0$ に対しイデアル

$$\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}(\mathfrak{N}) \cap \mathfrak{N}_0$$

定義することができる．$\mathfrak{F}_0$ は一般に部分リー代数にはならないことに注意.

命題 3.2. $\mathfrak{N}_0$ を一次拘束イデアル，Ξ, Ξ' を正準共役運動量写像 Ψ の部分逆写像とし，$H_\Xi, H_{\Xi'}$ をそれぞれ対応するハミルトニアン，$\mathfrak{N}_\Xi, \mathfrak{N}_{\Xi'}$ を $\mathfrak{N}_0$ のそれぞれのハミルトニアンによる最小不変拡大とする．

このとき，

$$H_{\Xi'} - H_\Xi \in \mathfrak{F}_0$$

となるならば，$\mathfrak{N}_\Xi = \mathfrak{N}_{\Xi'}$ が成立する．

逆にもし $\mathfrak{N}_\Xi = \mathfrak{N}_{\Xi'}$ かつ $H_{\Xi'} - H_\Xi \in \mathfrak{N}_0$ であれば,

$$H_{\Xi'} - H_\Xi \in \mathfrak{F}_0.$$

が成り立つ．

Proof. $\phi = H_{\Xi'} - H_\Xi$ は $\mathfrak{N}_\Xi$-first class であることに注意して

$$\begin{aligned} \{H_{\Xi'}, \mathfrak{N}_\Xi\} &= \{H_\Xi + \phi, \mathfrak{N}_\Xi\} \\ &\subset \{H_\Xi, \mathfrak{N}_\Xi\} + \{\phi, \mathfrak{N}_\Xi\} \\ &\subset \mathfrak{N}_\Xi. \end{aligned}$$

よって，$\mathfrak{N}_\Xi$ は $H_{\Xi'}$ 不変な $\mathfrak{N}_0$ の拡大であるから，$\mathfrak{N}_{\Xi'} \subset \mathfrak{N}_\Xi$ が成り立つ．Ξ と Ξ' を入れ替えた議論も同様にできて，$\mathfrak{N}_\Xi \subset \mathfrak{N}_{\Xi'}$ も成り立つ．

逆は

$$\begin{aligned} \{H_{\Xi'} - H_\Xi, \mathfrak{N}_\Xi\} &\subset \{H_{\Xi'}, \mathfrak{N}_\Xi\} - \{H_\Xi, \mathfrak{N}_\Xi\} \\ &\subset \mathfrak{N}_\Xi + \mathfrak{N}_\Xi = \mathfrak{N}_\Xi. \end{aligned}$$

より $H_{\Xi'} - H_\Xi$ は $\mathfrak{N}_\Xi$-first class. □

4. 例

4.1 ξ について二次までのラグランジアン

ここで考える ξ について二次までのラグランジアンとは

$$L = \frac{1}{2} A_{ij} \xi^i \xi^j + B_i \xi^i + C \tag{17}$$

で表されるものである．ただし，A_{ij}, B_i, C をそれぞれ q のみに依存する n 次対称行列，ベクトル，スカラーとし，A_{ij} の階数は q によらず一定値 $r(< n)$ をとるものとする．

A_{ij} の（q に依存する）s 番目の固有ベクトルを e^i_s，固有値を $\mu(s)$ で表す：

$$A_{ij}e^j_s = \mu(s)\delta_{ij}e^j_s, \quad s = 1, 2, \ldots, n.$$

また，固有値が 0 である固有値，固有ベクトルの番号が $s = 1, \ldots, n - r$ になるように並べておく．

このラグランジアンに対するオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\dot{q}^i = \xi^i, \tag{18}$$

$$A_{ij}\dot{\xi}^j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial A_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial A_{ij}}{\partial q^k}\right)\xi^j\xi^k + \left(\frac{\partial B_j}{\partial q^i} - \frac{\partial B_i}{\partial q^j}\right)\xi^j + \frac{\partial C}{\partial q^i}(= f_i \text{とおく}), \tag{19}$$

のように表される．

ラグランジュ形式の一次拘束条件式

式 (19) の両辺に 0 固有ベクトル $e^i_s, s = 1, \ldots, n - r$ を乗ずれば

$$0 = f_i e^i_s (= \chi(q, \xi)_s \text{とおく})$$

を得る．この式はオイラー・ラグランジュ方程式から直接導かれる TQ 上の関係式であるから，ラグランジュ系の軌道に対する拘束条件である．

ラグランジュ系の時間発展の任意性

$\chi_s = 0$ を満たす (q, ξ) 上で，式 (19) は $\dot{\xi}$ について解くことができる：

$$\dot{\xi}^i = F^i + \sum_{s=1}^{n-r} v^s e^i_s,$$

ここに F^i は方程式 $A_{ij}x^j = f_i$ の特解，v^s は (q, ξ) の任意関数である．すなわち ξ の時間発展が v^s の選択に依存して決定されることを意味し，ラグランジュ系は相異なる微分力学系を同時に含むことになる．

正準共役運動量写像と部分逆写像

正準共役運動量写像は

$$\Psi_i(q, \xi) = \frac{\partial L}{\partial \xi^i} = A_{ij}\xi^j + B_i.$$

次に一次拘束面 M_0 を決定する．$(q, p) \in M_0$ とすれば，ある ξ が存在して $p_i = A_{ij}\xi^j + B_i$，すなわち $p_i - B_i = A_{ij}\xi^j$ であるから，$p_i - B_i$ は行列 A_{ij} の像に一致することが分かる．A_{ij} は対称行列であるから，これは A_{ij} の核の直交補空間に等しい．よって，$\phi_s(q, p) = (p_i - B_i)e^i_s$ とおけば，一次拘束面は

$$M_0 = \{(q, p) | \phi_s = 0, s = 1, \ldots, n - r\}$$

となることが分かる．

注意 4.1. この例において，M_0 は各 q 上にアフィン空間（部分ベクトル空間の原点をずらした空間）であるので，式 $\phi_s = 0$ は M_0 を定める式，すなわち拘束条件式であることが直ちにわかる．また，拘束イデアル $\mathfrak{N}_0$ は ϕ_s で生成されることも直ちに分かる．

Ψ の部分逆写像 $\Xi(q,p)$ を構成する．そのために適当な $Z_i \in \mathfrak{N}_0$ が存在して

$$p_i - (A_{ij}\Xi^j + B_i) = Z_i$$

が成り立っていると仮定すると，

$$A_{ij}\Xi^j = (p_i - B_i) - Z_i \tag{20}$$

となるので，この右辺は $e^i_s, s = 1, \ldots, n-r$ に直交しなけらばならない．よって Z_i は

$$Z_i e^i_s = \phi_s, \quad s = 1, \ldots, n-r$$

を満たす．このような Z_i の一つの選択として

$$Z_i = \delta_{ij} \sum_{s=1}^{n-r} e^j_s \phi_s$$

をとることができる．このとき方程式 (20) を Ξ について解くことができて，その一般解は

$$\Xi^i = \tilde{A}^{ij}(p_j - B_j) + \sum_{s=1}^{n-r} u^s e^i_s \tag{21}$$

で与えられる．ここで u^s は (q,p) の任意関数で，

$$\tilde{A}^{ij} = \sum_{s=n-r+1}^{n} \mu(s)^{-1} e^i_s e^j_s$$

とおいた．

注意 4.2. Z_i の選択は一意ではない，例えば $e^i_s, s = n-r+1, \ldots, n$ に比例し，M_0 で 0 になるような任意の関数を加えることが可能である．それぞれの Z_i に対応して Ξ^i も定まり，それらは一般に相異なる写像になる．

<u>ハミルトニアン H_Ξ</u>

部分逆写像 (21) に関するハミルトニアンは

$$
\begin{aligned}
H_\Xi(q,p) =& p_i \Xi^j - L(q,\Xi) \\
=& p_i \left(\tilde{A}^{ij}(p_j - B_j) + \sum_{s=1}^{n-r} u^s e_s^i \right) \\
& - \frac{1}{2} A_{ij} \left(\tilde{A}^{ik}(p_k - B_k) + \sum_{s=1}^{n-r} u^s e_s^i \right) \left(\tilde{A}^{jl}(p_l - B_l) + \sum_{t=1}^{n-r} u^t e_t^j \right) \\
& - B_i \left(\tilde{A}^{ij}(p_j - B_j) + \sum_{s=1}^{n-r} u^s e_s^i \right) - C \\
=& \frac{1}{2} \tilde{A}^{ij}(p_i - B_i)(p_j - B_j) - C + \sum_{s=1}^{n-r} u^s \phi_s
\end{aligned}
$$

この例では部分逆写像の選択の差によるハミルトニアンの違いはちょうど一次拘束イデアルの元だけであることが分かる．

注意 4.3. この計算では Z_i の選択の違いによる Ξ の任意性を調べていない．しかし，多少面倒であるがハミルトニアンの違いは一次拘束イデアルだけであることも証明できる．

4.2　Frenkel の力学系

Frenkel の力学系 [4]

$$
L = \xi^1(\xi^3)^2 - \frac{1}{2} q^2 (q^3)^2.
$$

は様々に奇妙な振る舞いをする興味深い力学系である．

- オイラー・ラグランジュ方程式：

$$
\begin{aligned}
\dot{q}^i &= \xi^i \\
2\xi^3 \dot{\xi}^3 &= 0 \\
0 &= -\frac{1}{2}(q^3)^2 \\
2(\dot{\xi}^1 \xi^3 + \xi^1 \dot{\xi}^3) &= -q^2 q^3
\end{aligned}
$$

- 解：(u^1, u^2 を任意関数として)

$$
\begin{aligned}
q^1 &= u^1 \\
q^2 &= u^2 \\
q^3 &= 0
\end{aligned}
$$

この系に対するハミルトン系を我々の手法を利用して構成する：

1. 正準共役運動量：

$$\Psi_1 = (\xi^3)^2$$
$$\Psi_2 = 0$$
$$\Psi_3 = 2\xi^1\xi^3.$$

よって，この力学系は ξ の値によってヘス行列のランクが変化する．本論文においては，ヘス行列のランクが一定であることを仮定した議論であったので，本来この系に対して適用できないのであるが，ξ が generic な値，すなわちランクが 2 となる $\xi^3 \neq 0$，$\xi^1 \neq \xi^3$ に限定した TQ 上の力学系として適用させてみる．

2. 一次拘束面：$p_1 > 0, p_2 = 0$.
3. 拘束条件式：$\phi(q,p) = p_2$.（$\mathfrak{N}_0 = \langle p_2 \rangle$, i.e. p_2 で生成されるイデアル）
4. Ξ: 平方根を取る際に分岐が生ずることに注意して

$$\Xi^1_+ = p_3/(2\sqrt{p_1}) \qquad \Xi^1_- = -p_3/(2\sqrt{p_1})$$
$$\Xi^2_+ = u \qquad \Xi^2_- = v$$
$$\Xi^3_+ = \sqrt{p_1} \qquad \Xi^3_- = -\sqrt{p_1}$$

5. ハミルトニアン

$$H_{\Xi_+} = +\sqrt{p_1}p_3 + \frac{1}{2}q^2(q^3)^2 + up_2$$
$$H_{\Xi_-} = -\sqrt{p_1}p_3 + \frac{1}{2}q^2(q^3)^2 + vp_2$$

ゆえに，$H_{\Xi_+} - H_{\Xi_-} = 2\sqrt{p_1}p_3 + (u-v)p_2$．よってハミルトニアンの差が一次拘束にならない例である．これは部分逆写像を取る際に分岐が出る場合常に起こりうる現象である．

6. H_{Ξ_+} に関する正準方程式（等式は mod $\mathfrak{N}_0$）

$$\dot{q}^1 = \frac{p_3}{2\sqrt{p_1}} \qquad \dot{p}_1 = 0$$
$$\dot{q}^2 = u \qquad \dot{p}_2 = -\frac{1}{2}(q^3)^2$$
$$\dot{q}^3 = \sqrt{p_1} \qquad \dot{p}_3 = -q^2q^3$$

これより $\mathfrak{N}_0$ の H_{Ξ_+} 不変拡大 $\mathfrak{N} = \langle p_2, p_1, q_3 \rangle$ となってしまうが，条件 $p_1 = 0$ は最初の方程式の意味を失わせる（ill-defined な方程式になる）．これを回避するために，$p_3 = 0$ を拘束条件として「手でいれて」しまうと，方程式 (mod $\mathfrak{N} = \langle p_1, p_2, p_3, q_3 \rangle$) は

$$\dot{q}^1 = 0, \quad \dot{q}^2 = u$$

で，解は $q^1 = 0, q^2 =$（任意関数）となる．すなわちオイラー・ラグランジュ方程式の解の一部だけを再現している．

ここまでの議論では，我々の手法があまりうまく適用できていないように見えるが，この系の場合は次のような「再考」をするべきである．

まず，オイラー・ラグランジュの方程式の解によると，$\xi^3 = 0$ であるので，解曲線の族に制限してしまうと正準運動量写像は零写像になることに注意する．すなわち，方程式だけでなく解にまで注意するとヘス行列の「generic」なランクは 0 にすべきとなる．そこで速度位相空間を $\xi^3 = 0$ に制限して部分逆写像を与えてみる：

1. 正準運動量写像：

$$\Psi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

2. 一次拘束面：

$$p_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

3. 拘束条件式：

$$\phi_i = p_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\mathfrak{R}_0 = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle)$$

4. Ξ:（u^i を任意関数として）

$$\Xi^i = u^i, \quad i = 1, 2 \qquad \Xi^3 = 0$$

5. ハミルトニアン：

$$H_\Xi = p_1 u^1 + p_2 u^2 + \frac{1}{2} q^2 (q^3)^2$$

（最初の正準ハミルトニアンに p_1 を一次拘束条件として加えた形になっている）

6. H_Ξ に関する正準方程式：（等式は mod $\mathfrak{R}_0$）

$$\begin{aligned} \dot{q}^1 &= u^1 & \dot{p}_1 &= 0 \\ \dot{q}^2 &= u^2 & \dot{p}_2 &= -\frac{1}{2}(q^3)^2 \\ \dot{q}^3 &= 0 & \dot{p}_3 &= -q^2 q^3 \end{aligned}$$

これより $\mathfrak{R}_0$ の H_Ξ 不変拡大は，$\mathfrak{R} = \langle p_1, p_2, p_3, q_3 \rangle$ のようになる．この $\mathfrak{R}$ のもとで正準方程式は

$$\dot{q}^1 = u^1, \quad \dot{q}^2 = u^2$$

となり，この場合はオイラー・ラグランジュ方程式の解全てを再現できる．

この例は，ヘス行列のランクが一定でない場合は，各々のランクを取る TQ の部分に応じて部分逆写像を考える必要があることを示唆しているように思われる．

5.　結論および今後の課題

本論文で与えた方法によって，与えられたラグランジュ系の解を再現するようなハミルトン系の構成が可能であることが示された．また，対応するハミルトニアンは一意的でないが，解空間が一致するようなハミルトニアンは一類拘束の差で一致することが示され，ゲージ同値なハミルトン系の特徴づけになっていることが示された．

課題としては，まず逆の対応，すなわち任意にラグランジュ系の解を与えたときにそれを再現するハミルトン系の存在が証明されていないことである．この問題の難しさは，われわれの手法によって許されるハミルトニアンの形 H_Ξ の自由度と，オイラー・ラグランジュ方程式の自由度，即ち (10) における v^s の選択とが，明らかな形で一対一に対応していないことに起因している．この問題の解決のためには，部分逆写像 Ξ の選択の自由度について，より詳細な研究が必要であると思われる．

また，我々の手法において最小な H-不変拡大の存在が重要な役割を果たすが，この実用的な構成方法を与えることはできておらず，現在のところ Dirac による 2 次拘束条件の構成後に，それが最小拡大になっているかどうかを個別に検証するにとどまっている．これは Dirac の処方がどこまで有効であるのかということに深く結びついているので，更に研究を進めるべきである．

参　考　文　献

[1]　P. A. M. Dirac, Can. J. Math., **2** (1950), 129–148.
[2]　木村利栄，菅野礼司，微分形式による解析力学，吉岡書店，(1996).
[3]　菅野礼司，ゲージ理論の解析力学，吉岡書店，(2007).
[4]　A. Frenkel, Phys. Rev., **D21** (1980), 2986.

A construction of the Hamilton system reproducing a singular Lagrange system

Kentaro HAMACHI

Abstract

We present some problems of the method given by Dirac to construct a Hamilton system that is equivalent to a given singular Lagrange system. We give the method as a reformation of this 'Dirac's recipe' to settle these problems definitely. We give the proof that the solutions of given Euler-Lagrange equations are obtained from the solutions of the Hamilton system by this new method.

Keywords: singular Lagrangian, constraint mechanics, Hamilton system, Dirac's recipe, ideal of constraints