

水平対称性のゲージ場理論におけるディラック型の 質量行列およびフレーバー混合の研究

小 西 康 文

(平成 21 年 9 月 24 日提出
平成 21 年 12 月 15 日修正
平成 22 年 1 月 15 日再修正)

要 旨

垂直対称性および水平対称性に基づいたゲージ場理論の枠組みのもと導出されたディラック型の質量行列を考察する．この水平対称性はパウリ代数の中心拡大から生成される．2 段階にわたる対称性の破れは，南部・ゴールドストーンボソンやタキオンといった非物理的なモードが現れない様に構成され，ワインバーグ・サラム理論の全ての結果を再現する．質量行列は荷電フェルミオンの質量およびクォークのフレーバー混合行列の観測データを再現するのに十分な数のパラメータを持つ．数値解析により決定されたパラメータ値を使うことで，湯川結合定数の間にいくつかの経験的な関係が見つかる．この理論が持つ 1 つの特異な特徴として，アップおよびダウンクォークセクターに対する 2 乗質量固有値の中に異なる順序が見つけられる．結果として，ダウンクォークセクターに対する質量行列はカピボ角を表わすのに適した構造を持つ．

キーワード：水平対称性，パウリ代数の中心拡大，ディラック型の質量行列，フレーバー混合行列，湯川相互作用．

1. 序論

重力を除いた全ての相互作用は，繰り込み可能なゲージ場の量子論により記述される [1, 2, 3]．具体的に，電磁相互作用と弱い相互作用を統一的に記述することに成功したワインバーグ・サラム (WS) 理論 [4, 5, 6] は群 $SU_L(2) \times U_Y(1)$ をゲージ対称性とするゲージ理論であり，強い相互作用を記述する量子色力学 (QCD) [7, 8, 9, 10, 11] は，群 $SU_c(3)$ のカラー対称性を持つ非可換ゲージ理論である．リー群 $G_V = SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$ を持つ垂直対称性 (V 対称性) のゲージ場理論で定式化された標準モデル (SM) は，実験室における実験結果を矛盾することなく説明できる．

しかしながら，こうした SM の成功にも関わらず，素粒子理論には未だに解かれていない多くの問題が残されている．例えば，なぜクォークやレプトンは 3 世代 [12] という形態で存在し，それらが階層的な構造を持つ特徴的な質量スペクトルとなっているのか，といったことがまだ明らかになっていないのである．SM は湯川相互作用のパターンに，制限を与える原理を持つ

ていない．この様な未開の領域はフレーバー物理として知られている [13, 14]．

フレーバー物理の問題に対する一つのアプローチとして、左巻きおよび右巻きフェルミオン場の基底を調節することにより、テクスチャーゼロと呼ばれるゼロ構造を持つある特定の形の質量行列を考察する方法がある．ゼロ構造を有するこの質量行列の研究として、エルミート型の質量行列 [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23] や最近接相互作用 (NNI) 基底による非エルミート型の質量行列 [24, 25, 26] が知られている．こうした考えの多くは、その中に含まれるパラメータのいくつかに仮定を置くことで、フレーバー混合行列の各成分がフェルミオン質量を用いて近似的に導出される．実際の観測結果を良い近似で再現できる様なテクスチャーゼロを持つ質量行列の構造として、今までに多くの形が提案されている．実験結果が蓄積され誤差範囲が小さくなるにつれ、これらの質量行列の形は実験に合う様ないくつかの形に絞られてきている [23, 16]．しかしながら、パラメータ数を抑えるために課された仮定に対して、理論的な裏付けを持つものは少ない．

フレーバー物理に関する他のアプローチは、世代方向に新しい対称性を課すことである．この対称性は V 対称性に対して、水平対称性と呼ばれている．水平対称性は標準モデルの中に現れる未知のパラメータの間に関係を与えるものとして大変有効である．水平対称性の研究は、大別し不連続対称性と連続対称性に分類される．

よく知られた不連続対称性としては、 $S_{3L} \times S_{3R}$ 対称性に基づくフレーバーデモクラシーによる考察が挙げられる [27, 28, 29]．各成分に同じ値を持つデモクラティック行列は、3つの世代の入れ替えにおいて不変である．3世代のフェルミオン質量の大きさは階層的になっており、3世代目の質量は他の2世代に比べはるかに大きな質量を持つことが知られている．デモクラティック行列は対角化することにより1成分にのみ値を持つので、この性質を利用することで第3世代に大きな値を持たせることが可能となる．その他にも多くの不連続対称性が存在し、水平対称性を特定することは困難である．

水平対称性に連続対称性を用いた議論は、主に $U(1)$ [30] および $SU(2)$ [31, 32, 33], $SU(3)$ [34, 35, 36] に限られている．フレーバー混合行列 (FMM) の値はもちろんのこと、南部・ゴールドストーン (NG) 粒子の問題 [37, 38, 39] やフレーバーを交換する中性カレント (FCNC), 量子異常など、一般的に多くのことが考慮されなければならない．

曾我見により定式化された水平 (H) 対称性のゲージ場理論も連続対称性の1つである [40]．この論文では従来の水平対称性と区別するため H 対称性と記述する．この H 対称性のゲージ場理論では基本的に次の様な考えをとる．大統一理論のスケールを越えることのない高エネルギースケール Λ 以上において、3世代のクォークやレプトンは厳密に H 対称性に従い、その基本表現に属していると仮定する．低エネルギーでは、それらクォークやレプトンは個々に実験により確かめられている形で存在していると考えるのである．H 対称性は、単純リー代数 $\mathfrak{su}(2)$ と $\mathfrak{su}(3)$ の間の中間的な代数によって生成されたリー群によって実現されると想定する．その

様な代数に対する可能な候補として、本論文では論文 [41, 42] でフレーバー混合行列 [12, 43] を特徴づけるのに適用されたパウリ代数の中心拡大 $\tilde{\mathcal{A}}$ を採用する．3 つの独立な 2×2 行列からなるパウリ代数に対して、新しい代数 $\tilde{\mathcal{A}}$ は 4 つの独立な 3×3 行列から構成される．この代数 $\tilde{\mathcal{A}}$ から生成されたリー群 $\tilde{G}(\tilde{\mathcal{A}})$ がフレーバー物理の基本的な枠組みを決定し、水平対称性の群 G_H を具体化するという立場をとる．

H 対称性の新しいゲージ場理論は、NG ボソンやタキオンといった非物理的モードが現れることなしに、SM の全ての結果を再現しなければならないことが要求される．さらに、その新しい理論は SM を越えたいくつかの観測可能な結果を预言すべきである．その様な目的を達成するために、電弱 (EW) 対称性および H 対称性は、互いの関連性を考慮しつつ、組み合わせられ、そして壊されなければならない．V 対称性に対するゲージ場に加え、新しい理論は、代数 $\tilde{\mathcal{A}}$ の 4 つの独立な生成子によって生成される H 対称性の 3 重項および 1 重項を要求する．SM の EW スカラー 2 重項の代わりに、ここでの定式化においては、2 種類の H 対称性のスカラー 3 重項 $\tilde{\Phi}(x)$ および $\Phi(x)$ が存在すると仮定する．3 つの複素 EW1 重項から成るスカラー 3 重項 $\tilde{\Phi}(x)$ は右巻き 3 重項のニュートリノとのマジョラナ相互作用を引き起こし、3 つの EW2 重項から成る 3 重項 $\Phi(x)$ はフェルミオン 3 重項間の湯川相互作用をもたらす．

この定式化による対称性の破れに関しては、H 対称性と EW 対称性はそれぞれ高エネルギースケール $\tilde{\Lambda}$ および低エネルギースケール Λ の 2 つの段階を経て破られる．ここで、低エネルギーの現象論に対する有効理論を定式化するために、対称性の破れの新しい複合機構を展開する．はじめに、対称性の部分的な破れのスケールを、3 重項 $\tilde{\Phi}(x)$ ($\Phi(x)$) に対するヒッグスポテンシャルの局所的な安定点を見つけることによって暫定的に固定する．次に、3 重項 $\tilde{\Phi}(x)$ ($\Phi(x)$) の展開式において含まれる可能な自由度を使い切ることで残りの対称性を破り、成分場の非物理的なモードの出現を抑える．

高エネルギースケール $\tilde{\Lambda}$ スケールでは、全ての H ゲージ場が超重量質量を持つベクトル場へ移り、ニュートリノがマジョラナ質量を獲得する様に 3 重項 $\tilde{\Phi}(x)$ は H 対称性を破る．すなわち、この 3 重項は単にニュートリノのみと相互作用するスカラー場である．

低エネルギースケールで EW 対称性を破る 3 重項 $\Phi(x)$ は WS 理論の全ての結果を再導出する．この対称性の破れを通して導出されたフェルミオン場に対するディラック型の質量行列は、質量の階層性を説明するのに有効なデモクラティック行列 [27] を含み、エルミート行列でない独自の形を持つ行列となる．また、各セクターでの湯川相互結合定数の数は、標準理論での未知数に対して $4/9$ へと減少する．

クォークに対するこの質量行列から質量固有値を導き弱混合行列を表わす際、アップとダウンのそれぞれのクォークセクターに 4 つの複素数として導入された湯川結合定数に対する自由度は、10 個の実パラメータとしてまとめられる．通常、水平対称性が課された質量行列が、観測されている FMM の値を再現するには多くの困難が生じる [45]．しかしながら、この質量

行列は、アップクォークとチャームクォークの質量に関する解釈に注意を払うことで、クォーク質量や弱混合行列に関する実験データ [44] を制限範囲内で再現できる。数値解析を行うことにより得られるパラメータの値から、湯川結合定数の大きさの間にいくつかの関係が見出される [46]。

次の 2 節では、FMM とクォーク質量スペクトルの関係を現在の観測結果とともに紹介する。3 節では、フレーバー物理学において今までに行われてきた研究の中で、FMM を観測結果をより良く説明できるクォークの質量行列を紹介する。4 節では、論文 [41] で発展させた代数 $\check{\mathcal{A}}$ および関連する群 $\check{G}(\check{\mathcal{A}})$ による H 対称性について考察する。V および H 対称性のゲージ場理論を定式化するのに必要なボソン場を 5 節で調べる。この理論のラグランジュ密度は、それら対称性の不変性から明確に作り上げられることを 6 節でみる。7 節では、非物理的なモードが対称性の破れる相において現れない様に、スカラー 3 重項の展開式の中に含まれる自由度の取扱い方について議論する。高エネルギースケール Λ での H 対称性の破れを 8 節で調べ、低エネルギースケール Λ での EW 対称性の破れを 9 節で解析する。10 節では、ディラック型の質量行列から実験結果を再現できる様なパラメータについて調査を行う。11 節でこの理論の定式化および質量行列の性質を議論し、未解決の問題を指摘する。一般の質量行列に関する変形やスカラー 3 重項の EW および H 不変量の間の恒等式に関する解析は付録で行う。

2. フレーバー混合行列とクォーク質量スペクトルの関係

弱い相互作用の中で、 W^+ および W^- を媒介とする相互作用は荷電弱カレント

$$J_W^{\mu+} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\Psi}_L^\nu \gamma^\mu \Psi_L^e + \bar{\Psi}_L^\mu \gamma^\mu \Psi_L^d), \quad J_W^{\mu-} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\Psi}_L^e \gamma^\mu \Psi_L^\nu + \bar{\Psi}_L^d \gamma^\mu \Psi_L^\mu) \quad (1)$$

を通して行われる。この弱基底状態 Ψ_L^f においてラグランジュ密度の湯川相互作用部分は

$$\mathcal{L}_M^Y = \sum_{f=u,d,s,e} \bar{\Psi}_L^f M_f \Psi_R^f + \text{h.c.} \quad (2)$$

と記述される。ここで、質量行列 M_f は、一般的に対角行列ではない。この質量行列は弱基底状態から質量基底状態へのユニタリ変換

$$\Psi_h^u = U_h^u u_h, \quad \Psi_h^d = U_h^d d_h \quad (h = L, R) \quad (3)$$

により対角化され、荷電弱カレントは

$$J_W^{\mu+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}_L^i \gamma^\mu (U_L^{u\dagger} U_L^d)^{ij} d_L^j \quad (4)$$

と表わせる。この中に現れる行列

$$V = U_L^{u\dagger} U_L^d \quad (5)$$

がフレーバー混合行列である．クォークの持つ位相の自由度を使うことにより，この 3×3 ユニタリ行列が 3 つの混合角と 1 つの位相で表わせることから，小林・益川は CP の破れの原因を説明した [12]．CKM 行列として知られるこの行列にはいくつかの異なる表現があるが，現在 Particle Data Group(PDG) [44] により採用されている形は

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\theta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}s_{13} \end{pmatrix} \quad (6)$$

である．ここで $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ ， $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ とする．実験的には

$$s_{13} \ll s_{23} \ll s_{12} \ll 1 \quad (7)$$

という関係がわかっている．また 1-2 成分の混合角はカビボ角として知られており [43]，近似的に関係式

$$s_{12}c_{13} \simeq \theta_C = \lambda \quad (8)$$

が成り立っている．Wolfenstein はカビボ角によるオーダーでフレーバー混合行列を持つ階層性を

$$V_W = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

と表わした [47]．CP 位相を測る量としては再位相不変量がある [48]．これは Jarlskog 不変量として知られており，様々な表現が存在する．その 1 つの例として

$$J = \text{Im}(V_{us}V_{cb}V_{ub}^*V_{cs}^*) \quad (10)$$

が挙げられる．これらの値は現在小さな誤差の範囲で決定されており，混合行列の各成分の大きさは

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 0.97419 \pm 0.00022 & 0.2257 \pm 0.0010 & 0.00359 \pm 0.00016 \\ 0.2256 \pm 0.0010 & 0.97334 \pm 0.00023 & 0.0415^{+0.0010}_{-0.0011} \\ 0.00874^{+0.00026}_{-0.00037} & 0.0407 \pm 0.0010 & 0.999133^{+0.000044}_{-0.000043} \end{pmatrix} \quad (11)$$

であり，Jarlskog 不変量は

$$J = (3.05^{+0.19}_{-0.20}) \times 10^{-5} \quad (12)$$

にまで制限されている [44]．

物理的に意味のある方法で，異なるクォーク質量の大きさを得るためには，同じ繰り込み手

法のもと同じエネルギースケールで全てのクォーク質量を記述しなければならない．ここで用いているクォーク質量は， \overline{MS} スキームによる繰り込み群方程式を使って計算された Z ボソンのエネルギースケール $m_Z = 91.2 \text{ GeV}$ での値

$$\begin{aligned} m_u &= 1.27^{+0.50}_{-0.42} \text{ MeV}, & m_c &= 0.619 \pm 0.084 \text{ GeV}, & m_t &= 171.7 \pm 3.0 \text{ GeV}, \\ m_d &= 2.90^{+1.24}_{-1.19} \text{ MeV}, & m_s &= 55^{+16}_{-15} \text{ MeV}, & m_b &= 2.89 \pm 0.09 \text{ GeV}, \end{aligned} \quad (13)$$

を使用する [49, 50]．荷電レプトンに対しても同様に， $m_Z = 91.2 \text{ GeV}$ のエネルギースケールでの各質量の値は

$$m_e = 0.486570 \text{ MeV}, \quad m_\mu = 102.718138 \text{ MeV}, \quad m_\tau = 1746.248815 \text{ MeV} \quad (14)$$

と計算されている．

これらクォークの質量値と混合行列のカビボ角の間に

$$\lambda \sim \sqrt{\frac{m_d}{m_s}} \quad (15)$$

という関係が成り立つことは以前から指摘されてきた [51, 52, 53]．次節で記述する様に，フレーバー物理における FMM の値を調べる際には，この関係式が中心的な役割を果たしてきた．

3. クォークの質量行列とフレーバー混合行列

カビボ角とクォーク質量の関係 (15) が導き出される様な質量行列の構造として，湯川結合項のフェルミオン場の基底を調節することにより得られるエルミート型の質量行列と NNI 基底に基づいた非エルミート型の質量行列などが挙げられる．ここではゼロ構造を持つ質量行列として，この2つのタイプの質量行列を見る．さらに，フレーバー物理における対称性をを用いた議論を紹介する．

3.1 エルミート型の質量行列

関係式 (15) を導ける質量行列の1つとして Fritzsch 型として知られているものがある．ある一般的な質量行列 M_f は，エルミート行列とユニタリ行列の積で表わせるため，右巻き成分の弱基底状態を適当にとることでエルミート行列に変換できる [17]．さらに観測量 (5) に影響を与えることなしに，アップクォークセクターおよびダウンクォークセクターの質量行列に対して共通のユニタリ変換 $S M_f S^\dagger$ を行うことで

$$M_f = \begin{pmatrix} E_f & A_f & 0 \\ A_f^* & D_f & B_f \\ 0 & B_f^* & C_f \end{pmatrix}, \quad (f = u, d) \quad (16)$$

と変形できる [16] .

このエルミート行列は $M_{u13} = M_{u31} = 0$ と $M_{d13} = M_{d31} = 0$ 部分に合計で 2 つのゼロ構造を持つが, さらにそれぞれのセクターに 2 つのゼロ構造を加えた質量行列を, 合計して 6 つのテクスチャーゼロを持つ質量行列という. 特に, $M_{u11} = 0$ および $M_{d11} = 0, M_{u22} = 0, M_{d22} = 0$ にゼロ構造を持たせた質量行列

$$M_{Hf} = \begin{pmatrix} 0 & A_f & 0 \\ A_f^* & 0 & B_f \\ 0 & B_f^* & C_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & |A_f|e^{i\phi_A} & 0 \\ |A_f|e^{-i\phi_A} & 0 & |B_f|e^{i\phi_B} \\ 0 & |B_f|e^{-i\phi_B} & C_f \end{pmatrix} \quad (17)$$

は Fritzsch 型の質量行列と呼ばれている [15] .

この質量行列は対角行列

$$P = \begin{pmatrix} e^{i\phi_A} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_B} \end{pmatrix} \quad (18)$$

を導入することで

$$PM_{Hf}P^\dagger = M'_{Hf} = \begin{pmatrix} 0 & |A_f| & 0 \\ |A_f| & 0 & |B_f| \\ 0 & |B_f| & C_f \end{pmatrix} \quad (19)$$

と書き直せる. この行列の固有値は関係式

$$\begin{aligned} \lambda_{f1} + \lambda_{f2} + \lambda_{f3} &= |C_f|, \\ \lambda_{f1}\lambda_{f2} + \lambda_{f2}\lambda_{f3} + \lambda_{f3}\lambda_{f1} &= -(|A_f|^2 + |B_f|^2), \\ \lambda_{f1}\lambda_{f2}\lambda_{f3} &= -|A_f|^2|C_f|, \end{aligned} \quad (20)$$

を満たす. 結果として得られるフレーバー混合行列の各成分の大きさは

$$\begin{aligned} |V_{\alpha\beta}| &= \frac{1}{(\lambda_a - \lambda_b)(\lambda_a - \lambda_c)(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)(\lambda_\alpha - \lambda_\gamma)} \\ &\times [(|A_u|^2 + \lambda_b\lambda_c)(|A_d|^2 + \lambda_\beta\lambda_\gamma) \\ &+ 2|A_u||A_d||B_u||B_d|\cos(\phi_A + \phi_B) \\ &+ \{|B_u|^2 + (\lambda_a + \lambda_b)(\lambda_a + \lambda_c)\}\{|B_d|^2 + (\lambda_\alpha + \lambda_\beta)(\lambda_\alpha + \lambda_\gamma)\} \\ &+ 2|A_u||A_d|(\lambda_a - |C_u|)(\lambda_\alpha - |C_d|)\cos\phi_A \\ &+ 2|B_u||B_d|\lambda_a\lambda_\alpha\cos\phi_B \\ &+ (|A_u|^2 + |B_u|^2 + \lambda_b\lambda_c)(|A_d|^2 + |B_d|^2 + \lambda_\beta\lambda_\gamma)] \end{aligned} \quad (21)$$

とまとめて記述できる．ここで (a, b, c) は $(u1, u2, u3)$, (α, β, γ) は $(d1, d2, d3)$ のいずれかをとるものとする．関係式 (20) を満たす様に各固有値に対してクォーク質量を

$$(\lambda_{f1}, \lambda_{f2}, \lambda_{f3}) = (m_{f1}, -m_{f2}, m_{f3}) \quad (22)$$

と割り当てる．ここで

$$\begin{aligned} m_{u1} &= m_u, & m_{u2} &= m_c, & m_{u3} &= m_t, \\ m_{d1} &= m_d, & m_{d2} &= m_s, & m_{d3} &= m_b, \end{aligned} \quad (23)$$

とする．この時，混合行列の 1-2 成分は近似的に

$$|V_{u1d2}| = |V_{us}| \sim \left| \sqrt{\frac{m_u}{m_c}} - \sqrt{\frac{m_d}{m_s}} e^{-i\phi_A} \right| \quad (24)$$

と表わせる．上式の第 1 項は近似的に無視できるので，(15) の関係が成り立つ．しかしながら 2-3 成分

$$|V_{u2d3}| = |V_{cb}| \sim \left| \sqrt{\frac{m_s}{m_b}} - \sqrt{\frac{m_c}{m_t}} e^{i\phi_B} \right| \quad (25)$$

から，トップクォークの質量が

$$m_t \leq \frac{m_c}{\left(\sqrt{\frac{m_s}{m_b}} - |V_{cb}| \right)^2} \sim 90 \text{ GeV} \quad (26)$$

と制限されることになり，このモデルでは実験結果を再現できない [18, 19] ．

この困難を避けるための 1 つの方法として，2-2 成分に値を持たした 4 つのテクスチャーゼロを持つ質量行列

$$M_f = \begin{pmatrix} 0 & A_f & 0 \\ A_f^* & D_f & B_f \\ 0 & B_f^* & C_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & |A_f|e^{i\phi_A} & 0 \\ |A_f|e^{-i\phi_A} & D_f & |B_f|e^{i\phi_B} \\ 0 & |B_f|e^{-i\phi_B} & C_f \end{pmatrix} \quad (27)$$

が提案されている [20, 21, 22] ．この拡張された Fritzsch 型の質量行列も同じ方法で固有値の関係

$$\begin{aligned} \lambda_{f1} + \lambda_{f2} + \lambda_{f3} &= |C_f| + |D_f|, \\ \lambda_{f1}\lambda_{f2} + \lambda_{f2}\lambda_{f3} + \lambda_{f3}\lambda_{f1} &= -(|A_f|^2 + |B_f|^2) + |C_f||D_f|, \\ \lambda_{f1}\lambda_{f2}\lambda_{f3} &= -|A_f|^2|C_f|, \end{aligned} \quad (28)$$

が得られる．この固有値に対してクォーク質量を (22) と同様に割り当て， D の値を

$$0 \leq D_f \leq m_{f2} \ll C_f \quad (29)$$

と想定することで，それぞれの成分は

$$|A_f| \approx \sqrt{m_{f1}m_{f2}}, \quad |B_f| \approx \sqrt{(m_{f2} + D_f)m_{f3}}, \quad C_f \approx m_{f3} \quad (30)$$

と表わせる．このとき，近似的に混合行列は

$$V \approx \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{\frac{m_d}{m_s}} + \sqrt{\frac{m_u}{m_c}} e^{i\phi_1} & \sqrt{\frac{m_u}{m_c}} e^{i\phi_1} (\gamma_d - \gamma_u e^{i\phi_2}) \\ -\sqrt{\frac{m_u}{m_c}} + \sqrt{\frac{m_d}{m_s}} e^{i\phi_1} & e^{i\phi_1} & e^{i\phi_1} (\gamma_d - \gamma_u e^{i\phi_2}) \\ \sqrt{\frac{m_d}{m_s}} e^{i\phi_1} (\gamma_u - \gamma_d e^{i\phi_2}) & e^{i\phi_1} (\gamma_u - \gamma_d e^{i\phi_2}) & e^{i(\phi_1 + \phi_2)} \end{pmatrix} \quad (31)$$

と表わせる．ここで

$$\gamma_u = \sqrt{\frac{m_s + D_u}{m_b}}, \quad \gamma_d = \sqrt{\frac{m_c + D_u}{m_t}} \quad (32)$$

とする．1-2 成分は拡張前の Fritzsch 型と同様に (15) の関係が成り立つ．一方，2-3 成分は

$$|V_{23}| \approx \left| \sqrt{\frac{m_s + D_u}{m_b}} - \sqrt{\frac{m_c + D_u}{m_t}} e^{i\phi_2} \right| \quad (33)$$

となり，(29) からトップクォークの質量の制限は

$$m_t \leq \frac{2m_c}{\left(\sqrt{\frac{m_s}{m_b}} - |V_{cb}| \right)^2} \sim 180 \text{ GeV} \quad (34)$$

と広がり，拡張前の困難を回避できる [21]．

一般的に，任意の質量は，観測量に影響を与えない範囲内で，(16) の形まで変形できる．しかしそれ以上の制限は一般的に与えられるものではなく，仮定としておかざるを得ない．

今では，エルミート型の質量行列に対して実験結果をよく再現できる 5 つのテクスチャーゼロを持つ質量行列の組み合わせが Ramond と Roberts, Ross (RRR) により，表 1 の 5 つの型に分類されている [23]．

3.2 非エルミート型の質量行列

今まで，右巻き成分の基底を調節することにより，質量行列がエルミート行列であるとして考えてきた．しかし，最近接相互作用 (NNI) 基底と呼ばれる基底をとることにより，ジェネリックな質量行列は 1-1 成分，1-3 成分，3-1 成分，2-2 成分が 0 である非エルミートな行列

$$M = \begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ A' & 0 & B \\ 0 & B' & C \end{pmatrix} \quad (35)$$

にも変形できる [24] (付録 A)．この質量行列は，エルミート条件を課すことで Fritzsch 型の行

表 1 5 テクスターの 5 つの形態

型	M_u	M_d
第一型	$\begin{pmatrix} 0 & A_u & 0 \\ A_u^* & D_u & 0 \\ 0 & 0 & C_u \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ A_d^* & D_d & B_d \\ 0 & B_d^* & C_d \end{pmatrix}$
第二型	$\begin{pmatrix} 0 & A_u & 0 \\ A_u^* & 0 & B_u \\ 0 & B_u^* & C_u \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ A_d^* & D_d & B_d \\ 0 & B_d^* & C_d \end{pmatrix}$
第三型	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & F_u \\ 0 & D_u & 0 \\ F_u^* & 0 & C_u \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ A_d^* & D_d & B_d \\ 0 & B_d^* & C_d \end{pmatrix}$
第四型	$\begin{pmatrix} 0 & A_u & 0 \\ A_u^* & D_u & B_u \\ 0 & B_u^* & C_u \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ A_d^* & D_d & 0 \\ 0 & 0 & C_d \end{pmatrix}$
第五型	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & F_u \\ 0 & D_u & B_u \\ F_u^* & B_u^* & C_u \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ A_d^* & D_d & 0 \\ 0 & 0 & C_d \end{pmatrix}$

列 (17) となる．こうした非エルミート型の質量行列 M は，一般に半単純行列でない．そこで一般的に

$$MM^\dagger = \begin{pmatrix} |A|^2 & 0 & AB'^* \\ 0 & |A'|^2 + |B|^2 & BC^* \\ A^*B' & B^*C & |B'|^2 + |C|^2 \end{pmatrix} \quad (36)$$

へと変形することで，その固有値および混合行列が調査できる．

Fritzsch 型の質量行列が持つ困難を避ける非エルミート型の質量行列として，(35) で $A' = A$ ， $B' = C$ とする行列

$$M_f = \begin{pmatrix} 0 & A_f & 0 \\ A_f & 0 & B_f \\ 0 & C_f & C_f \end{pmatrix} \quad (37)$$

が提案されている [25]．この行列をエルミート型 (36) で表わし，ユニタリ行列 $U_h = P_h O_h$ によ

り対角化すると、直交行列 O_f は近似的に

$$O_f \simeq \begin{pmatrix} 1 & -\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{m_{f1}}{m_{f2}}} & \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{m_{f1}m_{f2}}{m_{f3}^2}} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{m_{f1}}{m_{f2}}} & 1 & \frac{m_{f2}}{m_{f3}} \\ -2^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{m_{f1}m_{f2}}{m_{f3}^2}} & -\frac{m_{f2}}{m_{f3}} & 1 \end{pmatrix} \quad (38)$$

と表わされる．この時、混合行列の 1-2 成分は

$$|V_{12}| \simeq \left| \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{m_d}{m_s}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{m_u}{m_c}} e^{i\alpha} - (2)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{m_u m_c}{m_t^2}} \frac{m_s}{m_b} e^{i\beta} \right| \quad (39)$$

となり (15) の関係はおおよそ満たされる．一方、2-3 成分からも

$$|V_{23}| \simeq \left| \frac{m_s}{m_b} - \frac{m_c}{m_t} e^{i(\beta-\alpha)} - \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{m_u}{m_c} \sqrt{\frac{m_d m_s}{m_b^2}} e^{i\alpha} \right| \quad (40)$$

と表わせることから、Fritzsch 型で現れた問題は一旦発生しない．しかしながら、観測的制限 $|V_{ub}|/|V_{cb}|$ の値を再現することはできない [26]．したがって、ここで課された制限を $B' \sim C$ のよう緩めなければならない．いずれにせよ、NNI 基底から得られる非エルミート型の質量行列の各成分に対して、(37) の様にパラメータを制限する様な理論的根拠はない．

3.3 水平対称性

フレーバー物理に制限を与えるために、世代間に対称性を課す議論がある．標準理論で与えられている対称性を縦方向の対称性とし、世代間に想定される対称性を横方向の対称性におくことで 2 つの対称性を区別する．前者を垂直対称性と呼び、後者を水平対称性と呼ぶ．水平対称性は、大別して連続対称性と不連続対称性に基づいて議論されている．

不連続対称性の議論には多くの種類が存在する．ここでは、 S_3 対称性によるフレーバーデモクラシーについて説明する． $S_{3L} \times S_{3R}$ 対称性の下で不変な行列としてデモクラティック行列

$$D = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (41)$$

がある [27]．この行列はユニタリ行列

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (42)$$

により

$$V^\dagger DV = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (43)$$

と対角化され，第 3 成分にのみ値を与えることができる．こうしたデモクラティック行列の性質は，第三世代のクォーク質量が他の世代に比べ非常に重くなることのよい理由付けとなる．

しかしながら，この行列のみでは実際の質量スペクトルを説明することはできず， $S_{3L} \times S_{3R}$ 対称性を破る項を加えなければならない．その 1 つの例として

$$M^f = \frac{\Delta^f}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1^f & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2^f & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3^f \end{pmatrix} \quad (44)$$

を紹介する [28, 29]．まず，デモクラティック基底で $V^\dagger M^q V$ と変形する．この固有値は近似的に

$$\begin{aligned} m_1^f &\simeq \frac{1}{3} (\delta_1^f + \delta_2^f + \delta_3^f) - \frac{\xi^f}{6}, \\ m_2^f &\simeq \frac{1}{3} (\delta_1^f + \delta_2^f + \delta_3^f) + \frac{\xi^f}{6}, \\ m_3^f &\simeq \Delta^f + \frac{1}{3} (\delta_1^f + \delta_2^f + \delta_3^f), \end{aligned} \quad (45)$$

と表わせ，その行列 $V^\dagger M^q V$ を対角化する直交行列は

$$B^f \simeq \begin{pmatrix} \cos \theta^f & \sin \theta^f & -\lambda^f \sin 3\theta^f \\ -\sin \theta^f & \cos \theta^f & -\lambda^f \cos 3\theta^f \\ \lambda^f \sin 2\theta^f & \lambda^f \cos 2\theta^f & 1 \end{pmatrix} \quad (46)$$

となる．ここで

$$\begin{aligned} \tan 2\theta^f &\simeq -\sqrt{3} \frac{\delta_2^f - \delta_1^f}{2\delta_3^f - \delta_2^f - \delta_1^f}, \\ \lambda^f &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\xi^f}{3\Delta^f}, \\ \xi^f &= \sqrt{(2\delta_3^f - \delta_2^f - \delta_1^f)^2 - 3(\delta_2^f - \delta_1^f)^2}, \end{aligned} \quad (47)$$

である．このモデルでは，各パラメータを

$$(\delta_1^u, \delta_2^u, \delta_3^u) \propto (\sqrt{m_\mu}, \sqrt{m_e}, \sqrt{m_\tau}), \quad (\delta_1^d, \delta_2^d, \delta_3^d) \propto (\sqrt{m_e}, \sqrt{m_\mu}, \sqrt{m_\tau}) \quad (48)$$

と選ぶことで，カビボ角に対応する角 $\theta_C = \theta^u - \theta^d$ は

$$\tan \theta_C = \sqrt{3} \frac{\sqrt{m_\mu} - \sqrt{m_e}}{2\sqrt{m_\tau} - \sqrt{m_\mu} - \sqrt{m_e}} = 0.225 \quad (49)$$

となり，よい一致をみせることが分かる．しかし (48) には物理の理論的根拠が全くない．

一方，連続対称性を用いた議論としては，主に $U(1)$ 対称性および $SU(2)$ 対称性， $SU(3)$ 対称性を使ったものに限られている．ここでは関係式 (15) を導く $SU(2)$ 対称性の 3 次元表現を用いた Wilczek と Zee による議論について紹介する [31]．

フェルミオン場として水平方向に 3 重項を持つ場

$$\Psi_L(x) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c(x) \\ s(x) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} t(x) \\ b(x) \end{pmatrix} \end{pmatrix}_L, \quad \Psi_R(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ c(x) \\ t(x) \end{pmatrix}_R, \quad \Psi_R(x) = \begin{pmatrix} d(x) \\ s(x) \\ b(x) \end{pmatrix}_R \quad (50)$$

を導入する．フェルミオン質量を引き起こす湯川項において，階層的な質量スペクトルを生む最も効率的な選択として，ベクトル型のヒッグス場 η およびテンソル型のヒッグス場 φ のそれぞれが含まれる 2 つの項

$$\bar{\Psi}_{La}^i \eta_a^k \Psi_R^j \epsilon_{ijk}, \quad \bar{\Psi}_{La}^i \varphi_a^{ij} \Psi_R^j, \quad (51)$$

を考える．ここで添字 α は $SU(2)$ 垂直対称性の変換を表わし， i, j, k は $SU(2)$ 水平対称性の変換を表わしている．ヒッグスポテンシャルを適当にとることにより，それぞれのヒッグス場が真空の期待値

$$\langle \varphi_{a=+1}^{ij} \rangle \propto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (52)$$

および

$$\langle \eta_{a=+1}^j \rangle \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \epsilon \end{pmatrix} \quad (53)$$

を取る様な最小値が考えられる．ここで ϵ は輻射補正項であり，他の成分に比べ非常に小さいとする．この補正項を $\epsilon = \frac{\epsilon}{b}$ と置き直すことで，質量行列は

$$M = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ -c & -a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix} \quad (54)$$

の形をとる．このことを考慮し， $M^\dagger M$ の固有値問題を解くことで質量固有値

$$\begin{aligned} m_1^q &\simeq \frac{a^2 c^4}{(a^2 - b^2)^2}, \\ m_2^q &\simeq (a - b)^2, \\ m_3^q &\simeq (a + b)^2, \end{aligned} \quad (55)$$

が得られ，カビボ角要素は近似的に

$$|V_{us}| \sim \left| \sqrt{\frac{m_d}{m_s}} - \sqrt{\frac{m_u}{m_c}} \right| \quad (56)$$

となる．しかしながら，このモデルでも十分な大きさのトップクォーク質量は得られず，さらなる拡張が必要となる [32] ．

4. H 対称性

フレーバー物理に潜む多くの豊かな現象を説明するために，H 対称性とその破れの機構は柔軟かつ精巧な構造を持たなければならない．パウリ代数の中心拡大 $\check{\mathcal{A}}$ と関係するリー代数 $\check{G}(\check{\mathcal{A}})^{\dagger 1}$ は，その様な特徴を持つゲージ場理論を適切に定式化することを可能にする．

4.1 パウリ代数の中心拡大

パウリ代数の中心拡大 $\check{\mathcal{A}}$ は $\mathfrak{su}(3)$ の部分代数である．この代数 $\check{\mathcal{A}}$ の四つの独立な生成子は， $\mathfrak{su}(3)$ に対するゲルマン行列 λ_j ($j = 1, 2, \dots, 8$) の線形結合によって形成される．その中心はデモクラティック行列

$$\check{D} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(I + \lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_6) \quad (57)$$

である．これは射影元であり，等冪の性質

$$\check{D}^2 = \check{D} \quad (58)$$

^{†1} 不連続な S_3 対称性の 3×3 行列表現から抽出された線形独立な元から生成されるこの群 $\check{G}(\check{\mathcal{A}})$ [41] は，不連続な古典群 S_3 の連続な量子的拡張として解釈できる．

を持つ．この代数の他の三つの線形独立な生成子は

$$\left\{ \begin{aligned} \check{\tau}_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_6), \\ \check{\tau}_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & -i & i \\ i & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\lambda_2 - \lambda_5 + \lambda_7), \\ \check{\tau}_3 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(-2\lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_6 + \sqrt{3}\lambda_8), \end{aligned} \right. \quad (59)$$

により与えられる．これらの生成子はパウリ型の積則

$$\check{\tau}_j \check{\tau}_k = \delta_{jk} (I - \check{D}) + i \epsilon_{jkl} \check{\tau}_l \quad (60)$$

および規格化条件

$$\text{Tr}(\check{\tau}_j \check{\tau}_k) = 2\delta_{jk} \quad (61)$$

に従う．これらの元とデモクラティック行列 \check{D} は，

$$\check{D} \check{\tau}_j = \check{\tau}_j \check{D} = 0 \quad (62)$$

という意味で直交している．ここで，我々は

$$\check{\mathcal{A}} = \{\check{D}, \check{\tau}_1, \check{\tau}_2, \check{\tau}_3\} \quad (63)$$

として構成されたパウリ代数の中心拡大を，フレーバー物理に対して基本となる H 対称性を生成するリー代数と同定する．

リー群 $\check{G}(\check{\mathcal{A}})$ は，代数 $\check{\mathcal{A}}$ の元に対する全ての可能な線形結合による指数関数写像の集合

$$\check{G}(\check{\mathcal{A}}) = \left\{ \Omega(\vartheta) = \exp \left(i\vartheta_0 \check{D} + i \sum_{j=1}^3 \vartheta_j \check{\tau}_j \right) : \vartheta_0, \vartheta_j \in \mathbb{R} \right\} \quad (64)$$

によって定義される．これが H 対称群 G_H と同定されたリー群 $\check{G}(\check{\mathcal{A}})$ である．この群 G_H は 2 つの部分群

$$SU_H(2) = \left\{ \Omega_2(\vartheta) = \exp \left(i \sum_{j=1}^3 \vartheta_j \check{\tau}_j \right) : \vartheta_j \in \mathbb{R} \right\} \quad (65)$$

および

$$U_H(1) = \left\{ \Omega_1(\vartheta_0) = \exp(i\vartheta_0 \check{D}) : \vartheta_0 \in \mathbb{R} \right\} \quad (66)$$

を持つ．以下で行う解析に対して，

$$\Omega_2(\vartheta) = \check{D} + \cos \Theta (I - \check{D}) + \frac{\sin \Theta}{\Theta} \left(i \sum_{j=1}^3 \vartheta_j \check{\tau}^j \right) \quad (67)$$

および

$$\Omega_1(\vartheta_0) = e^{i\vartheta_0} \check{D} + (I - \check{D}) \quad (68)$$

の様 に代数 $\check{\mathcal{A}}$ の元で表記された群要素を使うと便利である．ここで $\Theta^2 = \sum_{j=1}^3 \vartheta_j^2$ とする．

H 対称性の不変量を導くために，複素共役や転置操作の下での群要素の振舞いを調べる必要があるとなる．(59) で表わした行列 $\check{\tau}_j$ の具体的な表現から関係式 $\check{\tau}_2(i\check{\tau}_j)^* = (i\check{\tau}_j)\check{\tau}_2$ が得られる．この関係より

$$\check{\tau}_2 \Omega_2(\vartheta)^* = \Omega_2(\vartheta) \check{\tau}_2 \quad (69)$$

が導かれる． $S U_H(2)$ の群要素に関するこの恒等式は，以下で，いくつかの H 多重項の変換特性を調べる際に欠かせぬ役割を担う．転置に関しては，EW 対称性やローレンツ対称性の行列や多重項から，H 対称性の行列や多重項を区別することに注意しなければならない^{†2}．ここで左上に置かれた通常の記号 i は，電弱対称性やローレンツ対称性の自由度と関係づけられた量に対する転置操作として使う．左上に置かれた新しい記号 \check{i} は，H 対称性の自由度と関係づけられた量に対する転置操作として使うために導入する．(59) から，転置操作 \check{i} の下，関係式 $\check{\tau}_2 \check{i}(i\check{\tau}_j) = (-i\check{\tau}_j)\check{\tau}_2$ が成り立つことを証明できる．対応して，群要素は恒等式

$$\check{\tau}_2 \check{i} \Omega_2(\vartheta) = \Omega_2(-\vartheta) \check{\tau}_2 = \Omega_2(\vartheta)^{-1} \check{\tau}_2 \quad (70)$$

を満たす．この恒等式はフェルミオンおよびスカラー 3 重項から H 不変量を構成する際に必要となる．

パウリ行列 τ_j および (59) で表現された行列 $\check{\tau}_j$ は複素共役と転置操作の下，同じ振舞いをする．パウリ行列によって生成された EW 対称性の群要素は，置き換え $\check{\tau}_j \rightarrow \tau_j$ によって，(69) および (70) から得られた関係を満たす．

^{†2} 簡単のために，この論文ではカラー対称性に対する多重構造を具体的に表わしていない．

4.2 \check{D} および $(\check{\tau}_1, \check{\tau}_2, \check{\tau}_3)$ の核

生成子 $\check{\tau}_3$ および \check{D} の同時固有状態は

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad |3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (71)$$

という形で得られる．ここで，2 重項 $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ および 1 重項 $\{|3\rangle\}$ は対称群 S_3 の既約表現であることを注意しておく．

これらの固有状態は H 基本多重項を表わすのに便利な基底を形成する．これらのベクトルにおける生成子 $\check{\tau}_j$ および \check{D} の作用は

$$\begin{aligned} \check{\tau}_1|1\rangle &= |2\rangle, & \check{\tau}_1|2\rangle &= |1\rangle, & \check{\tau}_1|3\rangle &= 0, \\ \check{\tau}_2|1\rangle &= i|2\rangle, & \check{\tau}_2|2\rangle &= -i|1\rangle, & \check{\tau}_2|3\rangle &= 0, \\ \check{\tau}_3|1\rangle &= |1\rangle, & \check{\tau}_3|2\rangle &= -|2\rangle, & \check{\tau}_3|3\rangle &= 0, \\ \check{D}|1\rangle &= 0, & \check{D}|2\rangle &= 0, & \check{D}|3\rangle &= |3\rangle \end{aligned} \quad (72)$$

とまとめられる [41]．明らかに，2 重項 $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ は生成子 \check{D} の核であり，1 重項 $\{|3\rangle\}$ は生成子 $\check{\tau}_1$ および $\check{\tau}_2, \check{\tau}_3$ の核である．したがって，状態 $|3\rangle$ は

$$\Omega(\theta)|3\rangle = \exp\left(i\theta_0\check{D} + i\sum_{j=1}^3\theta_j\check{\tau}_j\right)|3\rangle = e^{i\theta_0}|3\rangle \quad (73)$$

を満たし， G_H 群の全ての要素に対する固有状態である．

4.3 クォークとレプトンの H3 重項

高エネルギー領域において，垂直対称性に対して同じ量子数とカイラリティによって特徴づけられた 3 世代のフェルミオンが，基本 H3 重項

$$\Psi_h^f(x) = \begin{pmatrix} \psi_{h1}^f(x) \\ \psi_{h2}^f(x) \\ \psi_{h3}^f(x) \end{pmatrix} \quad (74)$$

を形成すると想定する．ここで $f(=q, u, d; l, \nu, e)$ は電弱多重項を識別し， $h(=L, R)$ はカイラル成分を表わす．特に， $\Psi_L^f(=\Psi_L^q, \Psi_L^l)$ は電弱 2 重項からなる H3 重項であり， $\Psi_R^f(=\Psi_R^u, \Psi_R^d, \Psi_R^\nu, \Psi_R^e)$ は電弱 1 重項からなる H3 重項である．

具体的に，カイラルフェルミオン場に対する基本多重項は，クォークセクターに対して

$$\Psi_L^q(x) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c(x) \\ s(x) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} t(x) \\ b(x) \end{pmatrix} \end{pmatrix}_L, \quad \Psi_R^u(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ c(x) \\ t(x) \end{pmatrix}_R, \quad \Psi_R^d(x) = \begin{pmatrix} d(x) \\ s(x) \\ b(x) \end{pmatrix}_R \quad (75)$$

と表わせ，レプトンセクターに対して

$$\Psi_L^l(x) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e(x) \\ e(x) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \nu_\mu(x) \\ \mu(x) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \nu_\tau(x) \\ \tau(x) \end{pmatrix} \end{pmatrix}_L, \quad \Psi_R^\nu(x) = \begin{pmatrix} \nu_e(x) \\ \nu_\mu(x) \\ \nu_\tau(x) \end{pmatrix}_R, \quad \Psi_R^e(x) = \begin{pmatrix} e(x) \\ \mu(x) \\ \tau(x) \end{pmatrix}_R \quad (76)$$

と表わせる．

ここで，一般的な H3 重項 T を考え，H 対称性が有する特徴を説明する．その特徴とは， $T(=|T\rangle)$ の全ての成分の和が $SU_H(2)$ 変換のもと不変であるということである．このことを見るために，

$$\langle\langle T \rangle\rangle = \sum_{i=1}^3 T_i = \sqrt{3} \langle 3 | T \rangle \quad (77)$$

によって， T に関する操作 $\langle\langle \cdots \rangle\rangle$ を導入する．以降， T の全ての成分和 $\langle\langle \cdots \rangle\rangle$ を H 和と呼ぶ．次に，(73) の中で与えた固有ベクトル $|3\rangle$ の特徴により， G_H の作用

$$T \rightarrow \Omega(\vartheta) T \quad (78)$$

は， $\langle\langle T \rangle\rangle$ の変換

$$\langle\langle T \rangle\rangle \rightarrow \exp(i\vartheta_0) \langle\langle T \rangle\rangle. \quad (79)$$

を引き起こす．それゆえ，H 和 $\langle\langle T \rangle\rangle$ は G_H 群の任意の要素に対して固有状態として振舞い，特に， $SU_H(2)$ 群の作用のもとで不変となる．

5. $V \times H$ 対称性のゲージ場理論におけるボソン場

低エネルギーでの SM の成功を考慮すると，新しいゲージ理論には，SM に登場するフェルミ

オン場やゲージ場を含むことが要請される．H 対称性および V 対称性のゲージ場理論に対する最も単純な一般化を実現するために，必要となるゲージ場および H 多重項を成すスカラー場を加える．

5.1 ゲージ場

垂直対称性である $SU_c(3)$ および $SU_L(2)$, $U_Y(1)$ 部分群に対するゲージ場を，それぞれ $A_\mu^{(3)j}(x)$ ($j = 1, \dots, 8$) および $A_\mu^{(2)j}(x)$ ($j = 1, 2, 3$), $A_\mu^{(1)}(x)$ によって表わす． $A_\mu^{(k)}(x)$ に対するゲージ結合定数を g_k ($k = 1, 2, 3$) で表わすことで，ゲージ場 $A_\mu^{(k)}(x)$ の場の強さ（曲率テンソル）は

$$\begin{cases} F_{\mu\nu}^{(3)j} = \partial_\mu A_\nu^{(3)j} - \partial_\nu A_\mu^{(3)j} + g_3 f_{jkl} A_\mu^{(3)k} A_\nu^{(3)l}, \\ F_{\mu\nu}^{(2)j} = \partial_\mu A_\nu^{(2)j} - \partial_\nu A_\mu^{(2)j} + g_2 \epsilon_{jkl} A_\mu^{(2)k} A_\nu^{(2)l}, \\ F_{\mu\nu}^{(1)} = \partial_\mu A_\nu^{(1)} - \partial_\nu A_\mu^{(1)} \end{cases} \quad (80)$$

によって定義される．ここで f_{jkl} および ϵ_{jkl} はそれぞれ $SU(3)$ および $SU(2)$ 群の構造定数である．

生成子 $\{\check{\tau}_1, \check{\tau}_2, \check{\tau}_3\}$ および $\{\check{D}\}$ に対応して，H ゲージ場の 3 重項 $\check{A}_\mu^{(2)j}(x)$ ($j = 1, 2, 3$) および 1 重項 $\check{A}_\mu^{(1)}(x)$ が

$$\check{\tau}_j \leftrightarrow \check{A}_\mu^{(2)j}(x), \quad \check{D} \leftrightarrow \check{A}_\mu^{(1)}(x) \quad (81)$$

として存在すると仮定する．結合定数 \check{g}_k のゲージ場 $\check{A}_\mu^{(k)}(x)$ は，場の強さ

$$\begin{cases} \check{F}_{\mu\nu}^{(2)j} = \partial_\mu \check{A}_\nu^{(2)j} - \partial_\nu \check{A}_\mu^{(2)j} + \check{g}_2 \epsilon_{jkl} \check{A}_\mu^{(2)k} \check{A}_\nu^{(2)l}, \\ \check{F}_{\mu\nu}^{(1)} = \partial_\mu \check{A}_\nu^{(1)} - \partial_\nu \check{A}_\mu^{(1)} \end{cases} \quad (82)$$

を持つ．V および H 対称性のゲージ場 $A_\mu^{(k)}(x)$ ($k = 1, 2, 3$) および $\check{A}_\mu^{(k)}(x)$ ($k = 1, 2$) は，それぞれ $V \times H$ 対称群の 1 重項表現に属する．

5.2 スカラー場

H 対称性と EW 対称性の破れを引き起こすために必要とされる 2 種類の H 多重項のスカラー場が存在すると仮定する．高エネルギースケール $\check{\Lambda}$ のまわりで H 対称性を破る役割を持つスカラー場として，V 対称性の 1 重項に属しており H 対称性の基本 3 重項

$$\check{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} \check{\phi}_1(x) \\ \check{\phi}_2(x) \\ \check{\phi}_3(x) \end{pmatrix} \quad (83)$$

を形成する 3 つのスカラー場 $\check{\phi}_j(x)$ を導入する．このスカラー 3 重項は，右巻きニュートリノ 3

重項 $\Psi_R^v(x)$ 以外のフェルミオン場と相互作用しない．この $\check{\Phi}(x)$ の特徴により，スケール $\check{\Lambda}$ のディラック質量を獲得するフェルミオン場は出現しない．関係式

$$\check{\Phi}(x) = i\check{\tau}_2 \check{\Phi}^*(x) \quad (84)$$

によって定義された新しい 3 重項は，(69) の関係により， $SU_H(2)$ 群の作用のもとで， $\check{\Phi}(x)$ と同じ変換特性を示す．ここで，この 3 重項を $\check{\Phi}(x)$ の半随伴 3 重項と呼ぶ．

スケール $\Lambda \simeq \Lambda_{EW}$ での EW 対称性の破れによって湯川相互作用からディラック質量を与えるためには，EW および H 対称性の両方の非自明な多重項に属する新しい組のスカラー場が存在することが要求される．そのような場の可能な選択として，電弱ハイパー荷 $Y_{EW} = 1$ を持つ電弱 2 重項の場 $\Phi_j(x) = {}^t(\phi_j^+(x), \phi_j^0(x))$ ($j = 1, 2, 3$) が

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \\ \Phi_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^+(x) \\ \phi_1^0(x) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \phi_2^+(x) \\ \phi_2^0(x) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \phi_3^+(x) \\ \phi_3^0(x) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (85)$$

として H3 重項を形成するとする．これに対して，その半随伴 3 重項を

$$\check{\Phi}(x) = (i\check{\tau}_2)(i\tau_2)\Phi^*(x) = (i\check{\tau}_2) \begin{pmatrix} i\tau_2\Phi_1^*(x) \\ i\tau_2\Phi_2^*(x) \\ i\tau_2\Phi_3^*(x) \end{pmatrix} = (i\check{\tau}_2) \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^{0*}(x) \\ -\phi_1^-(x) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \phi_2^{0*}(x) \\ -\phi_2^-(x) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \phi_3^{0*}(x) \\ -\phi_3^-(x) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (86)$$

によって定義する．これらの両 3 重項は，H 対称性に対する群 $SU_H(2)$ および電弱アイソスピンに対する群 $SU_L(2)$ のもとで，同じ変換特性を持つ．H3 重項 $\check{\Phi}(x)$ および $\Phi(x)$ は，それぞれ，(94) および (95) で与えられる様に，電弱 1 重項に属するアップセクターおよびダウンセクターの右巻きフェルミオンからなる H3 重項と相互作用する．

この理論で導入したすべての場の成分は表 2 にまとめられる．H ハイパー荷は最後の列で表わされている．スカラー 3 重項 $\check{\Phi}(x)$ のみがゼロでない H ハイパー荷 ($\check{Y}_{\check{\Phi}} \neq 0$) を持ち，他の全ての場は H ハイパー荷がゼロであると仮定する．H 和をとった量に対して，H 不変量 $\langle\langle \Psi_L^f(x) \rangle\rangle$ および $\langle\langle \Phi(x) \rangle\rangle$ は電弱 2 重項であり， $\langle\langle \Psi_R^f(x) \rangle\rangle$ は電弱 1 重項である．ゼロでない H ハイパー荷を運ぶ $SU_H(2)$ 不変量 $\langle\langle \check{\Phi}(x) \rangle\rangle$ は EW 対称性に関しても不変である．

EW \times H 対称性に対する内部空間の中の大きな自由度は，スカラー 3 重項 $\check{\Phi}(x)$ および $\Phi(x)$ の

表 2 新しいゲージ場理論に含まれる場

場	演算子	$SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$	$SU_H(2)$	\check{y}
フェルミオン場	$\Psi_L^f(x)$	$(3, 2, 1), (1, 2, 1)$	3	0
	$\Psi_R^f(x)$	$(3, 1, 1), (1, 1, 1)$	3	0
ゲージ場	$A_\mu^{(k)}(x)$	$(8, 1, 1), (1, 3, 1), (1, 1, 1)$	1	0
	$\check{A}_\mu^a(x)$	$(1, 1, 1)$	3, 1	0
スカラー場	$\check{\Phi}(x)$	$(1, 1, 1)$	3	$\check{y}_{\check{\Phi}}$
	$\Phi(x)$	$(1, 2, 1)$	3	0

力学的作用のため必然的に複雑さを引き起こす．それら 3 重項からなる H および EW 不変量の間に，さまざまな形の恒等式が存在する．スカラー 3 重項のラグランジアンを構成するために，全ての H および EW 不変量を調べ，それらの間の関係を見つけないといけない．こうした恒等式の解析は付録 B で行う．

6. $V \times H$ ゲージ場理論のラグランジュ密度

$V \times H$ 対称性を持つ理論のラグランジュ密度 \mathcal{L} を

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_b \quad (87)$$

によって表わす．ここで \mathcal{L}_f と \mathcal{L}_b はそれぞれフェルミオン場に依存する部分と依存しない部分である．ラグランジュ密度を構築する上で，各対称性に応じた変換に対する記号を (51) の様に具体的に記述することはせずに， V および H 多重項から不変量を記述する．

6.1 フェルミオン場に依存するラグランジュ密度

フェルミオン場のラグランジュ密度 \mathcal{L}_f は，ゲージ相互作用を含む運動項 $\mathcal{L}_{\Psi A \check{A}}$ およびフェルミオン場とスカラー場の間の相互作用項 \mathcal{L}_{fs} の和

$$\mathcal{L}_f = \mathcal{L}_{\Psi A \check{A}} + \mathcal{L}_{fs} \quad (88)$$

として表わされる．その運動項部分 $\mathcal{L}_{\Psi A \check{A}}$ はカイラルフェルミオン場の二次形式

$$\mathcal{L}_{\Psi A \check{A}} = \sum_{f,h} \bar{\Psi}_h^f(x) i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \Psi_h^f(x) \quad (89)$$

として表わせる．ここで \mathcal{D}_μ は共変微分

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - i\{V\text{ゲージ場}\}_\mu - i\{H\text{ゲージ場}\}_\mu \quad (90)$$

であり，V および H 対称性に対するゲージ場を含む．(90) の第 2 項は

$$\{V\text{ゲージ場}\}_\mu = g_3 A_\mu^{(3)j}(x) \frac{1}{2} \lambda_j + g_2 A_\mu^{(2)j}(x) \frac{1}{2} \tau_j + g_1 A_\mu^{(1)}(x) \frac{1}{2} Y \quad (91)$$

によって与えられる．ここで Y は電弱ハイパー荷演算子である．(90) の中の第 3 項目は， $S U_H(2)$ 群に対するゲージ場 $\check{A}_\mu^{(2)j}(x)$ および代数 $\check{\mathcal{A}}$ の生成子 $\check{\tau}_j$ によって，

$$\{H\text{ゲージ場}\}_\mu = \check{g}_2 \check{A}_\mu^{(2)j}(x) \frac{1}{2} \check{\tau}_j \quad (92)$$

として表わされる．ここで，全てのフェルミオン 3 重項の H ハイパー荷をゼロに割り当てたために，ゲージ場 $\check{A}_\mu^{(1)}$ はフェルミオン場と直接相互作用しない．

ラグランジュ密度 \mathcal{L}_{fs} は，湯川型とマジョラナ型のフェルミオン スカラー相互作用

$$\mathcal{L}_{fs} = \sum_{f=u,d,v,e} \mathcal{L}_Y^f + \mathcal{L}_M \quad (93)$$

からなる．ここで湯川部分 \mathcal{L}_Y^f はフェルミオンセクター ($f = u, d, v, e$) の H3 重項から成り，マジョラナ部分 \mathcal{L}_M は右巻ニュートリノ場の 3 重項 $\Psi_R^f(x)$ で構成される． $\{\Psi_R^f\}$ や $\{\check{\Phi}(x)\}$ ， $\{\Phi(x)\}$ の様な量の $S U_H(2)$ 不変性は湯川相互作用およびマジョラナ相互作用に対して次の構造を引き起こす．

• 湯川相互作用

密度 \mathcal{L}_Y^f は，フェルミオン場とスカラー 3 重項 $\Phi(x)$ および $\check{\Phi}(x)$ の二次形式から成る全ての $EW \times H$ 不変量を足し合わせることによって構成される．具体的に，電弱アップセクター ($f' = q, f = u$) および ($f' = l, f = v$) に対しては

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y^f &= Y_{f1} \check{\Psi}_L^{f'} i\tau_2 \{\Phi^*\} \Psi_R^f + Y_{f2} \check{\Psi}_L^{f'} \check{\Phi} \{\Psi_R^f\} \\ &+ Y_{f3} \{\check{\Psi}_L^{f'}\}^i \check{\Phi} i\check{\tau}_2 \Psi_R^f + Y_{f4} \{\check{\Psi}_L^{f'}\} i\tau_2 \{\Phi^*\} \{\Psi_R^f\} + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (94)$$

と成り，ダウンセクター ($f' = q, f = d$) および ($f' = l, f = e$) に対しては

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y^f &= Y_{f1} \check{\Psi}_L^{f'} \{\Phi\} \Psi_R^f + Y_{f2} \check{\Psi}_L^{f'} \Phi \{\Psi_R^f\} \\ &+ Y_{f3} \{\check{\Psi}_L^{f'}\}^i \Phi i\check{\tau}_2 \Psi_R^f + Y_{f4} \{\check{\Psi}_L^{f'}\} \{\Phi\} \{\Psi_R^f\} + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (95)$$

と成ることがわかる．それぞれのセクターは 4 つの未知の複素結合定数 Y_{fi} ($i = 1, \dots, 4$) を含む．それらのラグランジアンの中で，H-和の操作は $S U_H(2)$ 不変量を生成するのに不可欠な役割を果たす．(73) の中で具体化された群 G_H の特有の特徴を反映する H-和なしには，(94) や (95)

の様に湯川相互作用を得ることはできない．全ての 3 重項 $\Psi_h^f(x)$ および $\Phi(x)$ に対して H ハイパー荷の値をゼロに割り当てたことは，この理論を定式化する上で本質的なものである．

SM では，未知の湯川結合定数がフレーバー物理の不確定さや複雑さの主な原因となる．一方，H 対称性を課した理論の枠組みでは，H 対称性は湯川相互作用のパターンの中に秩序と制限を生み出し，未知のパラメータの数を大幅に減少させる．

• マジョラナ相互作用

マジョラナ相互作用は SM の量子数を持たない右巻き成分のニュートリノ場に対してのみ可能である． $\langle \Phi \rangle$ がこのマジョラナ相互作用の中に現われることは，H ハイパー荷の保存により禁止される．この事実は H 不変量を探すためには重要なことである．ニュートリノ 3 重項 Ψ_R^ν によるローレンツおよび H 不変な組み合わせの形には 2 つの形がある．その 1 つの形である不変量として

$$i\bar{\Psi}_R^\nu C \tilde{\tau}_2 \Psi_R^\nu \quad (96)$$

がある．ここで C は関係

$$C^{-1} \gamma_\mu C = -^t \gamma_\mu \quad (97)$$

および

$$C = -C^{-1} = -C^\dagger = -^t C \quad (98)$$

によって特徴づけられた荷電共役行列であり，ディラックスピノールおよび H3 重項に関する転置操作に対してそれぞれ記号 t および i を使った．(96) の H 不変性は関係 (70) によって証明される．さらに 2 つ目の不変量の形として

$$i\bar{\Psi}_R^\nu C \tilde{\tau}_2 \check{\Phi}(\Psi_R^\nu), \quad ^t \langle \Psi_R^\nu \rangle C ^i \check{\Phi} \tilde{\tau}_2 \Psi_R^\nu \quad (99)$$

の様な組み合わせが見つけれれる．この中で要素 $\tilde{\tau}_2$ は， $\tilde{\tau}_2 \check{D} = 0$ によりスカラー 3 重項 $\check{\Phi}(x)$ の \check{Y}_Φ 荷の影響を相殺する様に適切に働く．

マジョラナ相互作用を調査するために，通常，ニュートリノ場の荷電共役を使う．慣習に従って，カイラルフェルミオン 3 重項 $\Psi_{L,R}^f$ の荷電共役を

$$\Psi_{L,R}^{fc} = C ^i \overline{\Psi_{L,R}^f}, \quad \overline{\Psi_{L,R}^{fc}} = ^i \Psi_{R,L}^f C \quad (100)$$

によって定義する．こうして， $EW \times H$ 不変量で構成されるマジョラナ相互作用に対する最も一

一般的なラグランジュ密度は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_M &= \check{g}_{M1} \bar{\Psi}_R^\nu C \check{\tau}_2 \check{\Phi} \langle \Psi_R^\nu \rangle + \check{g}_{M2} \bar{\Psi}_R^\nu C \check{\tau}_2 \check{\Phi} \langle \Psi_R^\nu \rangle + \check{m}_M \bar{\Psi}_R^\nu C \check{\tau}_2 \Psi_R^\nu + \text{h.c.} \\ &= \check{g}_{M1} \overline{\Psi_L^{\nu c}} \check{\tau}_2 \check{\Phi} \langle \Psi_R^\nu \rangle + \check{g}_{M2} \overline{\Psi_L^{\nu c}} \check{\tau}_2 \check{\Phi} \langle \Psi_R^\nu \rangle + \check{m}_M \overline{\Psi_L^{\nu c}} \check{\tau}_2 \Psi_R^\nu + \text{h.c.}\end{aligned}\quad (101)$$

の形で与えられる．ここで $\check{g}_{Mj} (j = 1, 2)$ および \check{m}_M はマジョラナ結合定数およびマジョラナ質量である．

6.2 フェルミオン場に依存しないラグランジュ密度

フェルミオン場を含まないボソン場に対するラグランジュ密度は

$$\mathcal{L}_b = \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{scalar}} \quad (102)$$

としてゲージ場部分 $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ およびスカラー場部分 $\mathcal{L}_{\text{scalar}}$ から構成される．

• ゲージ場のラグランジュ密度

ゲージ場部分 $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ は V 対称なゲージ場項 \mathcal{L}_V^G および H 対称なゲージ場項 \mathcal{L}_H^G からなり，

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = \mathcal{L}_V^G + \mathcal{L}_H^G \quad (103)$$

と表わせる．(80) および (82) の中で定義された場の強さを使うと，密度 \mathcal{L}_V^G および \mathcal{L}_H^G はそれぞれ

$$\mathcal{L}_V^G = -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^8 F_{\mu\nu}^{(3)j} F^{(3)j\mu\nu} - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^3 F_{\mu\nu}^{(2)j} F^{(2)j\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(1)} F^{(1)\mu\nu} \quad (104)$$

および

$$\mathcal{L}_H^G = -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^3 \check{F}_{\mu\nu}^{(2)j} \check{F}^{(2)j\mu\nu} - \frac{1}{4} \check{F}_{\mu\nu}^{(1)} \check{F}^{(1)\mu\nu} \quad (105)$$

によって構成される．

• スカラー場のラグランジュ密度

付録 B の中で導かれた $EW \times H$ 不変量間の恒等式を使うことで，ラグランジュ密度を構成するスカラー 3 重項部分に制限がつく．しかしながら，独立な不変量がまだ多く存在するため， $\Phi(x)$ および $\check{\Phi}(x)$ からなる全ヒッグスポテンシャル $V_T(\Phi, \check{\Phi})$ には，多くの未知の結合定数が必然的にもたらされる．

H および EW 対称性の破れを調査するために，全ヒッグスポテンシャルを

$$V_T(\Phi, \check{\Phi}) = V_1(\check{\Phi}) + V(\Phi, \check{\Phi}) \quad (106)$$

として大きく 2 つに分割する．前半部分の $V_1(\check{\Phi})$ は EW1 重項 $\check{\Phi}_{(x)}$ からなるポテンシャル部分である．後半部分の $V(\Phi, \check{\Phi})$ は，場 $\check{\Phi}_{(x)}$ の影響の下での EW2 重項の場 $\Phi_{(x)}$ に対する部分であり， $\Phi_{(x)}$ のみからなる部分 $V_2(\Phi)$ と 2 つの場の相互作用項 $V_3(\Phi, \check{\Phi})$ によって

$$V(\Phi, \check{\Phi}) = V_2(\Phi) + V_3(\Phi, \check{\Phi}) \quad (107)$$

とわけられる．

スカラー場に対するラグランジュ密度は，一般性を失うことなしに

$$\mathcal{L}_{\text{scalar}} = \mathcal{L}(\check{\Phi}) + \mathcal{L}(\Phi, \check{\Phi}) \quad (108)$$

と表わすことができる．第 1 項は単に場 $\check{\Phi}_{(x)}$ および H ゲージ場に依存し，第 2 項は EW および H 対称性のゲージ場の影響と場 $\check{\Phi}_{(x)}$ の影響を含む場 $\Phi_{(x)}$ の密度である．

スカラー H3 重項 $\check{\Phi}_{(x)}$ のラグランジュ密度は

$$\mathcal{L}(\check{\Phi}) = (\mathcal{D}^\mu \check{\Phi})^\dagger (\mathcal{D}_\mu \check{\Phi}) - V_1(\check{\Phi}) \quad (109)$$

として表わされる．ここで場 $\check{\Phi}_{(x)}$ に対する共変微分は

$$\mathcal{D}_\mu \check{\Phi} = \left(\partial_\mu - i\check{g} \check{A}_\mu^{(2)j} \frac{1}{2} \check{\tau}_j - i\check{g}' \check{A}_\mu^{(1)} \check{y}_\check{\Phi} \check{D} \right) \check{\Phi} \quad (110)$$

の形をとり，スカラー場の自己相互作用のポテンシャルは

$$\begin{aligned} V_1(\check{\Phi}) = & -\check{m}_1^2 \check{\Phi}^\dagger \check{\Phi} - \check{m}_2^2 \langle \check{\Phi} \rangle^\dagger \langle \check{\Phi} \rangle + \frac{1}{2} \check{\lambda}_1 (\check{\Phi}^\dagger \check{\Phi})^2 + \frac{1}{2} \check{\lambda}_2 (\langle \check{\Phi} \rangle^\dagger \langle \check{\Phi} \rangle)^2 \\ & + \check{\lambda}_3 (\check{\Phi}^\dagger \check{\Phi}) (\langle \check{\Phi} \rangle^\dagger \langle \check{\Phi} \rangle) \end{aligned} \quad (111)$$

によって与えられる．ここで $\check{\lambda}_1, \check{\lambda}_2$ および $\check{\lambda}_3$ は正定値として定義された結合定数である．この密度を使うことにより，スケール $\check{\Lambda}$ のまわりで，EW 対称性を保ちながら H 対称性の破れを解析する．

場 $\check{\Phi}_{(x)}$ の影響の下，3 重項 $\Phi_{(x)}$ のラグランジュ密度 $\mathcal{L}(\Phi, \check{\Phi})$ は

$$\mathcal{L}(\Phi, \check{\Phi}) = (\mathcal{D}^\mu \Phi)^\dagger (\mathcal{D}_\mu \Phi) - V(\Phi, \check{\Phi}) \quad (112)$$

として与えられる．共変微分は， $\check{y}_\Phi = 0$ とハイパー荷を持たないために

$$\mathcal{D}_\mu \Phi = \left(\partial_\mu - ig_2 A_\mu^{(2)j} \frac{1}{2} \tau_j - ig_1 A_\mu^{(1)} \frac{1}{2} - i\check{g} \check{A}_\mu^{(2)j} \frac{1}{2} \check{\tau}_j \right) \Phi \quad (113)$$

として場 $\Phi_{(x)}$ に作用する．

ポテンシャル $V(\Phi, \check{\Phi})$ を構成する $V_2(\Phi)$ および $V_3(\Phi, \check{\Phi})$ の具体的な形を書き下すために，EW- および H ハイパー荷の保存則を考慮にいれなければならない．3 重項 Φ は EW ハイパー荷 $Y_{EW} = 1$ を運ぶので， $\Phi^\dagger \check{\Phi}$ は EW 不変でない．この形は，そのエルミート共役量との積として

のみスカラーポテンシャル $V_2(\Phi)$ に現われる．結果として，場 $\Phi(x)$ の自己相互作用によるポテンシャルは

$$\begin{aligned}
 V_2(\Phi) = & -m_1^2 \Phi^\dagger \Phi - m_2^2 \langle\langle \Phi \rangle\rangle^\dagger \langle\langle \Phi \rangle\rangle + \frac{1}{2} \bar{\lambda}_1 (\Phi^\dagger \Phi)^2 + \frac{1}{2} \bar{\lambda}_2 (\langle\langle \Phi \rangle\rangle^\dagger \langle\langle \Phi \rangle\rangle)^2 \\
 & + \bar{\lambda}_3 (\Phi^\dagger \Phi) (\langle\langle \Phi \rangle\rangle^\dagger \langle\langle \Phi \rangle\rangle) + \bar{\lambda}_4 |\Phi^\dagger \langle\langle \Phi \rangle\rangle|^2 + \bar{\lambda}_5 \Phi^\dagger i\tau_2^i \Phi^{*i} \Phi i\tau_2 \Phi \\
 & + \bar{\lambda}_1 |\Phi^\dagger \tilde{\Phi}|^2 + \bar{\lambda}_2 |\tilde{\Phi}^\dagger \langle\langle \Phi \rangle\rangle|^2 + \bar{\lambda}_3 |\tilde{\Phi}^\dagger (i\tau_2) \langle\langle \Phi^* \rangle\rangle|^2
 \end{aligned} \quad (114)$$

と表わされる．ここで $\bar{\lambda}_5$ を含む項は， Φ^\dagger と Φ の間および ${}^i\Phi^*$ と ${}^i\Phi$ の間で H スカラー積がとられている．

最後に，場 $\tilde{\Phi}(x)$ と $\Phi(x)$ の間のマルチ相互作用に対するポテンシャルは

$$\begin{aligned}
 V_3(\Phi, \tilde{\Phi}) = & \lambda_1 (\Phi^\dagger \Phi) (\tilde{\Phi}^\dagger \tilde{\Phi}) + \lambda_2 (\Phi^\dagger \Phi) (\langle\langle \tilde{\Phi} \rangle\rangle^\dagger \langle\langle \tilde{\Phi} \rangle\rangle) + \lambda_3 (\langle\langle \Phi \rangle\rangle^\dagger \langle\langle \Phi \rangle\rangle) (\tilde{\Phi}^\dagger \tilde{\Phi}) \\
 & + \lambda_4 (\langle\langle \Phi \rangle\rangle^\dagger \langle\langle \Phi \rangle\rangle) (\langle\langle \tilde{\Phi} \rangle\rangle^\dagger \langle\langle \tilde{\Phi} \rangle\rangle) + \lambda_5 (\tilde{\Phi}^\dagger \tilde{\Phi}) (\tilde{\Phi}^\dagger \tilde{\Phi}) + \lambda_6 |\Phi^\dagger (I - \tilde{D}) \tilde{\Phi}|^2 + \lambda_7 |\Phi^\dagger \tilde{D} \tilde{\Phi}|^2
 \end{aligned} \quad (115)$$

といった形をとることがわかる．

7. 対称性の破れの複合機構に関する見解

現在，非常に異なるエネルギースケールにおける多段階の対称性の破れを一貫して記述できる確立された理論は存在しない．ここでは，質量を持たない粒子やタキオンといった非物理的モードを生み出すことなく，可能な限り未知のパラメータの数を抑えた低エネルギー現象に対する有効理論を導ける対称性の破れの複合機構について定式化する．こうした目的のために，3重項 $\tilde{\Phi}(x)$ および $\Phi(x)$ は1つのパラメータによって特定された安定な基準状態^{†3}をとると想定する．それから，基準状態のまわりで3重項を展開し，非物理的なモードが出ないように必要な修正を課す．

高エネルギースケール $\tilde{\Lambda}$ のまわりで，3重項 $\tilde{\Phi}$ の基準状態は3重項 $\Phi(x)$ の影響を無視することによって導かれる．その基準状態は

$$\langle \tilde{\Phi} \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \tilde{v} |2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \tilde{v} |3\rangle \quad (116)$$

といった形をとると想定し， $\tilde{v} \approx \tilde{\Lambda}$ であるとする．これをポテンシャル (111) へ代入することで

$$V_1(\langle \tilde{\Phi} \rangle) = -(\tilde{m}_1^2 + \tilde{m}_2^2) \tilde{v}^2 + \frac{1}{2} (\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 + 2\tilde{\lambda}_3) \tilde{v}^4 \quad (117)$$

^{†3} この対称性の破れの試験的な枠組み内では，スカラー多重項の量子系における安定なポテンシャルの最小値を表わす“真空”の概念を使用することを控える．

が得られ、 \tilde{v} に関する微分をとることで

$$\tilde{v}^2 = \frac{\tilde{m}_1^2 + \tilde{m}_2^2}{\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 + 2\tilde{\lambda}_3} \quad (118)$$

として対称性の破れに対する臨界値 \tilde{v} の 2 乗が決定される。

H 対称性の破れが、スケール $\Lambda \sim \Lambda_{EW}$ のまわりでの低エネルギー領域で対称性の破れに影響を与えると考えるのは自然である。ポテンシャル $V(\Phi, \tilde{v})$ の局所的対称性を破る安定点を調べることににより、3 重項 $\Phi(x)$ に対する基準状態を調べる。低エネルギーに対する簡潔な有効理論を導き出すために、再び、スカラー場 $\Phi(x)$ が最も単純な形

$$\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix} |2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix} |3\rangle \quad (119)$$

で基準状態をとると想定する。ここで v_0 は局所的な対称性を破る安定点を特定するパラメータである。これをポテンシャル $V(\Phi, \tilde{v})$ へ代入することで

$$\begin{aligned} V(\langle \Phi \rangle, \tilde{v}) = & -\left(m_1^2 + m_2^2\right) v_0^2 + \frac{1}{2} \left(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 + 2\tilde{\lambda}_3 + 2\tilde{\lambda}_4 + \frac{4}{3}\tilde{\lambda}_5\right) v_0^4 \\ & + \left(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3 + \tilde{\lambda}_4 + \frac{4}{9}\tilde{\lambda}_6 + \frac{1}{9}\tilde{\lambda}_7\right) v_0^2 \tilde{v}^2 \end{aligned} \quad (120)$$

が得られる。さらに v_0 で $V(\langle \Phi \rangle, \tilde{v})$ の微分をとることで

$$v_0^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2 - \left(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3 + \tilde{\lambda}_4 + \frac{4}{9}\tilde{\lambda}_6 + \frac{1}{9}\tilde{\lambda}_7\right) \tilde{v}^2}{\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 + 2\tilde{\lambda}_3 + 2\tilde{\lambda}_4 + \frac{4}{3}\tilde{\lambda}_5} \quad (121)$$

が得られる。

明らかに、最も単純に基準状態を (116) および (119) と選ぶことは H 対称性を部分的にのみ壊す。以下の節で具体的に示す様に、残りの対称性は NG 粒子の出現を引き起こす。しかしながら、基準状態のベクトルが持つ特有の性質を利用することにより、その様な困難を回避する様な機構がある。基準状態は (116) および (119) の右辺で示されている様に、固有ベクトル $|2\rangle$ および $|3\rangle$ の線形結合によって一意的に表わすことができる。こうした性質は、調節可能な混合パラメータを加えることによって、1 つの成分場が $|2\rangle$ および $|3\rangle$ の両方の係数で共有できる様に、3 重項を基準状態のまわりで展開することを可能にさせる。3 重項 $\tilde{\Phi}(x)$ および $\Phi(x)$ のそうした展開式は、それぞれ、以下の(123) および (146) で与えられる。混合パラメータを使って成分場を共有させることにより、破れた対称性の相において、残りの対称性が破られる様に振舞

う．これにより，質量をもたないスカラー場が出現することを制限できる．

対称性の破れた相でのスカラー 3 重項の分解をラグランジュ密度に代入することで，必然的に，成分スカラー場に線形的に依存する項が生成される．その様な項は非物理的であり有害なものとなる．それは成分場の量子が他の場と相互作用することなしに生成消滅するからである．理論からそうした項を消去するために，それらの項の係数は消えると仮定しなければならないが，こうした条件を課すことは可能である．なぜならそれらの係数は，スカラー 3 重項の展開式 (123) および (149) の中に，ある調節可能なパラメータを所有しているからである．言い換えると，スカラー場の有害な線形項の係数が消えなければならないと仮定することによって，我々は分解に対する混合パラメータの値を決定することが可能となる．結果として，消えない混合パラメータを利用するこの機構は，残りの対称性を壊し，NG モードに成るはずであった場に有限な質量を獲得させることを可能にする．

しかしながら，低エネルギーでの対称性の破れにおいては，成分場のこの混合機構は，基準状態のまわりでの 3 重項 $\Phi(x)$ の展開式 (146) に対して，虚質量を持つタキオンモードとしての成分場を禁止させるのに十分でない．対称性の破れの複合機構を完全にするために他の手段が必要となる．その様なタキオンモードが出現することを抑制するためには，式 (145) でなされる様なパラメータ v_0 の再スケール化の自由度を利用しなければならない．

8. 高エネルギースケール $\tilde{\Lambda}$ での対称性の破れ

スカラー H3 重項 $\check{\Phi}(x)$ および $\Phi(x)$ は多くの成分場を所有する．スカラー 3 重項の自由度の一部分は，対称性の破れのヒッグス機構を通してゲージ場へ移り，ゲージ場に有効質量をもたらし働きをする．また，実験的制限により対称性の破れにおいて，スカラー 3 重項の残りのモードは有限な質量を獲得しなければならない．

このヒッグス機構で注意すべき点は，スカラー多重項のいくつかの残りの成分場が，質量のないモードとして残る NG 理論の危険性にさらされるかもしれないことである．それゆえ，対称性の破れにおいて，質量を持たないスカラー場を抑制するための新しい機構を見つけることが必要となる．

8.1 H 対称性のゲージ固定

スケール $\tilde{\Lambda} = \tilde{v}$ での H 対称性の破れた相において，スカラー 3 重項の場 $\check{\Phi}(x)$ は

$$\check{\Phi}(x) = \Omega(\check{\vartheta}(x)) \check{\Phi}_0(x) \quad (122)$$

と分解できる．ここで $\Omega(\check{\vartheta}(x))$ は，ゲージ自由度として取り去られる様に割りあてた局所場

$\check{\theta}_j(x)$ ($j = 0, 1, 2, 3$) を含む H 対称性のユニタリ群の要素である．ゲージ固定部分 $\check{\Phi}_0(x)$ は

$$\check{\Phi}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\check{\xi}_1(x)|1\rangle + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\check{\alpha}\check{\xi}_2(x) - \sqrt{\frac{2}{3}}\check{v}\right)|2\rangle + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\check{\beta}\check{\xi}_2(x) + \frac{1}{\sqrt{3}}\check{v}\right)|3\rangle \quad (123)$$

であると想定する．この中にある $\check{\xi}_1(x)$ および $\check{\xi}_2(x)$ は実スカラー場であり， $\check{\alpha} = \cos\check{\theta}$ および $\check{\beta} = \sin\check{\theta}$ は混合に対するパラメータである．スカラー 3 重項 $\check{\Phi}(x)$ に対してこうしたゲージ固定を選ぶことで，ゲージ場 \check{A}_μ は

$$\mathcal{D}_\mu(\check{A}') = \Omega^{-1}(\check{\theta}(x))\mathcal{D}_\mu(\check{A})\Omega(\check{\theta}(x)) \quad (124)$$

によって定義された局所ゲージ変換 $\check{A}_\mu(x) \rightarrow \check{A}'_\mu(x)$ を通して，質量を有するベクトル場へと変化する．ここで $\mathcal{D}_\mu(\check{A})$ は(110)の中のスカラー 3 重項 $\check{\Phi}(x)$ に対する共変微分である．

スケール $\check{\Lambda}$ でスカラー 3 重項 $\check{\Phi}(x)$ に課された H 対称性のゲージ固定は，他の全ての場に影響を与える．具体的に，共変微分の中のゲージ場を通して，フェルミオン 3 重項 $\Psi_h^f(x)$ およびスカラー 3 重項 $\Phi(x)$ は，それぞれ

$$\Psi_h^f(x) = \Omega(\check{\theta}(x))\underline{\Psi}_h^f(x) \quad (125)$$

および

$$\Phi(x) = \Omega(\check{\theta}(x))\underline{\Phi}(x) \quad (126)$$

と分解される．ここで $\Omega(\check{\theta}(x))$ は分解 (122) 中にあるものと同じユニタリ因子である．すなわち，高エネルギースケール $\check{\Lambda}$ のまわりでの H 対称性のゲージ固定は，余剰なゲージ固定部分 $\underline{\Phi}(x)$ および $\underline{\Psi}_h^f(x)$ を残し，スカラーおよびフェルミオン 3 重項 $\Phi(x)$ および $\Psi_h^f(x)$ からユニタリ H 相因子を分離することを必然的に要求する．

8.2 $\check{\Phi}(x)$ に由来するスカラー場

式 (122) および (123) で示された分解を (111) のポテンシャル $V_1(\check{\Phi})$ に代入することで

$$\begin{aligned} V_1(\check{\Phi}_0) = & \check{v} \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} [\check{m}_1^2 - (\check{\lambda}_1 + \check{\lambda}_3)\check{v}^2] (\sqrt{2}\check{\alpha} - \check{\beta}) - \sqrt{6} [\check{m}_2^2 - (\check{\lambda}_2 + \check{\lambda}_3)\check{v}^2] \check{\beta} \right\} \check{\xi}_2 \\ & + \frac{1}{2} [-\check{m}_1^2 + (\check{\lambda}_1 + \check{\lambda}_3)\check{v}^2] (\check{\xi}_1^2 + \check{\xi}_2^2) \\ & + \frac{1}{2} \left\{ -3\check{\beta}^2\check{m}_2^2 + \left[\frac{2}{3}\check{\lambda}_1(\sqrt{2}\check{\alpha} - \check{\beta})^2 + 3(3\check{\lambda}_2 + \check{\lambda}_3)\check{\beta}^2 - 4\check{\lambda}_3(\sqrt{2}\check{\alpha} - \check{\beta})\check{\beta} \right] \check{v}^2 \right\} \check{\xi}_2^2 \\ & - \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\check{\lambda}_1(\sqrt{2}\check{\alpha} - \check{\beta}) - \frac{3}{2}\check{\lambda}_3\check{\beta} \right] \check{v}(\check{\xi}_1^2 + \check{\xi}_2^2)\check{\xi}_2 + \sqrt{\frac{3}{2}} [3\check{\lambda}_2\check{\beta} - \check{\lambda}_3(\sqrt{2}\check{\alpha} - \check{\beta})] \check{\beta}^2\check{v}\check{\xi}_2^3 \\ & + \frac{1}{8}\check{\lambda}_1(\check{\xi}_1^2 + \check{\xi}_2^2)^2 + \frac{9}{8}\check{\lambda}_2\check{\beta}^4\check{\xi}_2^4 + \frac{3}{4}\check{\lambda}_3\check{\beta}^2(\check{\xi}_1^2 + \check{\xi}_2^2)\check{\xi}_2^2 + V_1(\check{v}) \end{aligned} \quad (127)$$

が導かれる．こうして得られたポテンシャルの第 1 項は場 $\xi_2(x)$ に関して線形となる．この非物理的な項は消えると仮定すると，条件

$$\left[\tilde{m}_1^2 - (\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_3)\tilde{v}^2\right](\sqrt{2}\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) - 3\left[\tilde{m}_2^2 - (\tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3)\tilde{v}^2\right]\tilde{\beta} = 0 \quad (128)$$

が得られる．これよりパラメータ $\tilde{\theta}$ を固定する条件として

$$\tan \tilde{\theta} = \sqrt{2} \frac{\tilde{m}_1^2 - (\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_3)\tilde{v}^2}{\tilde{m}_1^2 + 3\tilde{m}_2^2 - (\tilde{\lambda}_1 + 3\tilde{\lambda}_2 + 4\tilde{\lambda}_3)\tilde{v}^2} \quad (129)$$

が得られる．

実スカラー場 $\xi_1(x)$ および $\xi_2(x)$ に対するポテンシャルは

$$V_1(\Phi_0) = V_1(\tilde{v}) + \frac{1}{2} m_{\xi_1}^2 \xi_1^2 + \frac{1}{2} m_{\xi_2}^2 \xi_2^2 + \dots \quad (130)$$

と計算される．ここで省略記号は相互作用項を表わし，質量は

$$m_{\xi_1}^2 = -\tilde{m}_1^2 + (\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_3)\tilde{v}^2 \propto \sin \tilde{\theta} \quad (131)$$

および

$$m_{\xi_2}^2 = m_{\xi_1}^2 - 3\tilde{m}_2^2 \sin^2 \tilde{\theta} + \frac{1}{3} \left[4\tilde{\lambda}_1 \cos^2 \tilde{\theta} - 2\sqrt{2}(\tilde{\lambda}_1 + 3\tilde{\lambda}_3) \sin 2\tilde{\theta} + (2\tilde{\lambda}_1 + 27\tilde{\lambda}_2 + 21\tilde{\lambda}_3) \sin^2 \tilde{\theta} \right] \tilde{v}^2 \quad (132)$$

によって与えられる．ここで，場 $\xi_1(x)$ の質量が $\sin \tilde{\theta}$ に比例することを注意しておく．もし $\tilde{\theta} = 0$ であるなら，場 $\xi_1(x)$ は必然的に質量を持たないモードとして残る．それゆえ，展開式 (123) の中で， $|2\rangle$ および $|3\rangle$ の両方の係数に成分場 $\xi_2(x)$ が共有されていることは，残りの対称性を破り，NG 理論から場 $\xi_1(x)$ を解放するのに必要不可欠なことであると言える．

8.3 H ゲージ場を起源とするベクトル場

変換 (124) によってゲージ場 $\check{A}_\mu(x)$ と関係する質量を有するベクトル場 $\check{A}'_\mu(x)$ の配位を導出するために，スカラー 3 重項の基準状態 (116) に関する共変微分の作用を計算すると

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu(\check{A}')\langle\check{\Phi}\rangle &= \left(\partial_\mu - i\check{g}\check{A}_\mu^{(2)j} \frac{1}{2} \check{\tau}_j - i\check{g}'\check{A}_\mu^{(1)'} \check{y}_\Phi \check{D} \right) \langle\check{\Phi}\rangle \\ &= i\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2}M_{\check{W}}\check{W}_\mu^+ - M_{\check{Y}}\check{Y}_\mu \\ -\sqrt{2}M_{\check{W}}\check{W}_\mu^+ - M_{\check{Y}}\check{Y}_\mu \\ \sqrt{2}M_{\check{Z}}\check{Z}_\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (133)$$

となる．ここで，ベクトル場 $\check{W}_\mu(x)^\pm$ および $\check{Y}_\mu(x)$ ， $\check{Z}_\mu(x)$ は，暫定的に

$$\check{W}_\mu^\pm = \frac{\check{A}_\mu^{(2)1} \mp i\check{A}_\mu^{(2)2}}{\sqrt{2}}, \quad \check{Y}_\mu = \frac{\check{g}\check{A}_\mu^{(2)3} + 2\check{g}'\check{y}_\Phi\check{A}_\mu^{(1)'}}{\sqrt{\check{g}^2 + 4\check{g}'^2\check{y}_\Phi^2}}, \quad \check{Z}_\mu = \frac{\check{g}\check{A}_\mu^{(2)3} - \check{g}'\check{y}_\Phi\check{A}_\mu^{(1)'}}{\sqrt{\check{g}^2 + \check{g}'^2\check{y}_\Phi^2}}, \quad (134)$$

によって定義され、それらの質量はそれぞれ

$$M_W^2 = \frac{1}{3}\check{g}^2\check{v}^2, \quad M_Y^2 = \frac{1}{9}\left(\check{g}^2 + 4\check{g}'^2\check{Y}_\Phi^2\right)\check{v}^2, \quad M_Z^2 = \frac{2}{9}\left(\check{g}^2 + \check{g}'^2\check{Y}_\Phi^2\right)\check{v}^2 \quad (135)$$

によって与えられる．

今までのところ，結合定数 \check{g} および \check{g}' と H ハイパー荷 \check{Y}_Φ の間に制限はないと想定してきた．しかしながら，理論の一貫性を考えたとき，それらの間に付加的な関係が要求される．すなわち，(105) 中のラグランジュ密度 $\mathcal{L}_H^G(\check{A}_\mu(x)) = \mathcal{L}_H^G(\check{A}'_\mu(x))$ へ関係式 (134) の逆関係を代入し，ベクトル場 $\check{Y}_\mu(x)$ および $\check{Z}_\mu(x)$ の運動項を計算する．その時，関係

$$\check{g}^2 = 2\check{g}'^2\check{Y}_\Phi^2 \quad (136)$$

が成り立たない限り， $\partial_\mu\check{Y}_\nu\partial^\mu\check{Z}^\nu$ の様な非物理的な運動項を生じさせてしまうことがわかる．この条件は，ベクトル場 $\check{Y}_\mu(x)$ および $\check{Z}_\mu(x)$ とゲージ場 $\check{A}_\mu^{(2)\nu 3}$ および $\check{A}_\mu^{(1)\nu}$ を直交変換

$$\check{Y}_\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}\check{A}_\mu^{(2)\nu 3} + \sqrt{\frac{2}{3}}\check{A}_\mu^{(1)\nu}, \quad \check{Z}_\mu = \sqrt{\frac{2}{3}}\check{A}_\mu^{(2)\nu 3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\check{A}_\mu^{(1)\nu} \quad (137)$$

によって関係づけ，その全てのベクトル場の質量を $M_Y^2 = M_Z^2 = M_W^2 = \frac{1}{3}\check{g}^2\check{v}^2$ と縮退させる．

次に，スカラー 3 重項 $\check{\Phi}(x)$ の展開式 (123) をラグランジアン密度 $\mathcal{L}(\check{\Phi})$ の運動項に代入することで，新しいスカラー場およびベクトル場が

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_\mu\check{\Phi})^\dagger(\mathcal{D}^\mu\check{\Phi}) &= \frac{1}{2}\partial_\mu\check{\xi}_1\partial^\mu\check{\xi}_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu\check{\xi}_2\partial^\mu\check{\xi}_2 \\ &+ M_W^2\check{W}_\mu^+\check{W}^{\mu-} + \frac{1}{2}M_Y^2\check{Y}_\mu\check{Y}^\mu + \frac{1}{2}M_Z^2\check{Z}_\mu\check{Z}^\mu + \dots \end{aligned} \quad (138)$$

の形で与えられる．ここで省略記号は新しい質量を持つベクトル場とスカラー場の間の相互作用を示す．

こうして，スケール $\check{\Lambda}$ における対称性の破れの複合機構により，質量を持たない全てのゲージ場およびスカラー場を，質量を持つゲージ場およびスカラー場に変換させることに成功する．それらの結果に到達するために，3 重項 $\check{\Phi}(x)$ は関係 (136) を満たすゼロでない H ハイパー荷を持ち，(123) 中の混合角が関係式 (129) に従う一定の値をとると想定する必要がある．

スケール $\check{\Lambda}$ での対称性の破れを通して，3 重項 $\check{\Phi}(x)$ の自由度はゲージ場に移される．この相転移による場の自由度の移動に対する概略図は

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{array}{ll} 4\text{つのゲージ場 } \check{A}_\mu^{(2)i}(x) (i=1, 2, 3) \text{ および } \check{A}_\mu^{(1)}(x) & : 4 \times 2 \\ \text{質量を持たない3つの複素スカラー場 } \check{\phi}_i(x) (i=1, 2, 3) & : 3 \times 2 \end{array} \right\} \\ &\quad \Downarrow \\ &\left\{ \begin{array}{ll} \text{質量を持つ1つのベクトル場 } \check{W}_\mu^+(x) & : 2 \times 3 \\ \text{質量を持つ2つの実ベクトル場 } \check{Y}_\mu(x) \text{ および } \check{Z}_\mu(x) & : 2 \times 3 \\ \text{質量を持つ2つの実スカラー場 } \check{\xi}_i(x) (i=1, 2) & : 2 \times 1 \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (139)$$

としてまとめられる．ここで独立な場のモードの数は，相転移の前後で $4 \times 2 + 3 \times 2 = 14 = 2 \times 3 + 2 \times 3 + 2 \times 1$ と保存される．

8.4 ニュートリノ種に対するマジョラナ質量行列

スケール Λ での対称性の破れを通して，ニュートリノはマジョラナ型の質量を獲得する． Φ_0 の展開式 (123) をラグランジュ密度 (101) へ代入することで

$$\mathcal{L}_M \rightarrow \mathcal{L}_M^M = \overline{\Psi}_L^{\nu c} \check{M}_\nu \Psi_R^\nu + \text{h.c.} + \dots \quad (140)$$

としてニュートリノのマジョラナ質量に対する有効ラグランジュ密度が導かれる．ここで，省略記号はニュートリノとスカラー場 $\xi_i(x)$ との相互作用を表わしている． M_ν はマジョラナ質量行列

$$\check{M}_\nu = \frac{1}{\sqrt{3}} B_{\nu 1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}} B_{\nu 2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + C_\nu \check{\tau}_2 \quad (141)$$

によって与えられる．ここで， $B_{\nu 1} = \check{g}_{M1} \check{\nu}$ および $B_{\nu 2} = \check{g}_{M2} \check{\nu}$ ， $C_\nu = \check{m}_M$ である．この質量行列はマジョラナ相互作用の中の結合定数と同じ数のパラメータによって特徴づけられていることに注意しよう．

9. 低エネルギースケール $\Lambda \sim \Lambda_{EW}$ での対称性の破れ

エネルギースケールが Λ 以下の領域において，式 (126) でユニタリ H-相因子が切り離された 3 重項 $\Phi(x)$ の力学系を記述するためには，簡約ラグランジュ密度 $\mathcal{L}(\Phi, \Phi_0)$ を使うべきである．その後，スケール Λ 近くの低エネルギー領域まで下がると，全ての物理量に対する繰り込み群による効果が考慮されなければならない．特に，全ての結合定数はスケール Λ での値まで下がる．しかしながら，簡単のために，くりこみの効果を含んだ物理量に対しても同じ記号を用いることにする．低エネルギースケール Λ のまわりでの EW 対称性の破れに関する解析を行うために，ポテンシャル $V_2(\Phi)$ および $V_3(\Phi, \check{\nu})$ を調べなければならない．H 対称性の影響を反映し，ポテンシャル $V_3(\Phi, \check{\nu})$ は

$$\begin{aligned} V_3(\Phi, \check{\nu}) = & (\lambda_1 + \lambda_2) \check{\nu}^2 \Phi^\dagger \Phi + (\lambda_3 + \lambda_4) \check{\nu}^2 \langle\langle \Phi \rangle\rangle^\dagger \langle\langle \Phi \rangle\rangle \\ & + \frac{2}{3} \lambda_5 \check{\nu}^2 |\langle\Phi|1\rangle|^2 + \frac{2}{3} \lambda_6 \check{\nu}^2 |\langle\Phi|2\rangle|^2 + \frac{1}{3} \lambda_7 \check{\nu}^2 |\langle\Phi|3\rangle|^2 \end{aligned} \quad (142)$$

となる．

9.1 3重項 $\Phi(x)$ に由来するスカラー場

EW 対称性の破れた相における 3 重項 $\Phi(x)$ および $\Psi(x)$ の振舞いを調べるために，ユニタリゲージ因子をさらに

$$\underline{\Phi}(x) = \Omega_{EW}(\vartheta(x))\Phi_0(x) \quad (143)$$

と分離する必要がある．ここで $\Omega_{EW}(\vartheta(x))$ は EW 対称性のユニタリ位相因子である．これに対応して，フェルミオン場に対しても

$$\underline{\Psi}_h^f(x) = \Omega_{EW}(\vartheta(x))\Psi_{h0}^f(x) \quad (144)$$

と分解しなければならない．7 節で述べた様に，(116) の状態のまわりで 3 重項 Φ_0 を展開すると，質量を持たない成分場あるいは虚の質量を持つタキオンモードの成分場を生じさせる危険がある．こうした非物理的モードが現れることを抑えるために，

$$v^2 = Z v_0^2 \quad (Z > 1) \quad (145)$$

によってパラメータ v_0 を新しい値 v で再調整し， $\Phi_0(x)$ を

$$\Phi_0(x) = \begin{pmatrix} \zeta_1^+(x) \\ \zeta_1^0(x) \end{pmatrix} |1\rangle + \begin{pmatrix} \zeta_2^+(x) \\ \zeta_2^0(x) - \sqrt{\frac{2}{3}}v \end{pmatrix} |2\rangle + \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta_3^0(x) + \frac{1}{\sqrt{3}}v \end{pmatrix} |3\rangle \quad (146)$$

と展開する．ここで $\zeta_i^+(x)$ ($i = 1, 2$) および $\zeta_i^0(x)$ ($i = 1, 2, 3$) は複素スカラー成分場である．以下で確かめる様に，非物理的モードを除外するためには，条件 $Z > 1$ が要求される．

$\Phi(x)$ の表現 (126) ((143) および (146)) はポテンシャル (107) に代入されなければならない．成分スカラー場に関して 2 次のオーダーまで表わすと

$$\begin{aligned} V(\zeta, \tilde{v}) = & -\sqrt{\frac{2}{3}}v[-m_1'^2 + (\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_4 + \bar{\lambda}_3)v^2 + \frac{2}{3}\lambda_6\tilde{v}^2](\zeta_2^{0*} + \zeta_2^0) \\ & + \sqrt{\frac{1}{3}}v[-m_1'^2 - 3m_2'^2 + (\bar{\lambda}_1 + 3\bar{\lambda}_2 + 4\bar{\lambda}_3 + 4\bar{\lambda}_4 + 2\bar{\lambda}_3)v^2 + \frac{1}{3}\lambda_7\tilde{v}^2](\zeta_3^{0*} + \zeta_3^0) \\ & + [-m_1'^2 + (\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_2)v^2](|\zeta_1^+|^2 + |\zeta_2^+|^2) - 2\bar{\lambda}_5v_0^2(|\zeta_1^+|^2 + \frac{1}{3}|\zeta_2^+|^2) \\ & + \frac{8}{3}\tilde{\lambda}_1v^2|\zeta_1^+|^2 + [-m_1'^2 + (\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_4 + \bar{\lambda}_5 + \bar{\lambda}_3)v^2](|\zeta_1^0|^2 + |\zeta_2^0|^2) \\ & + \frac{2}{3}\lambda_5\tilde{v}^2(|\zeta_1^+|^2 + |\zeta_1^0|^2) + \frac{2}{3}\lambda_6\tilde{v}^2(|\zeta_2^+|^2 + |\zeta_2^0|^2) + \frac{1}{3}\lambda_7\tilde{v}^2|\zeta_3^0|^2 \\ & + [-m_1'^2 - 3m_2'^2 + (\bar{\lambda}_1 + 3\bar{\lambda}_2 + 4\bar{\lambda}_3 + 4\bar{\lambda}_4 + 2\bar{\lambda}_3)v^2]|\zeta_3^0|^2 \\ & + \frac{1}{3}\tilde{\lambda}_1v^2(\zeta_2^{0*} + \zeta_2^0)^2 + \left(\frac{1}{6}\bar{\lambda}_1 + \frac{3}{2}\bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_4\right)v^2(\zeta_3^{0*} + \zeta_3^0)^2 \\ & - \sqrt{2}\left(\frac{1}{3}\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_4 + \bar{\lambda}_3\right)v^2(\zeta_2^{0*} + \zeta_2^0)(\zeta_3^{0*} + \zeta_3^0) + \dots \end{aligned} \quad (147)$$

となる．ここで $m_1'^2$ および $m_2'^2$ は

$$m_1'^2 = m_1^2 - (\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2)\tilde{v}^2, \quad m_2'^2 = m_2^2 - (\tilde{\lambda}_3 + \tilde{\lambda}_4)\tilde{v}^2, \quad (148)$$

といった 3 重項 Φ の影響を取り込んだ還元ヒッグス質量パラメータの 2 乗であり，下線部分は $\zeta_2^{0*}(x) + \zeta_2^0(x)$ および $\zeta_3^{0*}(x) + \zeta_3^0(x)$ に線形的に依存している非物理的な部分である．こうした部分を消去するために，実スカラー場 $\eta_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$) および混合角 θ を用いて，成分場 $\zeta_2^0(x)$ および $\zeta_3^0(x)$ を

$$\zeta_2^0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\eta_1(x) \cos \theta + i\eta_2(x)], \quad \zeta_3^0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\eta_1(x) \sin \theta + i\eta_3(x)] \quad (149)$$

によって表現し直す．その時，式 (147) の中の下線部分は，新しい場 $\eta_1(x)$ に線形的に依存する 1 つの項にまとめられる．こうした有害な項が消えることを要求することで，混合角を固定する様な制限

$$\begin{aligned} & \sqrt{2}[-m_1'^2 + (\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_4 + \widetilde{\lambda}_3)v^2 - \frac{2}{3}\lambda_6\tilde{v}^2] \cos \theta \\ &= [-m_1'^2 - 3m_2'^2 + (\bar{\lambda}_1 + 3\bar{\lambda}_2 + 4\bar{\lambda}_3 + 4\bar{\lambda}_4 + 2\widetilde{\lambda}_3)v^2 - \frac{1}{3}\lambda_7\tilde{v}^2] \sin \theta \end{aligned} \quad (150)$$

が見つかる．この条件から，混合パラメータは

$$\tan \theta = \sqrt{2} \frac{m_1'^2 - (\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_4 + \widetilde{\lambda}_3)v^2 + \frac{2}{3}\lambda_6\tilde{v}^2}{m_1'^2 + 3m_2'^2 - (\bar{\lambda}_1 + 3\bar{\lambda}_2 + 4\bar{\lambda}_3 + 4\bar{\lambda}_4 + 2\widetilde{\lambda}_3)v^2 + \frac{1}{3}\lambda_7\tilde{v}^2} \quad (151)$$

によって決定される．

結果として，対称性の第二段階目の破れを通して，ヒッグスポテンシャルの定数および 2 次の項は，3 つのスカラー場 $\zeta_1^+(x)$ ， $\zeta_2^+(x)$ ， $\zeta_1^0(x)$ と 3 つの実スカラー場 $\eta_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$) を用いて

$$\begin{aligned} V(\zeta, \eta, \tilde{v}) &= V(v, \tilde{v}) + m_{\zeta_1^+}^2 \zeta_1^+ \zeta_1^- + m_{\zeta_2^+}^2 \zeta_2^+ \zeta_2^- + m_{\zeta_1^0}^2 \zeta_1^{0*} \zeta_1^0 \\ &+ \frac{1}{2} m_{\eta_1}^2 \eta_1^2 + \frac{1}{2} m_{\eta_2}^2 \eta_2^2 + \frac{1}{2} m_{\eta_3}^2 \eta_3^2 + \cdots \end{aligned} \quad (152)$$

と表せる．複素場 $\zeta_1^+(x)$ および $\zeta_2^+(x)$ ， $\zeta_1^0(x)$ は質量

$$\begin{aligned} m_{\zeta_1^+}^2 &= -m_1'^2 + (\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_3 - 2\bar{\lambda}_5 + \frac{8}{3}\widetilde{\lambda}_1 + \widetilde{\lambda}_2)v^2 + \frac{2}{3}\lambda_5\tilde{v}^2, \\ m_{\zeta_2^+}^2 &= -m_1'^2 + (\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_3 - \frac{2}{3}\bar{\lambda}_5 + \widetilde{\lambda}_2)v^2 + \frac{2}{3}\lambda_6\tilde{v}^2, \\ m_{\zeta_1^0}^2 &= -m_1'^2 + (\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_4 + \widetilde{\lambda}_3)v^2 + \frac{2}{3}\lambda_5\tilde{v}^2, \end{aligned} \quad (153)$$

を持つ．3 つの実スカラー場 $\eta_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$) の質量は

$$\begin{aligned}
 m_{\eta_1}^2 &= m_{\eta_2}^2 \cos^2 \theta + m_{\eta_3}^2 \sin^2 \theta \\
 &+ 4 \left[\frac{1}{3} \bar{\lambda}_1 \cos^2 \theta + \left(\frac{1}{6} \bar{\lambda}_1 + \frac{3}{2} \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_4 \right) \sin^2 \theta \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{2} \left(\frac{1}{3} \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_4 + \bar{\lambda}_5 \right) \cos \theta \sin \theta \right] v^2 \\
 &+ \left(\frac{2}{3} \lambda_6 \cos^2 \theta + \frac{1}{3} \lambda_7 \sin^2 \theta \right) \tilde{v}^2, \\
 m_{\eta_2}^2 &= -m_1'^2 + (\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_4 + \bar{\lambda}_5) v^2 + \frac{2}{3} \lambda_6 \tilde{v}^2 \propto \sin \theta, \\
 m_{\eta_3}^2 &= -m_1'^2 - 3m_2'^2 + (\bar{\lambda}_1 + 3\bar{\lambda}_2 + 4\bar{\lambda}_3 + 4\bar{\lambda}_4 + 2\bar{\lambda}_5) v^2 + \frac{1}{3} \lambda_7 \tilde{v}^2,
 \end{aligned} \tag{154}$$

と計算される．ここで注意すべきは $m_{\eta_2}^2$ が $\sin \theta$ に比例することである．もし $\theta = 0$ であるなら，実スカラー場 $\eta_2(x)$ は NG ボソンに成ることを意味する．したがって，NG ボソンを排除するために， $\theta \neq 0$ が要求される．

6 個のボソン場の 2 乗質量に対するこれらの式は，6 個以上の未知の調節可能な結合定数を含む．それゆえ，結合定数の値を適切に選ぶことにより，全ての 2 乗質量を正定値にすることは可能に見える．しかしながら，この場合はそう単純ではない．(121) における v_0^2 の式は $m_{\eta_2}^2$ と $m_{\eta_3}^2$ の間に

$$2m_{\eta_2}^2 + m_{\eta_3}^2 = (Z - 1)(3\bar{\lambda}_1 + 3\bar{\lambda}_2 + 6\bar{\lambda}_3 + 6\bar{\lambda}_4 + 4\bar{\lambda}_5)v^2 \tag{155}$$

という恒等式をもたらす．それゆえ，もし $Z = 1$ であるなら， $m_{\eta_2}^2$ が $m_{\eta_3}^2$ のどちらかが負，あるいはどちらもゼロでなければならない．その様な非物理的モードを除外するためには， v_0 を v に再調整し，条件 $Z > 1$ を課す必要がある．

9.2 EW ゲージ場によるベクトル場

ゲージ場の依存性を示すために，スカラー 3 重項 Φ に対する共変微分(113) を $\mathcal{D}_\mu(A, \check{A})$ によって表す．この時，H および EW 対称性に対するゲージ固定により共変微分は

$$\mathcal{D}_\mu(A', \check{A}') = \Omega_{\text{EW}}^{-1}(\vartheta(x)) \Omega^{-1}(\check{\vartheta}(x)) \mathcal{D}_\mu(A, \check{A}) \Omega(\check{\vartheta}(x)) \Omega_{\text{EW}}(\vartheta(x)) \tag{156}$$

として変換する．ここで $A'(x)$ は破れた相でのベクトル場である．ベクトル場 $A'(x)$ の配位を導き，スカラー成分場との相互作用を調べるために，展開式 (146) のスカラー 3 重項に関する共変微分の作用を調べる必要がある．この計算を行う際，ベクトル場 $\check{W}_\mu(x)$ および $\check{Y}_\mu(x)$, $\check{Z}_\mu(x)$ がスケール $\check{\Lambda}$ の大きな質量を持つため，それらの効果は低エネルギーのフレーバー物理にほとんど影響を及ぼさない．ベクトル場 $A'(x)$ の配位を調べるために， $\Phi_0(x)$ に関する共変微分の作用

を計算すると

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu(A, 0)\langle \underline{\Phi} \rangle &= \left(\partial_\mu - ig_2 A_\mu^{(2)j} \frac{1}{2} \tau_j - ig_1 A_\mu^{(1)} \frac{1}{2} \right) \langle \underline{\Phi} \rangle \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -iM_W W_\mu^+ \\ i\frac{1}{\sqrt{2}}M_Z Z_\mu \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (157)$$

となる．ここで，元の WS 理論と同様に，弱ボソン場および電磁場は

$$W_\mu^\pm = \frac{A_\mu^{(2)1} \mp iA_\mu^{(2)2}}{\sqrt{2}}, \quad Z_\mu = \frac{g_2 A_\mu^{(2)3} - g_1 A_\mu^{(1)}}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}}, \quad A_\mu = \frac{g_2 A_\mu^{(2)3} + g_1 A_\mu^{(1)}}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}} \quad (158)$$

によって定義される．電磁場 $A_\mu(x)$ は質量がゼロで，弱ボソン $W_\mu(x)$ および $Z_\mu(x)$ は，それぞれ質量

$$M_W^2 = \frac{1}{2}g_2^2 v^2, \quad M_Z^2 = \frac{1}{2}(g_2^2 + g_1^2)v^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta_W} M_W^2 \quad (159)$$

を持つ．ここで θ_W は $g_1/g_2 = \tan \theta_W$ によって定義されたワインバーグ角である．

質量を持つスカラー場およびベクトル場の運動項の 2 乗項は

$$\begin{aligned} (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) &= \sum_{a=1,2} \partial_\mu \zeta_a^- \partial^\mu \zeta_a^+ + \partial_\mu \zeta_1^{0*} \partial^\mu \zeta_1^0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \partial_\mu \eta_i \partial^\mu \eta_i \\ &\quad + M_W^2 W_\mu^+ W^{\mu-} + \frac{1}{2} M_Z^2 Z^\mu Z_\mu + \cdots \end{aligned} \quad (160)$$

と計算できる．ここで \cdots は $\zeta_i^+(x)$ ($i = 1, 2$) , $\zeta_1^0(x)$, $\eta_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$) とゲージ場 $A_\mu(x)$ およびベクトル場 $\check{W}_\mu(x)$, $\check{Z}_\mu(x)$ の相互作用を表わす．

全体を通して，EW2 重項 $\Phi(x)$ の H3 重項は，質量を持たないスカラー場を全く残すことなく，EW ゲージ場から電磁場 $A_\mu(x)$ と弱ボソン場 $W_\mu^\pm(x)$ および $Z_\mu(x)$ も生成するヒッグス機構を作り出すことがわかった．ここで，電弱アップおよびダウンセクターのそれぞれに対して，スカラー場からゲージ場への自由度の移動をたどると電弱アップセクターに対しては

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{array}{ll} \text{2つのゲージ場 } A_\mu^{(2)1}(x) \text{ および } A_\mu^{(2)2}(x) & : 2 \times 2 \\ \text{質量を持たない3つの複素スカラー場 } \phi_i^+(x) (i = 1, 2, 3) & : 3 \times 2 \end{array} \right\} \\ &\quad \Downarrow \\ &\left\{ \begin{array}{ll} \text{質量を持つ1つの荷電ベクトル場 } W_\mu^+(x) & : 2 \times 3 \\ \text{質量を持つ2つの複素スカラー場 } \zeta_1^+(x) \text{ および } \zeta_2^+(x) & : 2 \times 2 \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (161)$$

となり，電弱ダウンセクターに対しては

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{2つのゲージ場 } A_\mu^{(2)3}(x) \text{ および } A_\mu^{(1)}(x) & : 2 \times 2 \\ \text{質量を持たない3つの複素スカラー場 } \phi_i^0(x) (i = 1, 2, 3) & : 3 \times 2 \end{array} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{質量を持つ1つの実ベクトル場 } Z_\mu(x) & : 1 \times 3 \\ \text{質量を持たない1つの電磁場 } A_\mu(x) & : 1 \times 2 \\ \text{質量を持つ1つの複素スカラー場 } \zeta_1^0(x) & : 1 \times 2 \\ \text{質量を持つ3つの実スカラー場 } \eta_i(x) (i = 1, 2, 3) & : 3 \times 1 \end{array} \right\} \quad (162)$$

となることがわかる．相転移の前後において，場の独立モードの数の保存は，電弱アップセクターに対しては $2 \times 2 + 3 \times 2 = 10 = 2 \times 3 + 2 \times 2$ となり，電弱ダウンセクターに対しては $2 \times 2 + 3 \times 2 = 10 = 1 \times 3 + 1 \times 2 + 1 \times 2 + 3 \times 1$ と成ることが確かめられる．

9.3 クォークおよびレプトンに対するディラック質量行列

高エネルギースケール Λ において，ユニタリゲージ因子は(125)の3重項 $\underline{\Psi}_h^f(x)$ を残してフェルミオン3重項から分離される．スケール Λ の周りの低エネルギー領域では，繰り込み群の効果が，ラグランジュ密度の中の湯川相互作用部分 (94) および(95)の全ての量に対して適切に考慮されていると仮定する．

その時，スケール $v = 246 \text{ GeV}$ [54] での EW 対称性の破れを通して，フェルミオン場はディラック型の質量行列を獲得する． Φ_0 の展開式 (146) を(94) および (95) へ代入することで，低エネルギー領域では

$$\mathcal{L}_Y \rightarrow \mathcal{L}_M^Y = \sum_{f=u,d,v,e} \underline{\Psi}_{L0}^f M_f \underline{\Psi}_{R0}^f + \text{h.c.} + \dots \quad (163)$$

とするフェルミオン場に対する有効ラグランジュ密度が導かれる．ここで $\underline{\Psi}_{h0}^f = \Omega_{EW}(\theta)^{-1} \underline{\Psi}_h^f$ であり， M_f はディラック型の質量行列である．省略記号はフェルミオン場とスカラー場の相互作用を表す．電弱アップセクター ($f = u, \nu$) に対して，ディラック型の質量行列は

$$M_f = a_f I + \frac{1}{\sqrt{3}} b_{f1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} b_{f2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + c_f \check{D} \quad (164)$$

となる．ここで $a_f = Y_{f1} v$ および $b_{f1} = -Y_{f2} v$, $b_{f2} = Y_{f3} v$, $c_f = 3Y_{f4} v$ である．同様に，電弱ダ

ウンセクター ($f = d, e$) に対しては,

$$\mathcal{M}_f = a_f I + b_{f1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}} b_{f2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + c_f \check{D} \quad (165)$$

が得られる．ここで $a_f = Y_{f1} v$ および $b_{f1} = Y_{f2} v$, $b_{f2} = Y_{f3} v$, $c_f = 3Y_{f4} v$ である．

エルミート行列ではないこれらの質量行列を対角化するために, 双ユニタリ変換 [55]

$$V_L^{f\dagger} \mathcal{M}_f V_R^f = \mathcal{M}_{\text{diagonal}} \quad (166)$$

を使う．質量固有値および対角化行列 V_L^f を導くためには,

$$\mathcal{M}_f \mathcal{M}_f^\dagger |\mathbf{v}^{(f)i}\rangle = m_{(f)i}^2 |\mathbf{v}^{(f)i}\rangle \quad (167)$$

として自己共役行列 $\mathcal{M}_f \mathcal{M}_f^\dagger$ に対する固有値問題を解く．固有ベクトルが見つければ, 対角化行列 V_L^f は固有ベクトルから

$$V_L^f = (|\mathbf{v}^{(f)1}\rangle, |\mathbf{v}^{(f)2}\rangle, |\mathbf{v}^{(f)3}\rangle) \quad (168)$$

として得られる．

荷電フェルミオン $f = u, d$ および e に対する(167)の固有値問題の解は, 質量スペクトルおよび対角化行列に関する情報を得るのに十分である．特に, クォークセクターに対する FMM は

$$V = V_L^{u\dagger} V_L^d = (\langle \mathbf{v}^{(u)i} | \mathbf{v}^{(d)j} \rangle) \quad (169)$$

の形で構成される．しかしながら, ニュートリノはマジョラナ型の質量行列を持つため, レプトンセクターの解析に対しては注意を要する．ニュートリノの質量スペクトルを導くためには, (164)のディラック質量行列 \mathcal{M}_ν および (141)のマジョラナ質量行列 $\tilde{\mathcal{M}}_\nu$ を考慮に入れなければならない．

10. ディラック型の質量行列の解析

ここまで, 段階的な対称性の破れを通して, 非物理的なモードが現れることなく, 独自の形を持つディラック型の質量行列が現れる過程を見てきた．ここでは, この質量行列が実際に観測結果を再現できることをみる．

10.1 クォーク質量と弱混合行列

質量スペクトルや弱混合行列を導出する前に, デモクラティック行列を対角化する固有ベク

トル(71)を使って，式(167)の固有ベクトルを

$$|\mathbf{v}^f\rangle = x_f|1\rangle + y_f|2\rangle + z_f|3\rangle \quad (170)$$

と展開する．アップクォークセクターに対して，方程式(167)は

$$\begin{pmatrix} |a_u|^2 + 2|b_{u1}|^2 & 0 & \sqrt{2}C_u^*b_{u1} \\ 0 & |a_u|^2 & -\sqrt{2}a_ub_{u2}^* \\ \sqrt{2}C_ub_{u1}^* & -\sqrt{2}a_ub_{u2}^* & |C_u|^2 + 2|b_{u2}|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} = m_u^2 \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} \quad (171)$$

と書き換えられる．ここで $C_u = c_u + a_u$ とする．同様に，ダウンクォークセクターに対しても固有ベクトル \mathbf{v}^d の係数に対して，方程式(167)は

$$\begin{pmatrix} |a_d|^2 & 0 & \sqrt{2}a_db_{d2}^* \\ 0 & |a_d|^2 + 2|b_{d1}|^2 & -\sqrt{2}C_d^*b_{d1} \\ \sqrt{2}a_d^*b_{d2} & -\sqrt{2}C_db_{d1}^* & |C_d|^2 + 2|b_{d2}|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_d \\ y_d \\ z_d \end{pmatrix} = m_d^2 \begin{pmatrix} x_d \\ y_d \\ z_d \end{pmatrix} \quad (172)$$

と書き換えられる．ここで $C_d = c_d + a_d + b_{d1}$ とする．

弱混合行列の中に実際に含まれるパラメータの数を明確にするため

$$C_u^*b_{u2} = |C_ub_{u2}|e^{i\mu_u}, \quad a_ub_{u1}^* = |a_ub_{u2}|e^{i\nu_u}, \quad a_db_{d2}^* = |a_db_{d2}|e^{i\mu_d}, \quad C_db_{d1} = |C_db_{d1}|e^{i\nu_d} \quad (173)$$

とおき，行列

$$P^f = \begin{pmatrix} e^{i\mu_f} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\nu_f} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (174)$$

を導入する．この行列を使うと，(|1>, |2>, |3>) 基底において，アップおよびダウンクォークセクターに対する固有ベクトルは，それぞれ

$$\mathbf{v}_j^u = P^u \mathbf{u}_j^u = N_j^u P^u \begin{pmatrix} \tilde{u}_{jx}^u \\ \tilde{u}_{jy}^u \\ \tilde{u}_{jz}^u \end{pmatrix} = N_j^u P^u \begin{pmatrix} \sqrt{2}|C_ub_{u1}|(m_{uj}^2 - |a_u|^2) \\ -\sqrt{2}|a_ub_{u2}|(m_{uj}^2 - |a_u|^2 - 2|b_{u1}|^2) \\ (m_{uj}^2 - |a_u|^2)(m_{uj}^2 - |a_u|^2 - 2|b_{u1}|^2) \end{pmatrix} \quad (175)$$

および

$$\mathbf{v}_j^d = P^d \mathbf{u}_j^d = N_j^d P^d \begin{pmatrix} \tilde{u}_{jx}^d \\ \tilde{u}_{jy}^d \\ \tilde{u}_{jz}^d \end{pmatrix} = N_j^d P^d \begin{pmatrix} \sqrt{2}|a_db_{d2}|(m_{dj}^2 - |a_d|^2 - 2|b_{d1}|^2) \\ -\sqrt{2}|C_db_{d1}|(m_{dj}^2 - |a_d|^2) \\ (m_{dj}^2 - |a_d|^2)(m_{dj}^2 - |a_d|^2 - 2|b_{d1}|^2) \end{pmatrix} \quad (176)$$

と求められる．ここで $|N_j^f|^{-2} = \tilde{u}_{jx}^{f2} + \tilde{u}_{jy}^{f2} + \tilde{u}_{jz}^{f2}$ である．この時， \mathbf{u}_j^f から成る行列

$$O_L^f = (\mathbf{u}_1^f, \mathbf{u}_2^f, \mathbf{u}_3^f) \quad (177)$$

は直交行列となり，フレーバー混合行列は

$$V = O_L^{\mu\dagger} P O_L^d \quad (178)$$

と表わせる．ここで

$$P = \begin{pmatrix} e^{i\mu} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu = \mu_d - \mu_u, \quad \nu = \nu_d - \nu_u \quad (179)$$

である．この混合行列は 10 個のパラメータと 6 個のクォーク質量を含んでいるが，これらのパラメータは独立でない．実際，固有値問題 (171) および (172) を解くことにより導出される 6 つのクォーク質量は，10 個のパラメータに 6 個の関係を与える．結局は FMM には，4 個のパラメータのみが未知のまま残る．次は，このクォーク質量を具体的に表わし，そこに含まれるパラメータとの関係を表わす．

10.2 クォークの質量スペクトル

アップとダウンの両セクターで，方程式 (171) および (172) に対する固有方程式は同じ形となるので，簡単のために添字 f を省略し議論を進める． $s = m^2 - |a|^2$ の置き換えのもと，固有方程式は

$$s^3 - (|C|^2 - |a|^2 + 2|b_1|^2 + 2|b_2|^2) s^2 - 2(|ab_1|^2 + |ab_2|^2 - 2|b_1 b_2|^2) s + 4|ab_1 b_2|^2 = 0 \quad (180)$$

となる．変数 s の無次元パラメータ $\bar{s} = |ab_1 b_2|^{-\frac{2}{3}} s$ を導入し， \bar{s}^2 項と \bar{s} 項の係数をそれぞれ

$$P = \frac{1}{3} \frac{|C|^2 - |a|^2 + 2|b|^2}{|ab_1 b_2|^{\frac{2}{3}}}, \quad Q = \frac{2}{3} \frac{|a|^2 |b|^2 - 2|b_1 b_2|^2}{|ab_1 b_2|^{\frac{4}{3}}}, \quad (181)$$

とおく．ここで

$$|b|^2 = |b_1|^2 + |b_2|^2 \quad (182)$$

とする．さらに，変数変換 $t = \bar{s} - P$ を行い \bar{s}^2 項を消去することで固有方程式は

$$t^3 - 3(P^2 + Q)t - 2P^3 - 3PQ + 4 = 0 \quad (183)$$

となる．カルダノの公式により，この固有方程式の 1 つの解は

$$t_+^3 = \frac{1}{2} (2P^3 + 3PQ - 4 + i\sqrt{|D|}), \quad t_-^3 = \frac{1}{2} (2P^3 + 3PQ - 4 - i\sqrt{|D|}) \quad (184)$$

を満たす 2 つの新しい変数 t_+ と t_- の和 $t = t_+ + t_-$ で表わせる．ここで

$$D = -16P^3 - 3P^2Q^2 - 24PQ - 4Q^3 + 16 \quad (185)$$

とする．さらに極座標表示 $t_+ = \rho e^{i\theta}$ および $t_- = \rho e^{-i\theta}$ で表わすと，動径方向に関しては

$$\rho = \sqrt{P^2 + Q} \quad (186)$$

となり，角度方向に関しては関係式

$$\tan 3\theta = \frac{|D|}{2P^3 + 3PQ - 4} \quad (187)$$

が成り立つ．最終的に固有方程式 (183) の解は， $\omega = \exp(i2\pi/3)$ を用いて

$$\begin{aligned} t_1 &= \omega t_+ + \omega^2 t_- = 2\rho \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ t_2 &= \omega^2 t_+ + \omega t_- = 2\rho \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) \\ t_3 &= t_+ + t_- = 2\rho \cos \theta \end{aligned} \quad (188)$$

と表わせる．

こうした方法で (171) および (172) の固有値問題を解くことで，2 乗質量の値として

$$\begin{aligned} m_1^2 &= |a|^2 + \frac{1}{3} \left(|C|^2 - |a|^2 + 2|b|^2 \right) \left[1 + 2\sqrt{1+\delta} \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \right] \\ m_2^2 &= |a|^2 + \frac{1}{3} \left(|C|^2 - |a|^2 + 2|b|^2 \right) \left[1 + 2\sqrt{1+\delta} \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) \right] \\ m_3^2 &= |a|^2 + \frac{1}{3} \left(|C|^2 - |a|^2 + 2|b|^2 \right) \left[1 + 2\sqrt{1+\delta} \cos \theta \right] \end{aligned} \quad (189)$$

が得られる．ここで簡単化のために変数

$$\delta = 6 \frac{|a|^2|b|^2 - 2|b_1b_2|^2}{[|C|^2 - |a|^2 + 2|b|^2]^2} = \frac{Q}{P} \quad (190)$$

を導入した．

以下で確かめる様に，質量スペクトルが階層的な構造を持つためには，角度 $|\theta|$ の値は非常に小さくなければならない．ここでは， $\theta > 0$ および $\theta < 0$ に対して，2 乗質量の大きさはそれぞれ $m_1^2 < m_2^2 < m_3^2$ および $m_2^2 < m_1^2 < m_3^2$ となることを注意しておく．

階層性の極限 $|C|^2 \gg 1$ を仮定することで，クォーク質量と FMM に含まれるパラメータとの間の関係を明確にする．ここで，3 つの固有値の和を

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = (|C|^2 + 2|b|^2 - |a|^2) + 3|a|^2 = 3M^2 \quad (191)$$

と定義する．階層性の極限により， $M^2 \gg 1$ と考えられることから， P も大変大きな値を持つ．したがって式 (187) に対して，左辺の $\tan 3\theta$ は 3θ と近似でき，右辺は主要オーダーのみを考慮することで，関係式

$$(3\theta)^2 \simeq 4 \frac{|ab_1b_2|^2}{M^6} + \frac{1}{3} \frac{(|a|^2|b|^2 - 2|b_1b_2|^2)^2}{M^8} \quad (192)$$

を得る．式 (190) で定義した δ は，近似的に

$$\delta \simeq \frac{2}{3} \frac{|a|^2 |b|^2 - 2|b_1 b_2|^2}{M^4} \quad (193)$$

と表わされる． θ と δ は式 (189) および (191) から

$$m_2^2 + m_1^2 \simeq 2|a|^2 - M^2 \delta, \quad m_2^2 - m_1^2 \simeq 2\sqrt{3}M^2 \theta \quad (194)$$

と導出される．上式から，近似式 (192) および (193) を使って， δ と θ を消去することで

$$|b_1 b_2|^2 = \frac{3}{4|a|^2} (m_2^2 - |a|^2)(|a|^2 - m_1^2) M^2 \quad (195)$$

が得られる．

関係式 (195) を使い，クォーク質量と未知のパラメータの間の関係を調べる．まず， $|b|^2$ と $|C|^2$ はそれぞれ

$$|b|^2 = \frac{3}{2} \frac{|a|^4 - m_1^2 m_2^2}{|a|^4} M^2, \quad |C|^2 = 3 \frac{m_1^2 m_2^2}{|a|^4} M^2 - 2|a|^2 \quad (196)$$

となる．次に $|b_1|$ と $|b_2|$ を決定するために，パラメータ κ を導入し

$$|b_1|^2 = \frac{1}{2}|b|^2 - M\kappa, \quad |b_2|^2 = \frac{1}{2}|b|^2 + M\kappa \quad (197)$$

と表わす．ここで式 (195) より， κ は

$$\kappa^2 = \frac{3}{4|a|^2} \left(\frac{3}{4} \frac{(|a|^4 - m_1^2 m_2^2)^2}{|a|^6} M^2 - (m_2^2 - |a|^2)(|a|^2 - m_1^2) \right) \quad (198)$$

によって決定される．

したがって，各パラメータ $|b_1|$ ， $|b_2|$ ， $|C|$ はクォーク質量と $|a|$ により表わせるため，弱混合行列の中での未知のパラメータは $|a_u|$ および $|a_d|$ ， μ ， ν の 4 つとなる．混合行列は通常 3 つの混合角と 1 つの位相により表現されるので，パラメータの数としてはちょうど適当な数となっていることがわかる．

10.3 アップおよびダウンクォークセクターの質量順序

混合行列に関する実験結果を誤差の範囲で再現するために，クォーク質量を入力値として，数値解析を実行する．ここで用いるクォーク質量は， $m_Z = 91.2 \text{ GeV}$ のエネルギースケールでの値 (13) を使用する [49, 50]．

クォークセクターにおける FMM の観測値 (9) は，対角成分を中心に階層的に小さくなっていく様な値をもっている．こうした特徴を導くためには，(177) の直交行列 O_L^u おおび O_L^d は，共に単位行列に近い値をもったものでなくてはならない．したがって FMM を解析する第一段階として，(189) の中で $\theta > 0$ あるいは $\theta < 0$ により特徴づけられた解のうち，どちらが単位行列

に近い直交行列を記述するのに適切であるかを調べる．

直交行列を調べるために，(13) のクォーク質量に対して $\theta > 0$ の解を適用する．つまり，ダウクォークセクターに対しては， $m_1 = m_d$ ， $m_2 = m_s$ ， $m_3 = m_b$ とし，アップクォークセクターに対しては， $m_1 = m_u$ ， $m_2 = m_c$ ， $m_3 = m_t$ とするのである．この時，ダウクォークセクターでは， $|a_d|$ の小さな値に対して行列 O_L^d の全ての対角成分は 1 に近づくことがわかる．逆に，アップクォークセクターでは， $|a_u|$ の任意の値に対して行列 O_L^u の対角成分のいくつかは 1 よりも幾分小さくなることがわかる．こうした状況は $\theta < 0$ の解に対しては全く異なる． $\theta < 0$ の解に対しては，ダウクォークセクターに対して， $m_1 = m_s$ ， $m_2 = m_d$ ， $m_3 = m_b$ とし，アップクォークセクターに対して， $m_1 = m_c$ ， $m_2 = m_u$ ， $m_3 = m_t$ とする．こうして数値計算を行うと， $|a_u|$ を調節することにより行列 O_L^u の全ての対角成分は 1 に近づき， $|a_d|$ の任意の値に対して行列 O_L^d が単位行列に近づくことはない．

したがって，クォークの FMM の実験結果を導出するためには，ダウクォークセクターに対しては $\theta > 0$ の解を，アップクォークセクターに対しては $\theta < 0$ の解を選ぶ必要がある．観測されるダウクォークセクターの質量および状態ベクトルは

$$\begin{aligned} m_d &= m_1^{(d)}, & m_s &= m_2^{(d)}, & m_b &= m_3^{(d)}; \\ |v_d\rangle &= |v^{(d)1}\rangle, & |v_s\rangle &= |v^{(d)2}\rangle, & |v_b\rangle &= |v^{(d)3}\rangle \end{aligned} \quad (199)$$

の様に通常の順序を持つ $\theta > 0$ の解により記述されなければならない．アップクォークセクターの質量および状態ベクトルは

$$\begin{aligned} m_u &= m_2^{(u)}, & m_c &= m_1^{(u)}, & m_t &= m_3^{(u)}; \\ |v_u\rangle &= |v^{(u)2}\rangle, & |v_c\rangle &= |v^{(u)1}\rangle, & |v_t\rangle &= |v^{(u)3}\rangle \end{aligned} \quad (200)$$

の様に部分的に反転した順序を持つ $\theta < 0$ の解により記述されなければならない．

10.4 湯川結合定数の階層性

クォークの FMM の実験結果を導出するために，ダウクォークセクターに対しては $\theta > 0$ の解を，アップクォークセクターに対しては $\theta < 0$ の解を選ばなければならないことが解ったので，この考えに沿って数値解析を行う．クォーク質量の値として (13) および近似式 (196) および (198) を使うと，FMM に対する実験結果 (11) および Jarlskog 不変量 (12) を再現する 4 つパラメータの最適値は

$$|a_u| = 30.4, \quad |a_d| = 13.2, \quad \mu = 0.96, \quad \nu = 2.32 \quad (201)$$

となる．ここで，このパラメータを用いて表わされる FMM および Jarlskog 不変量の具体的な

表 3 10 個のパラメータ値

アップクォークセクター	ダウンクォークセクター	位相
$ a_u = 30.4$	$ a_d = 13.2$	$\mu = 0.96$
$ b_{u1} = 831$	$ b_{d1} = 92.1$	$\nu = 2.32$
$ b_{u2} = 63800$	$ b_{d2} = 818$	
$ C_u = 146000$	$ C_d = 2650$	

値は

$$|V| = \begin{pmatrix} 0.974210 & 0.225705 & 0.003595 \\ 0.225473 & 0.973343 & 0.041511 \\ 0.008723 & 0.040746 & 0.999132 \end{pmatrix}, \quad (202)$$

および

$$J = 3.1 \times 10^{-5} \quad (203)$$

となる．今，クォーク質量値の代わりに，6 つのパラメータ b_{u1} および b_{d1} , b_{u2} , b_{d2} , C_u , C_d を用いると，実験結果を再現する 10 個のパラメータ値は表 3 で表わされている値となる．そこで，これら 10 個のパラメータから湯川結合定数に関する考察を行う．

最大で 10^4 程のひらきがある位相を除いた 8 個のパラメータを近似的に考察し，湯川結合定数の大きさの階層性を見る．各セクターの主要オーダーのパラメータのみを考え，その他のパラメータを無視すると b_{u2} , b_{d2} , c_u , c_d が残り，質量行列は

$$\mathcal{M}_u \approx \frac{1}{3} b_{u2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + c_u \check{D}, \quad \mathcal{M}_d \approx \frac{1}{\sqrt{3}} b_{d2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + c_d \check{D} \quad (204)$$

となる．今までの解析過程において課してきた仮定に反することなく，各セクターの中ではデモクラティック行列の要素である $|c|$ が最も大きな値をとることが解るが，最終的に $|C|$ として現れるため，それ自身の大きさは近似的にしか分らない．一方， $|b_{u2}|$ や $|b_{d2}|$ は十分に大きな値ではあるがデモクラティック要素ではない．しかし，(204) からエルミート行列 $\mathcal{M}_f \mathcal{M}_f^\dagger$ を計算すると

$$\mathcal{M}_f \mathcal{M}_f^\dagger \approx (2|b_{f2}|^2 + |C_f|^2) \check{D} \quad (205)$$

となる．トップクォークやボトムクォークの質量は $|c|$ だけでなく， $|b_{u2}|$ や $|b_{d2}|$ も大きく寄与し

ていることが解る．

ここでアップクォークセクターとダウンクォークセクターの大きさの差として， $|b_{u2}|$ と $|b_{d2}|$ の間には $|b_{u2}| \sim 9^2 |b_{d2}|$ といった関係が成り立つ．さらに次のオーダーまで考慮に入れると b_{fi} の間に

$$\frac{|b_{u1}|}{|b_{d2}|} \sim 1, \quad \frac{|b_{d2}|}{|b_{d1}|} \sim 9^1, \quad \frac{|b_{u2}|}{|b_{u1}|} \sim 9^2, \quad (206)$$

という関係が成り立っている．これらの関係より，湯川結合定数の間に経験的な関係として

$$\frac{|Y_{u2}|}{|Y_{d3}|} \sim 1, \quad \frac{|Y_{d3}|}{|Y_{d2}|} \sim 9^1, \quad \frac{|Y_{u3}|}{|Y_{u2}|} \sim 9^2, \quad (207)$$

が与えられる．ここで，これらの関係式が厳密に成り立っていると想定する．2つの比例関係にある湯川結合定数の大きさを表わす際に基準となる様な変数を

$$|b_{d1}| = 9\beta, \quad |b_{d2}| = |b_{u1}| = 9^2\beta, \quad |b_{u2}| = 9^4\beta, \quad (208)$$

として導入する．表4の各パラメータに対する値を使うことで，各クォーク質量は

$$\begin{aligned} m_u &= 1.20 \text{ MeV}, & m_c &= 0.628 \text{ GeV}, & m_t &= 169.6 \text{ GeV}, \\ m_d &= 2.87 \text{ MeV}, & m_s &= 53.8 \text{ MeV}, & m_b &= 2.86 \text{ GeV}, \end{aligned} \quad (209)$$

と計算される．さらに，混合行列および Jarlskog の不変量は

$$|V| = \begin{pmatrix} 0.973984 & 0.226589 & 0.003509 \\ 0.226452 & 0.973161 & 0.040962 \\ 0.008616 & 0.040199 & 0.999155 \end{pmatrix}, \quad J = 2.9 \times 10^{-5} \quad (210)$$

を得る．これより，独立なパラメータの数を10個から7個へと減少させたとしても，実験データの制限範囲をこえることはないことが解る．EWの破れのスケールを $v = 246 \text{ GeV}$ として， $|C_u| \approx |c_u|$ ， $|C_d| \sim |c_d|$ と近似した湯川結合定数の大きさの値は，表5の様にまとめられる．これらの湯川結合定数の大きさの比は最大で

$$\frac{|Y_{u4}|}{|Y_{u1}|} \sim 10^3 \quad (211)$$

表4 7個のパラメータ値

アップクォークセクター	ダウンクォークセクター	共通パラメータ
$ a_u = 30$	$ a_d = 13$	$\beta = 10$
$ C_u = 142000$	$ C_d = 2620$	$\mu = 0.95$
		$v = 2.3$

表 5 湯川結合定数

f	u	d	e
$ Y_{f1} $	1.2×10^{-4}	5.4×10^{-5}	3.5×10^{-5}
$ Y_{f2} $	3.4×10^{-3}	3.7×10^{-4}	4.1×10^{-4}
$ Y_{f3} $	2.6×10^{-1}	3.3×10^{-3}	3.6×10^{-3}
$ Y_{f4} $	2.0×10^{-1}	3.6×10^{-3}	1.6×10^{-3}

であり，クォークの質量比

$$\frac{m_t}{m_u} \sim 10^5 \quad (212)$$

と比べると，スケールの差がかなり抑えられたことがわかる．

最後に，これらクォークセクターに見出された結合定数の関係式を使い，荷電レプトンの結合定数を考察する．荷電レプトンの質量行列はダウルクォークセクターの質量行列と同じ形をとるため，各パラメータに対する添字 d を e と取りかえることで，各質量固有値が与えられる．荷電レプトンセクターに含まれる 4 つのパラメータにダウルクォークセクターと同じ関係

$$|Y_{e1}| = 9 \frac{\tilde{\beta}}{v}, \quad |Y_{e2}| = 9^2 \frac{\tilde{\beta}}{v} \quad (213)$$

を課すことで，各質量の値を再現するパラメータ $|a_e|$, $|C_e|$, $\tilde{\beta}$ の値は一意的に決まる．各質量の値を

$$m_e = 0.486570 \text{ MeV}, \quad m_\mu = 102.718138 \text{ MeV}, \quad m_\tau = 1746.248815 \text{ MeV} \quad (214)$$

とすると，各パラメータは

$$|a_e| = 8.537374, \quad |C_e| = 1197.43, \quad \tilde{\beta} = 11.063420 \quad (215)$$

と決定される．結果として得られた湯川結合定数を表 5 にした． $\tilde{\beta}$ は β に近い値をとることから， $|Y_{e1}|$ および $|Y_{e2}|$ は $|Y_{d1}|$ および $|Y_{d2}|$ と近い．クォークと荷電レプトンの結合定数をグラフで表わすと，図 1 の様に表わされる．

11. 議論

水平対称性をゲージ化することにより SM を一般化し，対称性の破れを通して求められたディラック型の質量行列を解析してきた．パウリ代数の中心拡大によって生成された H 対称性は，

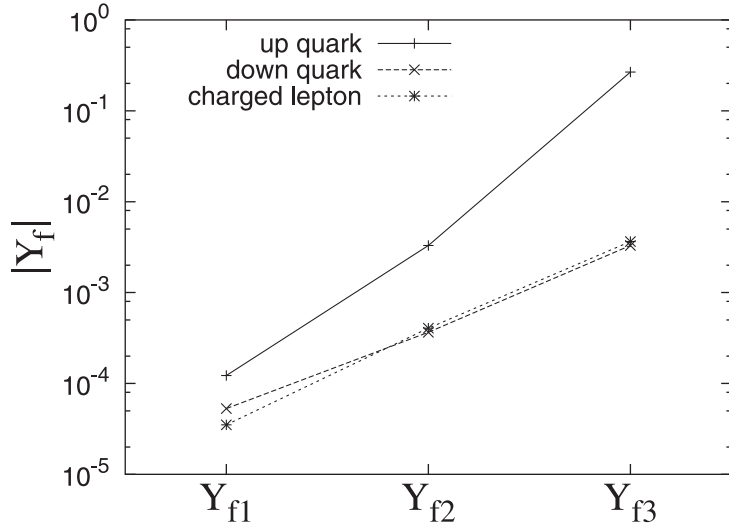


図1 横軸に湯川結合定数の種類をとり，縦軸にその大きさの値をとる． $|Y_{f4}|$ は不確定な部分が大きいため考慮していない．

湯川相互作用において秩序を生成し，湯川結合の不確定性を減少させる様に働く．この理論は，非物理的なモードを含まず，SMの全ての結果を再導出できる様に定式化された．

Wilczek と Zee によれば， $SU(2)$ 水平対称性に基づく理論は，NG ボソンを発生させることなしに質量行列を導く理論の候補であると主張されているが，具体的な定式化は行われていない [31]．我々の理論は，ヒッグスポテンシャルの安定点に対する 1 つのパラメータを特定することにより，部分的な対称性の破れに対する基準状態を選ぶ複合機構を考えた．その基準状態のまわりでのスカラー 3 重項の展開式の中に生じる自由度を使い，対称性の破れを完全にし，非物理的なモードが現れない理論を実際に定式化してきた．つまり，高エネルギースケール $\tilde{\Lambda}$ では，ヒッグスポテンシャル $V_1(\tilde{\Phi})$ の安定点を計算することにより，部分的に破れた H 対称性に対する基準状態を決定し，次に $\tilde{\Phi}(x)$ の展開式における成分場間の混合を利用することで NG モードを除外した．低エネルギースケール Λ では，ヒッグスポテンシャル $V_2(\Phi) + V_3(\Phi, \tilde{\nu})$ の一部の安定点によって固定された準基準状態は， v_0 から v へパラメータを再スケール化することにより，基準状態に置き換えられる．そして， $\Phi(x)$ の展開式においてその成分場間の混合を利用することにより，NG モードやタキオンの様な非物理的なモードが現れない様に制限できた．

H 対称性を導入することで SM における不確定な要素を減少させ，フレーバー物理にいくつかの制限を与えられる．基本フェルミオンに対して，マジョラナ型とディラック型の質量行列が生成され，ディラック型の質量行列に対しては湯川結合定数の数は SM と比べると $4/9$ へと減少した．

クォークの各セクターに 4 つの複素数として含まれる湯川結合定数は，8 個の実数と 2 個の位

相により 10 個のパラメータにまとめられた．入力値としてクォーク質量値を使い，2 つの独立パラメータと 2 つの位相の値を調節することにより，観測される FMM の値を再導出した．その結果として湯川結合定数の絶対値が計算できる．数値解析による結果はクォークセクターに対する結合定数の間に (207) の様な経験的な関係が成り立っていることを示唆している．これらの関係の物理的な意味を説明することはこの理論の範囲内ではできない．

表 5 で示されている湯川結合定数の値の中で注目すべきは，結合定数の間の最も大きな比 $|Y_{u3}|/|Y_{u1}| \sim |Y_{u4}|/|Y_{u1}| \sim 10^3$ がクォーク質量の間の比 $m_t/m_u \sim 10^5$ に比べてはるかに小さくなることである．これは，低エネルギーのフレーバー物理の中で直接観測される変化の多様性が湯川相互作用の結合定数では遥に縮小していることを意味している．

次に，この理論における質量行列の構造的な特徴を 3 節で紹介した過去の研究結果を参考に述べる．混合行列の各成分の大きさは，アップクォークセクターが単位行列に近いとき，そのほとんどがダウソクォークセクターに依存する．H 対称性のゲージ場理論から導出されたダウソクォークセクターの質量行列 (172) は

$$a = A, \quad \sqrt{2}b_1 = B, \quad -\sqrt{2}b_2 = B' \quad (216)$$

と置くことで，NNI 基底によるエルミート行列 (36) に還元される．ただし $A' = A$ あるいは $A' = A^*$ とする．つまり質量行列を (35) の様な形で書き直すと，エルミート条件を満たす様に $A' = A^*, B' = B^*$ とすることで Fritzsch 型の質量行列 (17) となり， $A' = A, B' = C$ と置くと (37) となる．興味深いことは，(17) では実験結果をうまく再現できる様に，条件として $A' = A$ を仮定したが，この理論ではすでに成り立っていることである．つまり自然にカビボ角が導出できていると言える [16]．

アップクォークセクターの質量行列 (171) に関してはこの様な簡単な置き換えは成り立っていない．しかしながら (200) と解釈することで，単位行列に近い直交行列を持つユニタリ変換が達成されることにより，数値的に近い議論はできる．実際に，表 3 より $B' \sim C$ となることがわかる．

いままで行ってきた議論に対して考察してきた質量行列の固有値と異なる固有値をもつ可能性があることを指摘しておこう．行列 (171) および (172) のなかで b_1 あるいは b_2 をゼロと置くと，固有値 m_1^2 および m_2^2, m_3^2 に対して，関係式

$$\begin{aligned} m_1^2 &= |a|^2, \\ m_2^2 + m_3^2 &= |a|^2 + |b|^2 + |C|^2, \\ m_2^2 m_3^2 &= |a|^2 |C|^2, \end{aligned} \quad (217)$$

が得られ， $m_2^2 < m_1^2 < m_3^2$ とすることで質量スペクトルを再現できる．このとき， $|C| \ll |b|$ となり，いままでの議論とは明らかに異なる．しかしながら，これらの固有値を使うことにより，本

論文の結果よりも状況が改善されることはない。

荷電レプトンの質量はダウンクォークセクターに対する関係式の類推 (213) により導いた。しかしながら、レプトンセクターに関してさらに満足のいく調査を行うためには、ディラック型の質量行列のみだけでなくマジョラナ質量行列も含めた 6×6 の固有値問題を解かなければならない。

この理論では高エネルギーでの対称性の破れを考えることにより、超重量質量を持つ粒子を発生させ、低エネルギースケールでの実験結果と矛盾しない様な理論を構築できた。しかしながら、大統一理論と同様に、EW スケールの相転移に比べはるかに大きなスケールの起きる相転移を想定したとき階層性の問題が残る。この問題を避ける一つの手段として超対称性理論を導入することが挙げられる。超対称性を組み込んだ水平対称性のゲージ場理論は将来の課題として検討したい。

謝 辞

本論文を作成するにあたって、多大なご指導をいただきました曾我見郁夫教授に感謝致します。また、多くの助言をしていただいた小泉耕蔵講師にもお礼を申し上げます。

A. 質量行列の変形

テクスチャーゼロを持つ質量行列に関して、一般の 3×3 質量行列 M_u および M_d をある特定の形に変形した。フレーバー混合行列 (5) は、3 つのユニタリ行列 S および V_{uR} , V_{dR} を用いた変換

$$M_u \rightarrow M'_u = S M_u V_{uR}, \quad M_d \rightarrow M'_d = S M_d V_{dR} \quad (218)$$

のもと影響を受けないことから、ジェネリックな 3×3 質量行列がエルミート行列あるいは NNI 基底による 6 つのテクスチャーゼロを持つ質量行列に変形できると主張されている。

一般の行列はエルミート行列とユニタリ行列に分解できるため、 S の自由度を使うことなく、 $M_f (f = u, d)$ をエルミート行列に変形できる [17]。

次は、Branco *et al.* による手続き [24] から、NNI 基底により一般の 3×3 質量行列 M_u および M_d が $(1, 1)$ および $(1, 3)$, $(3, 1)$, $(2, 2)$ 成分がゼロである様な質量行列 M'_f に変形できることをみる。

行列 M_f の自己エルミート共役をかけた行列を $H_f = M_u M_u^\dagger$ と定義することで

$$M'_f M'^{\dagger}_f = S^\dagger H_f S \quad (219)$$

と表わせる．はじめに，エルミート行列 $M'_f M_f^\dagger$ に対して

$$(M'_u M_u^\dagger)_{12} = (M'_d M_d^\dagger)_{12} = 0 \quad (220)$$

とできる様なユニタリ行列 S があることを示す．この関係が成り立つためには

$$S_{i1}^*(H_u)_{ij} S_{j2} = 0, \quad S_{i1}^*(H_d)_{ij} S_{j2} = 0, \quad S_{i1}^* S_{i2} = 0 \quad (221)$$

でなければならない．ここでベクトル S_{i1}^* は他のベクトル $(H_u)_{ij} S_{j2}$ および $(H_d)_{ij} S_{j2}$, S_{i2} と直交しているため，これら 3 つのベクトルは線形従属でなければならない．つまり，3 つのパラメータを用いて

$$\left((H_u)_{ij} + \frac{c}{b} (H_d)_{ij} \right) S_{j2} = -\frac{a}{b} S_{i2} \quad (222)$$

と変形できる．これより，ベクトル S_{i2} は固有値 $-\frac{a}{b}$ を持つ固有ベクトルとして見つけることができる．ベクトル S_{i2} が見つかり，ベクトル S_{i1} は

$$S_{i1} = N \epsilon_{ijk} S_{j2}^* S_{l2}^* (H_u)_{lk} \quad (223)$$

により作られる．こうして，これら 2 つのベクトル S_{i1} および S_{j2} からユニタリ行列 S を構成できる．

つぎに， $T_f = S M_f$ とおき， $(1, 1)$ および $(1, 3)$, $(3, 1)$, $(2, 2)$ 成分がゼロである様な質量行列 $M'_f = T_f V_{fR}$ に変形できる様な V_{fR} を見る．この行列は具体的に

$$V_{fRi1} = N_1 \epsilon_{ijk} T_{f1j} T_{f3k}, \quad V_{fRi1} = N_2 T_{f1j} T_{f1i}^*, \quad V_{fRi3} = N_3 (T_{f1i}^* H_{13} - T_{f3i}^* H_{11}) \quad (224)$$

と表わせる．この行列が条件

$$T_{f1i} V_{fRi1} = T_{f3i} V_{fRi1} = T_{f1i} V_{fRi3} = T_{f2i} V_{fRi2} = 0 \quad (225)$$

およびユニタリ条件

$$V_{fRi1} V_{fRi3}^* = V_{fRi2}^* V_{fRi3} = V_{fRi1} V_{fRi2}^* = 0 \quad (226)$$

を満たすことは簡単に示される．

B. スカラー場の EW \times H 不変量

WS 理論では，電弱 2 重項 $\phi(x)$ のヒッグスポテンシャルは，単に不変量 $\phi^\dagger \phi$ からなる簡単な形を持つ．この理由は，電弱アイソスピン $\{\tau_a\}$ の内部空間が単純な構造を持つからである． ϕ

に対して，その双対な場は $\tilde{\phi} = i\tau_2\phi^*$ によって定義される．それゆえ， $\tilde{\tilde{\phi}} = \phi$ が成り立つ．EW 対称群の下，同じ変換特性を持つそれらの場は，恒等式

$$\phi^\dagger \tilde{\phi} = 0 \quad (227)$$

をみたす．“内部ベクトル” $\phi^\dagger \tau_a \phi$ は単純な恒等式をみたす．すなわち，その 2 乗長さは

$$(\phi^\dagger \tau_a \phi)(\phi^\dagger \tau^a \phi) = (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (228)$$

と純粋な“内部スカラー”量を使って表わせる．

WS 理論とは異なり，EW \times H 対称性の内部空間は複雑な構造を持つ．まず第一に，3 重項 $\check{\Phi}(x)$ および $\Phi(x)$ に対して，その双対な場を定義することは不可能である．例えば，(84) で定義された $\tilde{\Phi}(x)$ に対して結びついている場は $\check{\Phi}(x)$ に双対でない．なぜなら，

$$\tilde{\tilde{\Phi}}(x) = -(I - \check{D})\check{\Phi} \neq \check{\Phi} \quad (229)$$

となるからだ．H-3 重項からなる不変量の間には，多くの形の恒等式が存在する．スカラー 3 重項のラグランジュ密度を構築するためには，全ての不変量を調査し，それらの間の関係を見つけないといけない．

いくつかの恒等式は，その定義から直接証明することができる．例えば， $\check{\tau}_2$ の作用により，関連性を持つスカラー場 $\tilde{\Phi}(x)$ および $\check{\Phi}(x)$ の H-和は消えてしまい，

$$\langle\langle \tilde{\Phi} \rangle\rangle = 0, \quad \langle\langle \check{\Phi} \rangle\rangle = 0 \quad (230)$$

となる．しかしながら，不変量を一般的に調べ，分別するためには，(71) の固有ベクトルで表わされたスカラー 3 重項の具体的な表現

$$\check{\Phi} = z_1|1\rangle + z_2|2\rangle + z_3|3\rangle, \quad \tilde{\check{\Phi}} = z_2^*|1\rangle - z_1^*|2\rangle \quad (231)$$

を使う必要がある．ここで， $z_j(x)$ は複素スカラー場であり，

$$\Phi = Z_1|1\rangle + Z_2|2\rangle + Z_3|3\rangle, \quad \tilde{\Phi} = i\tau_2 Z_2^*|1\rangle - i\tau_2 Z_1^*|2\rangle \quad (232)$$

の中の $Z_j(x) = {}^t(\zeta_j^+, \zeta_j^0)$ は電弱 2 重項の複素スカラー場である．

(231) の中の分解を使うと，3 重項 $\check{\Phi}(x)$ および $\tilde{\check{\Phi}}(x)$ は恒等式

$$\check{\Phi}^\dagger \tilde{\check{\Phi}} = 0 \quad (233)$$

を満たすことが証明される．この恒等式が，3 重項 $\check{\Phi}$ の 4 次関係を比較的簡単化する．関連を持つ 3 重項 $\tilde{\check{\Phi}}$ の双線形項は

$$\tilde{\check{\Phi}}^\dagger \tilde{\check{\Phi}} = \check{\Phi}^\dagger (I - \check{D})\check{\Phi} = \check{\Phi}^\dagger \check{\Phi} - \frac{1}{3} \langle\langle \check{\Phi}^\dagger \rangle\rangle \langle\langle \check{\Phi} \rangle\rangle \quad (234)$$

の様な 3 重項 $\check{\Phi}$ の双線形に還元される．3 重項の 4 次関係は，次のように恒等関係

$$\left(\check{\Phi}^\dagger \check{\tau}_j \check{\Phi}\right) \left(\check{\Phi}^\dagger \check{\tau}^j \check{\Phi}\right) = \left(\check{\Phi}^\dagger (I - \check{D}) \check{\Phi}\right)^2 \quad (235)$$

および

$$\left(\check{\Phi}^\dagger \check{\tau}_j \check{\Phi}\right) \left(\check{\Phi}^\dagger \check{\tau}^j \check{\Phi}\right) = \left(\check{\Phi}^\dagger (I - \check{D}) \check{\Phi}\right)^2 = \left(\check{\Phi}^\dagger \check{\Phi} - \frac{1}{3} \langle\langle \check{\Phi}^\dagger \rangle\rangle \langle\langle \check{\Phi} \rangle\rangle\right)^2 \quad (236)$$

をみたす．これらの 4 次関係は，スカラー 3 重項スピノールからなる内部ベクトルを含む不変な組み合わせが， $\check{\Phi}^\dagger \check{\Phi}$ および $\langle\langle \check{\Phi}^\dagger \rangle\rangle \langle\langle \check{\Phi} \rangle\rangle$ からなる不変量に還元可能であることを示す．

(233) の中の恒等式とは対照的に， $\Phi(x)$ と $\widetilde{\Phi}(x)$ はお互いに直交していない．(232) の分解は直ちに

$$\Phi^\dagger \widetilde{\Phi} = Z_1^\dagger i\tau_2 Z_2^* - Z_2^\dagger i\tau_2 Z_1^* = 2(\zeta_1^- \zeta_2^{0*} - \zeta_2^- \zeta_1^{0*}) \neq 0 \quad (237)$$

を導く．これより，3 重項 $\Phi(x)$ に対するヒッグスポテンシャル (114) は複雑になる．3 重項 $\Phi(x)$ および $\widetilde{\Phi}(x)$ は次の様に 4 次関係

$$\widetilde{\Phi}^\dagger \widetilde{\Phi} = {}^t \Phi (I - \check{D}) \Phi^* = \Phi^\dagger \Phi - \frac{1}{3} \langle\langle \Phi^\dagger \rangle\rangle \langle\langle \Phi \rangle\rangle \quad (238)$$

$$\Phi^\dagger \check{\tau}_j \widetilde{\Phi} = 0, \quad \Phi^\dagger \tau_a \widetilde{\Phi} = 0, \quad (239)$$

$$\widetilde{\Phi}^\dagger \check{\tau}_j \widetilde{\Phi} = -\Phi^\dagger \check{\tau}_j \Phi, \quad \widetilde{\Phi}^\dagger \tau_a \widetilde{\Phi} = -\Phi^\dagger \tau_a \Phi \quad (240)$$

をみたす．

(71) の固有ベクトルで表わされたスカラー 3 重項の分解を使うことによって，次の様なスカラー 3 重項の 4 次関係

$$\left(\Phi^\dagger \check{\tau}_j \Phi\right) \left(\Phi^\dagger \check{\tau}^j \Phi\right) = |\Phi^\dagger (I - \check{D}) \Phi|^2 - |\Phi^\dagger \widetilde{\Phi}|^2, \quad (241)$$

$$\left(\Phi^\dagger \tau_a \Phi\right) \left(\Phi^\dagger \tau^a \Phi\right) = |\Phi^\dagger \Phi|^2 + 2\Phi^\dagger i\tau_2 \Phi^{*t} \Phi i\tau_2 \Phi, \quad (242)$$

$$\left(\Phi^\dagger \tau_a (I - \check{D}) \Phi\right) \left(\Phi^\dagger \tau^a (I - \check{D}) \Phi\right) = |\Phi^\dagger (I - \check{D}) \Phi|^2 - |\Phi^\dagger \widetilde{\Phi}|^2, \quad (243)$$

$$\left(\Phi^\dagger \tau_a \check{D} \Phi\right) \left(\Phi^\dagger \tau^a \check{D} \Phi\right) = |\Phi^\dagger \check{D} \Phi|^2 = \frac{1}{9} \left(\langle\langle \Phi^\dagger \rangle\rangle \langle\langle \Phi \rangle\rangle\right)^2, \quad (244)$$

$$\left(\Phi^\dagger \tau_a \check{\tau}_j \Phi\right) \left(\Phi^\dagger \tau^a \check{\tau}^j \Phi\right) = |\Phi^\dagger (I - \check{D}) \Phi|^2 + 2|\Phi^\dagger \widetilde{\Phi}|^2, \quad (245)$$

$$\left(\Phi^\dagger \tau_a \check{\tau}_j \widetilde{\Phi}\right) \left(\widetilde{\Phi}^\dagger \tau^a \check{\tau}^j \Phi\right) = 4|\Phi^\dagger (I - \check{D}) \Phi|^2 - |\Phi^\dagger \widetilde{\Phi}|^2 \quad (246)$$

を証明することができる．(242) の中で，H スカラー積は，最初の Φ^\dagger と最後の Φ の間でとられ，中間部分では Φ^* と ${}^t \Phi$ の間でとられなければならない．これらの恒等関係をつかって，内部ベクトルや EW2 重項の 3 重項で構成された双ベクトルから成る多くの不変量は， $\Phi^\dagger \Phi$ および $\Phi^\dagger \widetilde{\Phi}$ ， $\langle\langle \Phi^\dagger \rangle\rangle \langle\langle \Phi \rangle\rangle$ から成る不変量に還元される．

3 重項 $\check{\Phi}(x)$ と $\Phi(x)$ の間には, 二つの恒等関係

$$(\check{\Phi}^\dagger \check{\tau}_j \Phi)^\dagger (\check{\Phi}^\dagger \check{\tau}^j \Phi) = (\check{\Phi}^\dagger (I - \check{D}) \check{\Phi}) (\Phi^\dagger (I - \check{D}) \Phi) + (\Phi^\dagger \check{\Phi})^\dagger (\Phi^\dagger \check{\Phi}) \quad (247)$$

および

$$(\check{\Phi}^\dagger \check{\tau}_j \check{\Phi})^\dagger (\Phi^\dagger \check{\tau}^j \Phi) = (\check{\Phi}^\dagger (I - \check{D}) \check{\Phi}) (\Phi^\dagger (I - \check{D}) \Phi) - 2(\Phi^\dagger \check{\Phi})^\dagger (\Phi^\dagger \check{\Phi}) \quad (248)$$

がある. さらに, $(\Phi^\dagger \check{\Phi})(\check{\Phi}^\dagger \Phi)$ や $(\Phi^\dagger \check{\Phi})(\{\{\check{\Phi}\}^\dagger \{\{\Phi\}\})$, $(\check{\Phi}^\dagger \Phi)(\{\{\Phi\}^\dagger \{\{\check{\Phi}\}\})$, $(\check{\Phi}^\dagger \check{\Phi})(\check{\Phi}^\dagger \check{\Phi}) = (\Phi^\dagger \check{\Phi})(\check{\Phi}^\dagger \Phi)$ の様な入り組んだ 4 次項が存在する. しなしながら, 最後の 4 次項を除いて, H ハイパー荷の保存や $\check{y}_{\check{\Phi}} \neq 0$ および $\check{y}_{\check{\Phi}} = 0$ の割り当ては, これらの項がヒッグスポテンシャル $V(\Phi, \check{\Phi})$ に現われることを禁止する.

これらの恒等関係を頼ることによって, 内部スカラー量を用いて全ての $EW \times H$ 不変量を表わすことが可能であることがわかる.

参 考 文 献

- [1] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B33** (1971), 173; **B35** (1971), 167.
- [2] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, Nucl. Phys. **B50** (1972), 318.
- [3] B. W. Lee and J. Zinn-Justin, Phys. Rev. **D5** (1972), 3121, 3137, 3155; **D7** (1973), 1049.
- [4] S. Glashow, Nucl. Phys. **22** (1961), 579.
- [5] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1267.
- [6] A. Salam, in “Elementary Particle Theory”, ed. N. Svartholm, Almqvist and Wiksells, Stockholm (1969) p. 367.
- [7] M. Gell-Mann, Phys. Lett. **8** (1964), 214.
- [8] G. Zweig, CERN-Report 8182/TH401 (1964).
- [9] H. Fritzsch, M. Gell-Mann and H. Leutwyler, Phys. Lett. **B47** (1973), 365.
- [10] D. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30** (1973), 1343.
- [11] H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30** (1973), 1346.
- [12] M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **49** (1973), 652.
- [13] Z. G. Berezhiani and J. L. Chkareuli, Pis'ma Zh. Eksp. Fiz. **35** (1982), 494.
- [14] Z. G. Berezhiani, Phys. Lett. **129B** (1983), 99.
- [15] H. Fritzsch, Phys. Lett. **73B** (1978), 317.
- [16] H. Fritzsch and Z. Z. Xing, Prog. Part. Nucl. Phys. **45** (2000), 1.
- [17] P. H. Frampton and C. Jarlskog, Phys. Lett. **154B** (1985), 421.
- [18] H. Harari and Y. Nir, Phys. Lett. B **195** (1987), 586.
- [19] C. H. Albright, phys. Lett **B 227** (1989), 171.
- [20] S. N. Gupta and J. M. Johnson, Phys. Rev. D **44** (1991), 2110.
- [21] D. Du and Z. Z. Xing, Phys. Rev. D **48** (1993), 2349.
- [22] A. Davidson, S. Ranfone and K. C. Wali, Phys. Rev. D **41** (1990), 208.

- [23] P. Ramond, R. G. Roberts and G. G. Ross, Nucl. Phys. **B406** (1993), 19.
- [24] G. C. Branco, L. Lavoura and F. Mota, Phys. Rev. D **39** (1989), 3443.
- [25] G. C. Branco and J. I. Silva-Marcos, Phys. Lett. **B331** (1994), 390.
- [26] T. Ito and M. Tanimoto, Phys. Rev. D **55** (1997), 1509.
- [27] H. Harari, H. Haut and J. Weyers, Phys. Lett. B **78** (1978), 459.
- [28] Y. Koide, Phys. Rev. D **28** (1983), 252.
- [29] Y. Koide, Phys. Rev. D **39** (1989), 1391.
- [30] A. Davidson, M. Koca and K. C. Wali, Phys. Rev. Lett. **43** (1979), 92
- [31] F. Wilczek and A. Zee, Phys. Rev. Lett. **42** (1979), 421.
- [32] M. T. Yamawaki and W. W. Wada, Phys. Rev. D **43** (1991), 2432.
- [33] D. S. Shaw and R. Volkas, Phys. Rev. D **47** (1993), 241.
- [34] T. Yanagida, Phys. Rev. D **20** (1979), 2986.
- [35] E. Papantonopoulos and G. Zoupanos, Phys. Lett. **110B** (1982), 465.
- [36] G. Zoupanos, Phys. Lett. **115B** (1982), 221.
- [37] Y. Nambu, Phys. Rev. Lett. **4** (1960), 380.
- [38] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122** (1961), 435; *ibid.* Phys. Rev. **124** (1961), 246.
- [39] J. Goldstone, Nuov. Cim. **19** (1961), 154.
- [40] I. S. Sogami, Prog. Theor. Phys. **122**, No. 4 (2009) (in press).
- [41] I. S. Sogami, Prog. Theor. Phys. **114** (2005), 873; **115** (2006), 461.
- [42] I. S. Sogami and Y. Konishi, Prog. Theor. Phys. **119** (2008), 339.
- [43] N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. **10** (1963), 531.
- [44] C. Amsler *et al.* (Particle Data Group), Phys. Lett. B **667** (2008), 1.
- [45] Y. Koide, Phys. Rev. D **71** (2005), 016010.
- [46] Y. Konishi and I. S. Sogami, Prog. Theor. Phys. **123**, No. 2 (2010) (in press).
- [47] L. Wolfenstein, Phys. Rev. Lett. **B51** (1983), 1945.
- [48] C. Jarlskog, Phys. Rev. Lett. **55** (1985), 1039.
- [49] Z. Z. Xing, H. Zhang and S. Zhou, Phys. Rev. D **77** (2008), 113016.
- [50] H. Fusaoka and Y. Koide, Phys. Rev. D **57** (1998), 3986.
- [51] R. Gatto, G. Sartori and M. Tonin, Phys. Lett. B **28** (1968), 128.
- [52] N. Cabibbo and L. Maiani, Phys. Lett. B **28** (1968), 131.
- [53] S. Weinberg, in *Transactions of the New York Academy of Sciences* **38** (1977), 185.
- [54] A. Djouadi, Phys. Rept. **457** (2008), 1.
- [55] T-P. Cheng and L-F. Li, *Gauge theory of elementary particle physics* (Clarendon Press, Oxford, 1986), 358.

Researches on Dirac Mass Matrices and Flavor Mixings in Gauge Field Theory of Horizontal Symmetry

Yasufumi KONISHI

Abstract

We investigate Dirac mass matrices derived in the gauge theory based on horizontal symmetry generated by a central extension of the Pauli algebra. The Dirac mass matrices are deduced by the breaking of the horizontal and electroweak symmetries at two stages with high and low energy scales. The spontaneous symmetry breakings reproduce all of the results in the Weinberg-Salam theory without appearing unphysical modes such as Nambu-Goldstone bosons and tachyons. The mass matrices possess a sufficient number of parameters to reproduce the observed data of the charged fermion masses and the flavor mixing matrix of quarks. Using values of the parameters determined by numerical analysis, we find the several empirical relations among the Yukawa coupling constants. As one specific feature of the theory, we find different ordering in squared mass eigenvalues for the up and down sectors. As a result, the mass matrix for the down quark sector has an adequate structure to describe the Cabibbo angle.

Keywords: Horizontal symmetry, Central extension of the Pauli algebra, Dirac mass matrices, Flavor mixing matrix, Yukawa coupling constants