

# 量子トンネル効果に基づくホーキング放射の導出と 事象地平面近傍の次元縮約

梅 津 光 一 郎

(平成 22 年 9 月 24 日提出)  
(平成 22 年 12 月 9 日修正)

## 要 旨

ホーキング放射と呼ばれるブラックホールの放射は一般相対性理論と量子論が同時に役割を果たす非常に興味深い現象の一つである。本論文では、ブラックホールの事象地平面近傍における次元縮約のテクニックを用いることによって、量子トンネル効果に基づくホーキング放射の導出法が明快にそして簡単化できることを示す。さらに、この方法の一つの利点である逆反応の効果を、回転するブラックホールの場合において具体的に導出する。

キーワード：ブラックホール、ホーキング放射、トンネリングメカニズム、次元縮約、逆反応

## 1. 導入

ブラックホール (black hole) は一般相対性理論の一つの帰結としてその存在が予言されている。一般相対性理論を記述するアインシュタイン方程式 (Einstein equation) によれば、重力はその周りの時空を曲げる。非常に強い重力によって曲げられた時空は閉鎖的な領域を作り、その外側にある物体はその内部に落ち込むことが可能であるが、その領域内部からはどんな粒子、例えば光 (光子) でさえもその領域からは脱出することができない。このような光子でさえも脱出することができない領域のことをブラックホールという。

ブラックホールは質量の重い星などの重力崩壊によって形成されると考えられている。ここで、重力崩壊とは質量の重い星が自身の重力で潰れることを指す。ブラックホールになる前の元の星は様々な物理量を持っているが、重力崩壊の過程で多くの物理量が失われてしまう。ブラックホールが重力崩壊によって作られるとすぐに定常状態になり、一意性定理 [1-3] (無毛定理 [4]) によれば質量、電荷、角運動量というたった 3 つのパラメータによって、その特徴を記述することができ、その依存するパラメータによって呼び名が変わる (表 1)。質量にのみ依存するブラックホールはシュバルツシルトブラックホール (Schwarzschild black hole) と呼ばれ、シュバルツシルトブラックホールの外側の時空はシュバルツシルト計量

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (1)$$

表 1 ブラックホールの種類

	回転しない ( $a = 0$ )	回転している ( $a \neq 0$ )
電荷を持たない ( $Q = 0$ )	Schwarzschild black hole	Kerr black hole
帯電している ( $Q \neq 0$ )	Reissner-Nordström black hole	Kerr-Newman black hole

によって記述される．ここで， $r, \theta, \varphi$  は極座標系においてよく用いられる変数を表し， $M$  はブラックホールの質量とする．質量と電荷を持つブラックホールはライスナー・ノルドストロムブラックホール (Reissner-Nordström black hole) と，質量と角運動量を持つブラックホールはカーブラックホール (Kerr black hole) と呼ばれている．さらに，質量，電荷，角運動量，これら 3 つのパラメーターを持つブラックホールはカー・ニューマンブラックホール (Kerr-Newman black hole) と呼ばれ，その時空の計量は

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} dt^2 - \frac{2a \sin^2 \theta}{\Sigma} (r^2 + a^2 - \Delta) dt d\varphi - \frac{a^2 \Delta \sin^2 \theta - (r^2 + a^2)^2}{\Sigma} \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2, \quad (2)$$

によって与えられる．ここで， $a$  はブラックホールの持つ角運動量  $L$  に関連するパラメーターであるが，次元を揃えるために

$$a \equiv \frac{L}{M}, \quad (3)$$

と定義し，また式の簡素化のため

$$\Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (4)$$

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2, \quad (5)$$

を定義した．ここで， $Q$  はブラックホールの電荷を表す．したがって，4次元において一意性定理を満たすブラックホール解の中で最も一般的なブラックホールはカー・ニューマンブラックホールであると言える．実際，カー・ニューマン計量 (2) において  $Q = 0$  とするとカー計量を， $a = 0$  とするとライスナー・ノルドストロム計量を，さらに  $Q = a = 0$  とすることによってシュバルツシルト計量を得ることが確認できる．

ここで，一般的なカー・ニューマン計量を用いてブラックホールの時空を考えることにしよう．まず，カー・ニューマン計量 (2) は漸近的に平坦である，すなわち， $r \rightarrow \infty$  でミンコフスキー計量 (Minkowski metric)

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (\mu, \nu = t, x, y, z), \quad (6)$$

に近づく．ここで，我々はアインシュタインの規約を用いた．このミンコフスキー計量は我々の世界の平坦な時空を表している．(6) と同様の形式で (2) を表すと

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (7)$$

$$= g_{tt} dt^2 + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 + 2g_{t\varphi} dt d\varphi + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2, \quad (8)$$

となる．ここで，それぞれの計量は

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} & 0 & 0 & -\frac{a \sin^2 \theta}{\Sigma} (r^2 + a^2 - \Delta) \\ 0 & \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ -\frac{a \sin^2 \theta}{\Sigma} (r^2 + a^2 - \Delta) & 0 & 0 & -\frac{a^2 \Delta \sin^2 \theta - (r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \end{pmatrix} \quad (9)$$

を表す．この式は時空の曲がり方・歪み方を表していることに注意しておく．ここで，ブラックホールの古典的な定義が「光でさえもその表面から脱出できない領域」であることを思い起こす．この我々の世界とブラックホールとの境界は事象地平面 (event horizon) と呼ばれている．以下では，事象地平面を単にホライズンと呼ぶことにする．カー・ニューマンブラックホールの場合，ホライズンは時空の計量が発散する点  $g_{rr} = \infty$ ，すなわち，

$$\Delta = 0, \quad (10)$$

の場所に現れる．(5) を用いて，ブラックホールの中心からホライズンまでの距離を求めると

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}, \quad (11)$$

となる．この式を用いることによって，(5) はまた

$$\Delta = (r - r_+)(r - r_-), \quad (12)$$

と表すことができる．このことからカー・ニューマンブラックホールの場合，2つのホライズン  $r_{\pm}$  が現れることが分かる． $r_+$  と  $r_-$  はそれぞれ外側ホライズン，内側ホライズンと呼ばれる．ただし，ブラックホールの外側に住んでいる観測者には，外側ホライズンの内部の情報を知ることができないので，内側ホライズンの存在はあまり問題にならない．以下では，外側ホライズンを単にホライズンと呼ぶことにする．

ホライズン上 ( $r = r_+$ ) では時間座標  $t$  と動径座標  $r$  が一定，すなわち， $dt = dr = 0$  なので，その内在的計量は (2) によって，

$$ds^2 = -\frac{a^2 \Delta_+ \sin^2 \theta - (r_+^2 + a^2)^2}{\Sigma_+} \sin^2 \theta d\varphi^2 + \Sigma_+ d\theta^2, \quad (13)$$

として与えられる．ここで，我々は  $\Delta_+ \equiv \Delta(r_+) = 0$  と  $\Sigma_+ \equiv \Sigma(r_+)$  を定義した．これを用いて，我々はブラックホールの表面積を

$$A = \int \sqrt{g_{\theta\theta}(r_+)g_{\varphi\varphi}(r_+)}d\theta d\varphi = 4\pi(r_+^2 + a^2), \quad (14)$$

と求めることができる．また，ホライズン上で  $\Delta_+ = r_+^2 - 2Mr_+ + a^2 + Q^2 = 0$  であることから，我々はブラックホールの面積を

$$A = 4\pi(2Mr_+ - Q^2), \quad (15)$$

のように書くことができる．この式を 3 つのパラメーター  $M, Q, L$  に対して全微分すると

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi}dA + \Omega_H dL + \Phi_H dQ, \quad (16)$$

を得る．ここで， $\kappa, \Omega_H, \Phi_H$  は

$$\kappa \equiv \frac{r_+ - M}{r_+^2 + a^2}, \quad (17)$$

$$\Omega_H \equiv \frac{a}{r_+^2 + a^2}, \quad (18)$$

$$\Phi_H \equiv \frac{r_+ Q}{r_+^2 + a^2}, \quad (19)$$

と定義し，それぞれホライズン上での表面重力，角速度，静電ポテンシャルを表す．ここで，(16) について考察すると，左辺は明らかに質量の次元であり，自然単位系においてエネルギーの次元である．同様に右辺についても，それぞれの項の次元を考えると確かにエネルギーの次元であることは容易に分かる．このことから，(16) はブラックホールの面積，角運動量，電荷の変化量と質量（エネルギー）変化量の関係を表すブラックホール物理におけるエネルギー保存則を表していると考えられることができる．

さて，ブラックホールを理解するための最も有用な考察の 1 つはブラックホールの物理を熱力学と対応させることであろう．ブラックホールの物理を詳しく調べてみると，熱力学第 0 法則から第 3 法則まで類似した対応関係を持つことが明らかになった（表 2）[5]．それらの対応

表 2 熱力学とブラックホール物理の対応関係

	熱力学	ブラックホール物理
第 0 法則	熱平衡状態における物体の温度 $\mathcal{T}$ は一定である	定常的なブラックホールのホライズン上での表面重力 $\kappa$ は一定である
第 1 法則	$d\mathcal{E} = \mathcal{T}dS - dW$	$dM = \frac{\kappa}{8\pi}dA + \Omega_H dL + \Phi_H dQ$
第 2 法則	任意の過程において $\delta S \geq 0$	任意の過程において $\delta A \geq 0$
第 3 法則	物理的な過程によって $\mathcal{T} = 0$ には到達できない	物理的な過程によって $\kappa = 0$ には到達できない

関係は次の通りである．熱力学第 0 法則は素朴に言えば、「3 つの系 A, B, C について，A と B の間も B と C の間も熱平衡が達成されていれば，A と C の間も熱平衡が達成されている」，すなわち，熱平衡にある物体はどの部分を選んで温度を測定しても同じ温度  $\mathcal{T}$  であることを意味する．このことはブラックホール物理において，静的または定常的なブラックホールの表面重力  $\kappa$  の値が至る所で同じ値をとることに対応していると考えられる．熱力学第 1 法則はエネルギー保存則のことであり，

$$dU = \mathcal{T}dS - dW, \quad (20)$$

によって与えられる．ここで， $U$  は内部エネルギー， $\mathcal{T}$  は温度， $S$  はエントロピー， $W$  は熱力学でなされる仕事を表す．熱力学第 2 法則はエントロピー増大則である．エントロピーは物質やエネルギーの偏りの度合いを表す．エントロピーを説明するための有名な例として，水の入ったコップにインクを垂らすことを考える．最初はインクの分子は水の中のある部分にかたまっている（局在化している）．これが「エントロピーの低い状態」である．しかし，時間の経過とともにインクはコップ全体に行き渡り，やがて均一な色になる．この状態が「エントロピーの高い状態」である．自然界ではエントロピーは系全体として減少することなく，時間とともに増加を続ける．すなわち，

$$\delta S \geq 0, \quad (21)$$

となる．ブラックホール物理の場合，古典的に放射を許さず，吸収のみ行うことができる．そして，ブラックホールに落ちていく物質や放射が増えるほど，ブラックホールの表面積  $A$  は大きくなるという性質があり，決して減少することはない．すなわち，ブラックホール面積の変化分  $\delta A$  は

$$\delta A \geq 0, \quad (22)$$

となる．この結果は，Hawking の面積増大定理として知られている [6]．熱力学第 3 法則は，「物理的な過程によって絶対温度が 0 に到達できない」ことである．ある系の温度を下げるためには，その温度より低い別の系を接触させることによって温度を下げる．系を絶対零度まで下げようとするとき，絶対零度より低い系を用意する必要がある．また，断熱膨張によって温度を下げることも可能であるが，絶対零度にするためには無限に膨張させる必要がある．どちらにしても，これらは物理的に不可能である．ブラックホール物理の場合，これは物理的な過程において表面重力  $\kappa$  が 0 に到達できないことに対応している<sup>†1</sup>．

ブラックホール物理と熱力学との関係が次第に明らかにされていく中，1973 年，ベッケンシュ

<sup>†1</sup>  $\kappa = 0$  となるのは “extreme” な場合，すなわち， $M^2 = a^2 + Q^2$  のみである．詳細な計算では “extreme” なブラックホールに近づければ近づけるほど，さらに近づけることが難しくなることが知られている [7]．

タイン (Bekenstein) は情報理論の観点からブラックホールがエントロピーを持つことを示唆した [8] . 情報理論において情報の損失はエントロピーの増加として理解される . 今, ある物体がブラックホールに落ち込むことを考える . ブラックホールはその物体を吸収したことによってブラックホールの表面積を増加させる . ブラックホールに物体が落ち込む前, 我々の世界において, その物体は様々な情報を持っているわけだが, ブラックホールに落ち込んだ後には先述の 3 つのパラメーター以外の情報を知ることができない . すなわち, 我々の世界に住む観測者からは物質の持つ多くの情報が失われたことになる . ベッケンシュタインはこの情報の損失こそがブラックホールエントロピーと考える . さらに, ブラックホールエントロピーを, 物体を吸収したことによって増加したブラックホールの表面積と結び付けた . しかしながら, ブラックホールが温度を持つことまでは言及できなかった . なぜなら, ブラックホールが実際に温度を持つならば, 周囲の温度との関係から吸収だけでなく放射もしなければならないことになる . 上記において述べたようにのように, ブラックホールの古典的な定義では「どんな粒子の脱出 (放射) も許さない領域」であったので, ブラックホールの温度を持つことまでは言及できず, ブラックホール物理と熱力学の完全な対応関係を示すことが出来なかった .

ホーキング (Hawking) はこのベッケンシュタインの論文を受けてブラックホールの放射のメカニズムを探った . そして, 1975 年ブラックホール物理に量子論的考察を取り入れることによって, ブラックホールが粒子を放出することを示した [9] . このブラックホールの放射は彼の名前にちなんでホーキング放射と呼ばれている . そのエッセンスは次の通りである .

量子論の重要な性質の 1 つに不確定性関係がある . この関係は, 粒子の位置を正確に測定するとその運動量の測定値が不確定となり, 逆に, 運動量を正確に測定するとその粒子の位置の測定値が不確定になることを意味している . 粒子の位置と運動量の間の不確定性関係から, 時間とエネルギーの間にも類似の関係式

$$\Delta t \Delta E \sim \hbar, \quad (23)$$

を得ることができる . ここで,  $\hbar$  はプランク定数である . 時間  $\Delta t$  の間にある量子力学的状態にある粒子のエネルギー  $\Delta E$  の最小の不確定性となる場合を表している . この関係式から, 非常に短い時間であれば, エネルギーのゆらぎ  $\Delta E$  が大きくなることが可能となることが分かる . 量子場の理論によると, 我々の世界ではいたる所でこの「エネルギーのゆらぎ」により粒子-反粒子の対生成・対消滅が起こっていると考えられている . 通常, 反粒子は正のエネルギーを持ち, 我々の進む時間方向に対して遡る方向に進む粒子として考えられ, 我々の世界においては安定に存在することが出来ずに,

$$\Delta t \sim \frac{\hbar}{\Delta E}, \quad (24)$$

と非常に短い時間内に実粒子と対消滅しなければならない . また, 反粒子を我々の進む時間方

向と同じ方向に進む粒子と考えるとき、反粒子は負のエネルギー状態を持つ粒子として解釈することもできる。

一般相対性理論の局所平坦性により、ブラックホールの極近傍のような曲がった時空においても、この粒子-反粒子の対生成は起こっていると考えられる。ホライズンの極近傍において、エネルギー  $E$  を持つ粒子-反粒子を作るエネルギーのゆらぎ  $2E$  を考える。もし、この粒子対がホライズンのすぐ外側で作られるならば、反粒子は時間  $\hbar/2E$  が経過する前にホライズンの中に落ち込む可能性がある。我々の世界では不安定である反粒子も、ホライズンの内部では実現可能な軌道に乗せることができ、安定となることが知られている [10]。我々は、今、反粒子のみブラックホールに吸収され、実粒子が我々の世界に留まることを考える。特に、質量の無い実粒子はホライズンに吸い込まれることなく無限遠に到達することが可能となる。このとき、我々の世界にいる観測者から見ればブラックホールは反粒子（負のエネルギー状態  $-E$ ）を吸収したことによって、自身のエネルギーを減少させ、一方で、その減少分と同じ量のエネルギー  $E$  を持つ実粒子が我々の世界に出てきたことになり、これを放射として理解することができる（図 1）。これが、あたかもブラックホールが粒子を放出するように振る舞うホーキング放射のメカニズムである。Hawking は実際に Bogoliubov 変換を用いて、重力崩壊する天体を作る時空において、生成される粒子数期待値を計算した。すると、ブラックホールからの放射はある温度（ホーキング温度  $T_H = \kappa/2\pi$ ）を持つ黒体放射スペクトラムに一致する、すなわち、ブラックホールが黒体放射のように振る舞うことを示した。

こうして、ブラックホールの放射のメカニズムを説明することができるようになり、ブラックホール物理と熱力学との完全な対応関係を得ることができた。さらには、その考察によってブラックホールの蒸発など様々なブラックホールの特性が示された [11]。また、この Hawking 放射によるブラックホール面積の減少に伴い、ブラックホール熱力学の第 2 法則は

$$\Delta S_{\text{BH}} + \Delta S_{\text{C}} = \Delta(S_{\text{BH}} + S_{\text{C}}) \geq 0, \quad (25)$$

のように一般化された [12]。ここで、 $\Delta S_{\text{BH}}$  はブラックホールエントロピーの変化を、 $\Delta S_{\text{C}}$  は

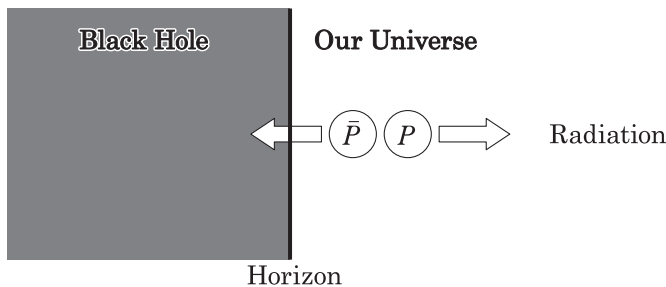


図 1 ホーキング放射のメカニズム

我々の世界のエントロピーの変化を表す。

ホーキング放射は一般相対性理論の枠組みにおいて量子的な効果を考慮することによって示されるので、一般相対性理論と量子論が同時に役割を果たす非常に興味深い現象の1つであると言える。ホーキングによるオリジナルな導出以後、この現象は多くの研究者によって研究され、様々なホーキング放射の導出法が提案された。ホーキング放射はいくつかの異なるアプローチにおいても同じ結果を導き出すことから、現在では幅広く受け入れられている。特に、2000年、パリク (Parikh) とウィルチェック (Wilczek) によって導出された量子トンネル効果に基づくホーキング放射の導出法 [13] は直感的で、非常に分かり易い。

本研究ではこの量子トンネル効果に基づくホーキング放射の導出法と最近の発展であるホライズン近傍における次元縮約の有用性について議論する。本論文の内容は次の通りである。2章において、我々はトンネリングメカニズムと呼ばれる量子トンネル効果に基づくホーキング放射の導出法について説明する。3章では、ブラックホールのホライズン近傍における次元縮約のテクニックについて議論する。4章において、我々はホライズン近傍の次元縮約のテクニックを用いることによって、トンネリングメカニズムの議論をより明快にそして、簡単化する方法を与える。5章は、結論と議論に捧げる。

## 2. トンネリングメカニズム

この章では、量子トンネル効果に基づくホーキング放射の導出法について議論する。この導出法は最初スリニヴァサン (Srinivasan) とパドマナブハン (Padmanabhan) によって提案され [14]、その後、パリク (Parikh) とウィルチェック (Wilczek) によってより明快にそして広く知られるようになった [13]。この量子トンネル効果に基づくホーキング放射の導出法はしばしばトンネリングメカニズムと呼ばれ、そのエッセンスは次の通りである。我々はブラックホール内部のホライズン近傍において粒子と反粒子の対生成を考える。このとき、粒子に関する場をブラック

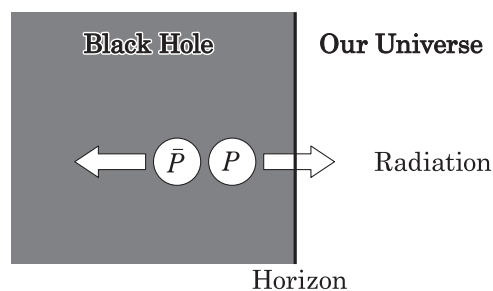


図2 トンネリングメカニズム



ホールに落ち込むモード（内向モード）とブラックホールの外側に出ようとするモード（外向モード）に分けることができる．内向モードはブラックホールの内部に留まったままであるのに対して，外向モードはその一部が量子トンネル効果によってホライズンを通り抜け，我々の世界に放射として現れることが考えられる．上記の過程により得られた粒子を我々はブラックホールからの放射として考えることができる．

ウィルチェック等の導出法 [13] では，ホライズンの半径が小さくなるという古典的に禁止された系に対して WKB 近似

$$\phi \simeq e^{iS}, \quad (26)$$

を用いて波動関数による確率振幅  $\Gamma$

$$\Gamma \equiv |\phi|^2 \simeq |e^{iS}|^2, \quad (27)$$

を計算した．ここで， $S$  は系の作用を表す．この式から，作用  $S$  を評価すれば確率振幅  $\Gamma$  を求めることができる．特に，作用の虚部がこの確率振幅に影響を与えることに注意されたい．実際，作用の実部は常に 1 を与え，この確率振幅に影響を与えないことが分かる．この作用の評価については下記において詳細に述べることにするが，シュバルツシルトブラックホールの場合，確率振幅  $\Gamma$  は

$$\Gamma \simeq e^{-8\pi M\omega}, \quad (28)$$

となる．ここで， $\omega$  は放射された粒子の持つエネルギー， $M$  はブラックホールの質量を表す．この値と温度  $\mathcal{T}$  での熱平衡状態におけるボルツマン因子 (Boltzmann factor)

$$\Gamma_B = e^{-\frac{\omega}{\mathcal{T}}}, \quad (29)$$

を比較することによって，よく知られているホーキング温度

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad (30)$$

の結果を得た．ここで， $\kappa$  はホライズン上での表面重力を表し，シュバルツシルトの場合， $\kappa = 1/4M$  によって与えられる．

下記では，具体的な作用の評価を行う．本論文では，基本的にウィルチェック等の導出法 [13] に従うが，正準理論を用いることによって，より明快な議論を与えることを試みる．ここでは簡単のために，4次元のシュバルツシルトブラックホールの場合を考えることにする．先述のように，その時空はシュバルツシルト計量

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (31)$$

によって与えられる．ここで， $d\Omega^2$  は 2 次元単位球面を表す．この計量は  $r = 0$  と  $r = 2M$  において特異点を持つ． $r = 0$  での特異点は曲率特異点とも呼ばれ，取り除くことができない特異点であるのに対して，もう一方の  $r = 2M$  での特異点は単に座標の選び方が悪いために生じる見かけの特異点と言われる．

この見かけの特異点を取り除くために，彼らはパnulベ座標 (Painlevé coordinates)

$$t_p = t + 2\sqrt{2Mr} + 2M \ln \left( \frac{\sqrt{r} - \sqrt{2M}}{\sqrt{r} + \sqrt{2M}} \right), \quad (32)$$

を用いた．ここで，この座標の微小変化  $dt_p$  は

$$dt_p = dt + \sqrt{\frac{2M}{r}} \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr. \quad (33)$$

によって与えられる．(33) を (31) に代入することによって，パnulベ計量

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt_p^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r}} dt_p dr + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (34)$$

を得る．我々はこの座標系において， $r = 2M$  で特異点が現れないことを容易に確認することができる．我々はトンネリングメカニズムによってホライズンを越える物理を考えているので，ホライズンでの振る舞いが良いパnulベ計量 (34) を用いることにする．

ここで，系の作用を考える．作用は

$$S = \int L dt = -\mu_m \int ds = \int -\mu_m \frac{ds}{dt} dt, \quad (35)$$

によって定義される．ここで， $L$  はラグランジアン (Lagrangian)

$$L = -\mu_m \frac{ds}{dt}, \quad (36)$$

を表し， $\mu_m$  は放射によって出てきた粒子の質量を表す．今，時空の計量はパnulベ計量，すなわち

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt_p^2 - 2\sqrt{\frac{2M}{r}} dt_p dr - dr^2, \quad (37)$$

によって与えられる．正準理論では時間成分の符号を正に取ることが慣習的である．また，我々は 2 次元の角度成分を無視したが，この理由は 3 章の議論を用いることによって明らかになる．計量 (37) から，

$$\frac{ds}{dt_p} = \pm \sqrt{\left( 1 - \frac{2M}{r} \right) - 2\sqrt{\frac{2M}{r}} \frac{dr}{dt_p} - \left( \frac{dr}{dt_p} \right)^2}, \quad (38)$$

を得る．ここで，我々は正の符号を採用する．したがって，ラグランジアン (36) は

$$L_p(r, \dot{r}_p) = -\mu_m \sqrt{\left( 1 - \frac{2M}{r} \right) - 2\sqrt{\frac{2M}{r}} \dot{r}_p - \dot{r}_p^2}, \quad (39)$$

となる．ここで， $\dot{r}_p \equiv \frac{dr}{dt_p}$  を定義した．動径座標  $r$  に対する正準運動量  $p_p$  は

$$p_p \equiv \frac{\partial L_p}{\partial \dot{r}_p} = \frac{\mu_m \left( \dot{r}_p + \sqrt{\frac{2M}{r}} \right)}{\sqrt{1 - \left( \dot{r}_p + \sqrt{\frac{2M}{r}} \right)^2}}, \quad (40)$$

によって定義される．(40) を  $\dot{r}_p$  について解くことによって，

$$\dot{r}_p = \pm \sqrt{\frac{p_p^2}{p_p^2 + \mu_m^2} - \sqrt{\frac{2M}{r}}}, \quad (41)$$

を得る．ここで， $+$ ( $-$ ) は外向 (内向) モードを表す．我々は今，外に放射される外向モードの粒子を考えているので，符号は  $+$  を採用する．正準理論において，ハミルトニアンは

$$H = p\dot{r} - L(r, \dot{r}), \quad (42)$$

によって定義される．ハミルトニアン (42) に (41) を代入することによって

$$H_p(r, p_p) = p_p \left( \sqrt{\frac{p_p^2}{p_p^2 + \mu_m^2}} - \sqrt{\frac{2M}{r}} \right) + \mu_m \sqrt{\frac{\mu_m^2}{p_p^2 + \mu_m^2}}, \quad (43)$$

を得る．

上記の議論において，ブラックホールの外に放射される粒子の質量  $\mu_m$  が 0 となる場合を考えたいとき，この時点で  $\mu_m = 0$  とすれば正しい結果を得られることはよく知られている．(43) において， $\mu_m = 0$  とし， $p_p$  について求めると，

$$p_p = \frac{H_p}{1 - \sqrt{\frac{2M}{r}}}, \quad (44)$$

を得る．(42) と (44) を用いることによって，作用 (35) は

$$S = \int L_p dt_p = \int [p_p \dot{r}_p - H_p] dt_p = \int p_p dr - \int H_p dt_p = \int \frac{H_p}{1 - \sqrt{\frac{2M}{r}}} dr - \int H_p dt_p, \quad (45)$$

となる．今，ハミルトニアン  $H_p$  はブラックホールの外に放射される粒子の持つエネルギーであり，これを  $\omega$  とする．通常のホーキング放射の導出法においては， $\omega$  の放出はブラックホールの質量  $M$  に比べて非常に小さいとし，時空の計量に影響を与えないと考える．しかし，エネルギー保存則を重視するならば，この粒子の放出によってブラックホールの質量は  $\omega$  の分だけ小さくなるだろう (図 3)．これによって，時空の計量は

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2(M - \omega)}{r} \right) dt_p^2 - 2 \sqrt{\frac{2(M - \omega)}{r}} dt_p dr - dr^2, \quad (46)$$

として表される．この粒子の放射に伴う時空の変化を考慮することを逆反応 (back reaction) と言

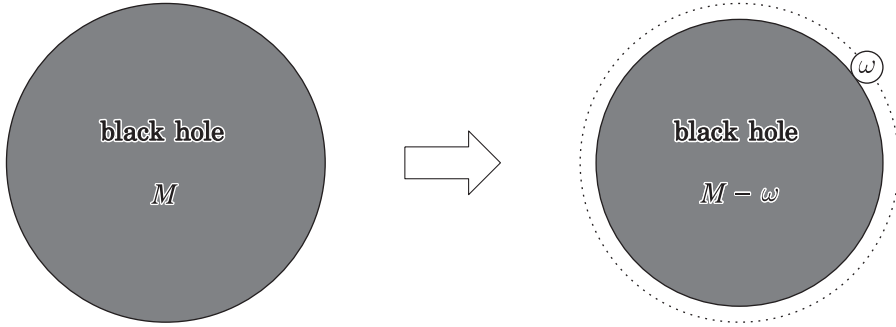


図3 粒子放射による逆反応

う．他の導出法と比べて，この逆反応を考慮することができるのはトンネリングメカニズムの大きな利点である．

この逆反応を考慮することによって，我々の評価したい作用 (45) は

$$S = \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} \int_0^{\omega} \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{2(M-\omega')}{r}}} d\omega' dr - \int_{t_{p(\text{in})}}^{t_{p(\text{out})}} \int_0^{\omega} d\omega' dt_p, \quad (47)$$

となる．(27) より，我々は作用の虚部に興味がある．ホライズンで  $t \rightarrow \infty$  となるシュバルツシルト時間  $t$  と異なり，パンルベ時間  $t_p$  はホライズン上でも有限になることが知られている．こうして，我々はパンルベ時間  $t_p$  の使用により，第2項は積分区間・被積分関数ともに有限であるため作用の虚部が現れない．一方，第1項は積分区間は有限であるものの，被積分関数に極が現れるため作用の虚部が現れることが予測できるだろう．我々は変数変換  $M' = M - \omega$  を用いることによって

$$S = \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} \int_M^{M-\omega} \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{2M'}{r}}} dM' dr + (\text{real part}), \quad (48)$$

を得る．正エネルギー解に対するファインマンの  $i\epsilon$  処方 (Feynman's  $i\epsilon$  prescription) またはソホツキーの公式 (Sokhotsky's formula),  $M' \rightarrow M' - i\epsilon$ , を用いることによって，我々は

$$\begin{aligned} S &= \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} \int_M^{M-\omega} \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{2M'}{r} + i\epsilon}} dM' dr + (\text{real part}) \\ &= \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} \int_M^{M-\omega} -i\pi\delta\left(1 - \sqrt{\frac{2M'}{r}}\right) dM' dr + (\text{real part}) \\ &= -i\pi \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} r dr + (\text{real part}) \\ &= -\frac{i\pi}{2} (r_{\text{out}}^2 - r_{\text{in}}^2) + (\text{real part}), \end{aligned} \quad (49)$$

を得る．ブラックホールの質量は  $M$  から  $M - \omega$  へ変化するので，動径座標  $r$  の範囲は  $r_{\text{in}} = 2M$  から  $r_{\text{out}} = 2(M - \omega)$  へ変化することになる．これを (49) に代入することによって，

$$S = 4i\pi\omega \left( M - \frac{\omega}{2} \right) + (\text{real part}), \quad (50)$$

と作用を求めることができる．したがって，準古典的な WKB 近似の確率振幅 (27) は

$$\Gamma \simeq e^{-8\pi\omega M + 4\pi\omega^2}, \quad (51)$$

となる．放射された粒子のエネルギー  $\omega$  がブラックホールの質量  $M$  に比べて十分小さいとき，すなわち， $M \gg \omega$  のとき，確率振幅 (51) は

$$\Gamma \simeq e^{-8\pi\omega M} = e^{-\frac{2\pi}{\kappa}\omega}, \quad (52)$$

となる．ここで，シュバルツシルトブラックホールの表面重力  $\kappa = \frac{1}{4M}$  を用いた．したがって，(29) の議論により，我々はホーキング温度

$$T_{\text{H}} = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad (53)$$

を得る．この結果はホーキングのオリジナルの結果 [9] に一致する．(51) における  $\omega$  の 2 次のオーダーは，逆反応を考慮したことによる補正項と考えることができる．

パリクとウィルチェックの論文 [13] においては，球対称な時空を持つブラックホール，すなわち，シュバルツシルトブラックホールやライスナー・ノルドストロムブラックホールの場合に対して，これらの結果を得た．この方法をカー・ブラックホールやカー・ニューマンブラックホールのような球対称でない時空を持つブラックホールの場合に拡張することを考える．しかしながら，素朴な拡張では，この回転の効果のため数学的にかなり複雑になる [15–18]．

最近，我々はこれらのトンネリングメカニズムを議論する際に，ホライズン近傍の次元縮約のテクニックが非常に有効であることを提案した [19, 20]．次の章では，ホライズン近傍における次元縮約のテクニックについて詳しく説明する．

### 3. ホライズン近傍における次元縮約

カー・ニューマンブラックホールが作る時空の計量は (2) の形から分かるように，軸対称ではあるが，球対称な計量でない．この章において，我々はホライズン近傍の次元縮約のテクニックを使って，4次元のカー・ニューマン計量が有効的に2次元の球対称な計量になることを示す．簡単のために，複素スカラー場に対する4次元の作用

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\partial_\mu + ieV_\mu)\phi^* (\partial_\nu - ieV_\nu)\phi + S_{\text{int}}, \quad (54)$$

を考える．ここで，第1項は運動項であり，第2項  $S_{\text{int}}$  は質量項，ポテンシャル項，相互作用項を表す．ゲージ場  $V_\mu$  は電荷を持つブラックホールのクーロンポテンシャルに関連し，

$$(V_\mu) = \left( -\frac{Qr}{r^2 + a^2}, 0, 0, 0 \right), \quad (55)$$

によって与えられる．(2) と (55) を代入することによって，我々は

$$S = \int dt dr d\theta d\varphi \sin\theta \phi^* \left[ \left( \frac{r^2 + a^2}{\Delta} - a^2 \sin^2\theta \right) \left( \partial_t + \frac{ieQr}{r^2 + a^2} \right)^2 + 2ia \left( \frac{r^2 + a^2}{\Delta} - 1 \right) \left( \partial_t + \frac{ieQr}{r^2 + a^2} \right) \hat{L}_z - \partial_r \Delta \partial_r + \hat{L}^2 - \frac{a^2}{\Delta} \hat{L}_z^2 \right] \phi + S_{\text{int}}, \quad (56)$$

を得る．ここで，軌道角運動量

$$\hat{L}^2 = -\frac{1}{\sin\theta} \partial_\theta \sin\theta \partial_\theta - \frac{1}{\sin^2\theta} \partial_\varphi^2, \quad (57)$$

$$\hat{L}_z = -i\partial_\varphi, \quad (58)$$

を用いた．場  $\phi$  を球面調和関数の項での展開

$$\phi = \sum_{l,m} \phi_{lm}(t, r) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (59)$$

を用いることによって，

$$S = \int dt dr d\theta d\varphi \sin\theta \sum_{l',m'} \phi_{l'm'}^* Y_{l'm'}^* \left[ \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \left( \partial_t + \frac{ieQr}{r^2 + a^2} \right)^2 - a^2 \sin^2\theta \left( \partial_t + \frac{ieQr}{r^2 + a^2} \right)^2 + 2ima \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \left( \partial_t + \frac{ieQr}{r^2 + a^2} \right) - 2ima \left( \partial_t + \frac{ieQr}{r^2 + a^2} \right) - \partial_r \Delta \partial_r + l(l+1) - \frac{m^2 a^2}{\Delta} \right] \times \sum_{l,m} \phi_{lm} Y_{lm} + S_{\text{int}}, \quad (60)$$

を得る．ここで，角運動量演算子  $\hat{L}^2$  と  $\hat{L}_z$  に対する固有値方程式

$$\hat{L}^2 Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm}, \quad (61)$$

$$\hat{L}_z Y_{lm} = m Y_{lm}, \quad (62)$$

を用いた．また， $l$  は方位量子数とし， $m$  は磁気量子数とする．

今，我々は動径座標  $r$  に対して

$$\frac{dr_*}{dr} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \equiv \frac{1}{f(r)}, \quad (63)$$

によって定義される亀座標 (tortoise coordinate)  $r_*$  への変換を行う．この変換の後，作用 (60) は

$$\begin{aligned}
 S = & \int dt dr_* d\theta d\varphi \sin \theta \sum_{l', m'} \phi_{l' m'}^* Y_{l' m'}^* \left[ (r^2 + a^2) \left( \partial_t + \frac{ieQr}{r^2 + a^2} \right)^2 - f(r) a^2 \sin^2 \theta \left( \partial_t + \frac{ieQr}{r^2 + a^2} \right)^2 \right. \\
 & + 2ima \left( \partial_t + \frac{ieQr}{r^2 + a^2} \right) - f(r) 2ima \left( \partial_t + \frac{ieQr}{r^2 + a^2} \right) - \partial_{r_*} (r^2 + a^2) \partial_{r_*} \\
 & \left. + f(r) l(l+1) - \frac{m^2 a^2}{r^2 + a^2} \right] \sum_{l, m} \phi_{lm} Y_{lm} + S_{\text{int}}, \quad (64)
 \end{aligned}$$

となる．

ここで，我々はホライズン近傍領域においてこの作用を考える．ホライズン近傍，すなわち， $r \rightarrow r_+$  において， $f(r_+) = 0$  であることを考慮し，作用 (64) の各項の中で支配的な項のみを残すことにする．こうして，我々は

$$\begin{aligned}
 S_{(H)} = & \int dt dr_* d\theta d\varphi \sin \theta \sum_{l', m'} \phi_{l' m'}^* Y_{l' m'}^* \left[ (r^2 + a^2) \left( \partial_t + \frac{ieQr}{r^2 + a^2} \right)^2 + 2ima \left( \partial_t + \frac{ieQr}{r^2 + a^2} \right) \right. \\
 & \left. - \partial_{r_*} (r^2 + a^2) \partial_{r_*} - \frac{m^2 a^2}{r^2 + a^2} \right] \sum_{l, m} \phi_{lm} Y_{lm}, \quad (65)
 \end{aligned}$$

を得ることができる．ここで， $r \rightarrow r_+$  での  $f(r_+) = 0$  を用いることによって， $S_{\text{int}}$  を無視した．この直感的な理解としては，ホライズン近傍において非常に高エネルギーの理論となるため，物質場の運動項が優勢となり，質量項や相互作用項など  $S_{\text{int}}$  に含まれる項は無視できると考えられる．例えば，質量項の場合を考える．質量項は通常

$$\int dx^4 (\mu_m^2 \phi^* \phi) = \int dt dr d\theta d\varphi \sin \theta (\mu_m^2 \phi^* \phi) \quad (66)$$

$$= \int dt dr_* d\theta d\varphi \sin \theta (f(r) \mu_m^2 \phi^* \phi), \quad (67)$$

によって与えられる．ここで， $\mu_m$  はスカラー場の質量を表し，(67) において亀座標 (63) を用いた．(67) から，ホライズン近傍の特性  $f(r_+) = 0$  を用いることによって質量項を消すことができる．通常用いられる相互作用項などに対しても，同様の理由により消すことができる．しかし， $S_{\text{int}}$  に含まれる項の中に，動径座標に関する微分を含むような場合には注意が必要となることを強調しておきたい．

上記の解析により，我々は作用 (65) がホライズン近傍において，

$$S_{(H)} = - \sum_{l, m} \int dt dr (r^2 + a^2) \phi_{lm}^* \left[ - \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \left( \partial_t + \frac{ieQr}{r^2 + a^2} + \frac{ima}{r^2 + a^2} \right)^2 + \partial_r \frac{\Delta}{r^2 + a^2} \partial_r \right] \phi_{lm}, \quad (68)$$

と書くことができることを示した．ここで，我々は球面調和関数の規格直交条件

$$\int d\theta d\varphi \sin \theta Y_{l' m'}^* Y_{lm} = \delta_{l', l} \delta_{m', m}, \quad (69)$$

を用いた．

作用 (68) の形から, 我々はホライズン近傍において, 物質場  $\phi_{lm}$  を有効的にディラトン (dilaton)  $\Phi$ , 計量  $g_{\mu\nu}$ , 2 つのゲージ場  $V_\mu, U_\mu$

$$\Phi = r^2 + a^2, \quad (70)$$

$$g_{tt} = -f(r), \quad g_{rr} = \frac{1}{f(r)}, \quad g_{rt} = 0, \quad (71)$$

$$V_t = -\frac{Qr}{r^2 + a^2}, \quad V_r = 0, \quad (72)$$

$$U_t = -\frac{a}{r^2 + a^2}, \quad U_r = 0. \quad (73)$$

の背景における 2 次元の複素スカラー場として解釈することができる. したがって, 4 次元の球対称でないカー・ニューマン計量 (2) がホライズン近傍においてのみ有効的に 2 次元の球対称な計量

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 \quad (74)$$

$$= -\frac{\Delta}{r^2 + a^2}dt^2 + \frac{r^2 + a^2}{\Delta}dr^2 \quad (75)$$

$$= -\left(1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2} + \frac{Q^2}{r^2 + a^2}\right)dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2} + \frac{Q^2}{r^2 + a^2}}dr^2, \quad (76)$$

のように振る舞うことが分かる. 確認のため, 球対称なブラックホールが満たすホライズン上での表面重力を求める公式を用いることにより

$$\kappa \equiv \frac{1}{2} \partial_r f(r) \Big|_{r=r_+} = \frac{r_+ - M}{r_+^2 + a^2}, \quad (77)$$

を得る. この結果はオリジナルのカー・ニューマン計量 (2) による表面重力 (17) に一致している.

こうして, 我々はホライズン近傍における次元縮約のテクニックを用いることによって, 4 次元のカー・ニューマン計量を簡単な 2 次元の球対称な計量に書くことができることを示した. このテクニックをトンネリングメカニズムに応用することによって, カー・ニューマンブラックホールへの拡張の際にも複雑な計算をすることなく, パリクとウィルチェックの方法を用いることができる. また, このテクニックはホライズン近傍においてのみ有効であるが, 例えば作用 (49) の積分範囲を見ても分かるように, トンネリングメカニズムもホライズン近傍の議論が本質であるので, このテクニックを用いることができる. 次の章では, 実際にこのホライズン近傍の次元縮約のテクニックをトンネリングメカニズムに応用し, より明快なホーキング放射の導出法を与える.

#### 4. トンネリングメカニズムとホライズン近傍における次元縮約

我々はホライズン近傍における次元縮約のテクニックを用いることによって, 4 次元の球対



称でないカー・ニューマン計量 (2) がホライズン近傍においては有効的に 2 次元の球対称な計量 (76) になることを示した．この章では，実際にこのホライズン近傍の次元縮約のテクニックをトンネリングメカニズムに応用し，より明快なホーキング放射の導出法を与え，さらにカー・ニューマンブラックホールの場合における逆反応の効果を具体的に評価する．

ホライズンを越える現象を考えるため (33) で用いたように，この有効的な 2 次元の計量 (76) に対するパルベ座標の時間成分は

$$dt_p \equiv dt + \frac{\sqrt{\frac{2Mr}{r^2+a^2} - \frac{Q^2}{r^2+a^2}}}{1 - \frac{2Mr}{r^2+a^2} + \frac{Q^2}{r^2+a^2}} dr, \quad (78)$$

のように定義する．そのとき，(37) に対応するパルベ計量は

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr}{r^2+a^2} + \frac{Q^2}{r^2+a^2}\right) dt_p^2 - 2\sqrt{\frac{2Mr}{r^2+a^2} - \frac{Q^2}{r^2+a^2}} dt_p dr - dr^2, \quad (79)$$

となる．ここで，(37) において 2 次元の角度成分を無視した理由や (44) において  $\mu_m \rightarrow 0$  とした理由についても，ホライズン近傍の次元縮約のテクニックによって明快になったであろう．これ以降の議論は 2 章の繰り返しになるので重複を避けるが，我々の評価したい逆反応を考慮した後の作用は

$$S = \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} \int_M^{M-\omega} \frac{dM'}{1 - \sqrt{\frac{2M'r}{r^2+a^2} - \frac{Q^2}{r^2+a^2}}} dr + (\text{real part}), \quad (80)$$

となる．ここで，(49) を導いた処方を用いることによって，我々は

$$\begin{aligned} S &= \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} \int_M^{M-\omega} \frac{dM'}{1 - \sqrt{\frac{2M'r}{r^2+a^2} - \frac{Q^2}{r^2+a^2}} + i\epsilon} dr + (\text{real part}) \\ &= \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} \int_M^{M-\omega} -i\pi\delta\left(1 - \sqrt{\frac{2M'r}{r^2+a^2} - \frac{Q^2}{r^2+a^2}}\right) dM' dr + (\text{real part}) \\ &= -i\pi \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} \left(\frac{r^2+a^2}{r}\right) dr + (\text{real part}) \\ &= -i\pi \left[ \frac{r_{\text{out}}^2 - r_{\text{in}}^2}{2} + a^2 \ln\left(\frac{r_{\text{out}}}{r_{\text{in}}}\right) \right] + (\text{real part}), \end{aligned} \quad (81)$$

となる．ここで， $r_{\text{out}}$  と  $r_{\text{in}}$  はそれぞれ，

$$r_{\text{out}} = M - \omega + \sqrt{(M - \omega)^2 - a^2 - Q^2}, \quad (82)$$

$$r_{\text{in}} = M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2} = r_+, \quad (83)$$

によって与えられる．我々は  $\omega$  の 2 次のオーダーまで考慮するとき，作用 (81) は

$$S \simeq -i\pi \left[ -\frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - M} \omega + \frac{r_+^3 - 2Ma^2}{4(r_+ - M)^3} \omega^2 \right], \quad (84)$$

となる．ここで，我々は

$$r_{\text{out}} \simeq r_+ - \frac{r_+}{r_+ - M} \omega + \frac{r_+(r_+ - 2M)}{2(r_+ - M)^3} \omega^2, \quad (85)$$

$$\ln\left(\frac{r_{\text{out}}}{r_{\text{in}}}\right) \simeq -\frac{1}{r_+ - M} \omega - \frac{M}{2(r_+ - M)^3} \omega^2, \quad (86)$$

を用いた．したがって，我々は準古典的な WKB 近似の確率振幅 (27)

$$\Gamma \simeq e^{-\frac{2\pi(r_+^2+a^2)}{r_+-M}\omega + \frac{\pi(r_+^2-2Ma^2)}{2(r_+-M)^3}\omega^2}, \quad (87)$$

を得ることができる．放射された粒子のエネルギー  $\omega$  がブラックホールの質量  $M$  に比べて十分小さいとき，すなわち， $M \gg \omega$  のとき，確率振幅 (87) は

$$\Gamma \simeq e^{-\frac{2\pi(r_+^2+a^2)}{r_+-M}\omega} = e^{-\frac{2\pi}{k}\omega}, \quad (88)$$

となる．ここで，カー・ニューマンブラックホールのホライズン上での表面重力 (17) を用いた．したがって，(29) の議論により，我々はホーキング温度

$$T_{\text{H}} = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad (89)$$

を得る．この結果はホーキングのオリジナルの結果 [9] に一致する．もちろん，(87) における  $\omega$  の 2 次のオーダーは，逆反応を考慮したことによる補正項と考えることができる．著者の知る限り，カー・ニューマンブラックホールを背景として，トンネリングメカニズムから逆反応の高次の補正項を具体的に評価した論文は過去にない．ちなみに，(87) の補正項において  $r_+ = 2M$ ， $a = 0$  と置くことによって，シュバルツシルトの結果 (51) を再現することが容易に確認できる．

## 5. 結論

我々はホライズン近傍における次元縮約のテクニックを用いることによって，パリクとウィルチェックの議論をより明快にした．特に，回転するブラックホールへの拡張を議論する際に非常に有効である．実際，我々の提案した方法による計算は，パリクとウィルチェックによる球対称なブラックホールに対するオリジナルな計算とほとんど変わらない．それにもかかわらず，回転の効果がきちんと含まれており， $\omega$  に対する 1 次のオーダーでは正確にホーキング温度を導出することを示した．

また，我々はエネルギー保存則に重きを置くことによって，ブラックホールの粒子放出に伴うブラックホール自身の時空の変化 (逆反応) についても，詳細な議論を行った．この逆反応を議論することができるのは，トンネリングメカニズムの大きな利点の 1 つである．特に，回転するブラックホールの場合，計量が複雑なためこの逆反応による補正項を具体的に評価されな

かったが、今回、カー・ニューマンブラックホールの場合において、補正項を  $\omega$  の 2 次のオーダーまで具体的に評価した。これは新しい結果と言える。

### 参 考 文 献

- [1] W. Israel, "Event Horizons In Static Vacuum Space-Times," *Phys. Rev.* **164**, 1776 (1967).
- [2] B. Carter, "Axisymmetric Black Hole Has Only Two Degrees of Freedom," *Phys. Rev. Lett.* **26**, 331 (1971).
- [3] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, "The Large scale structure of space-time," *Cambridge University Press, Cambridge, 1973*, §9.3.
- [4] R. Ruffini and J. A. Wheeler, "Introducing the black hole," *Phys. Today*, **24**, 30 (1971).
- [5] J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking, "The Four laws of black hole mechanics," *Commun. Math. Phys.* **31**, 161 (1973).
- [6] S. W. Hawking, "Gravitational radiation from colliding black holes," *Phys. Rev. Lett.* **26**, 1344 (1971).
- [7] R. M. Wald, "Gedanken experiments to destroy a black hole," *Annals Phys.* **82**, 548 (1974).
- [8] J. D. Bekenstein, "Black holes and entropy," *Phys. Rev. D* **7**, 2333 (1973).
- [9] S. W. Hawking, "Particle Creation By Black Holes," *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975) [Erratum-ibid. **46**, 206 (1976)].
- [10] B. F. Schutz, "A First Course In General Relativity," *Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1985)*, §11.5
- [11] S. W. Hawking, "Black hole explosions," *Nature* **248**, 30 (1974).
- [12] J. D. Bekenstein, "Generalized second law of thermodynamics in black hole physics," *Phys. Rev. D* **9**, 3292 (1974).
- [13] M. K. Parikh and F. Wilczek, "Hawking radiation as tunneling," *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5042 (2000) [arXiv:hep-th/9907001].
- [14] K. Srinivasan and T. Padmanabhan, "Particle production and complex path analysis," *Phys. Rev. D* **60**, 024007 (1999) [arXiv:gr-qc/9812028].
- [15] J. Y. Zhang and Z. Zhao, "Hawking Radiation Via Tunneling From Kerr Black Holes," *Mod. Phys. Lett. A* **20**, 1673 (2005).
- [16] J. Y. Zhang and Z. Zhao, "New coordinates for Kerr-Newman black hole radiation," *Phys. Lett. B* **618**, 14 (2005).
- [17] Q. Q. Jiang, S. Q. Wu and X. Cai, "Hawking radiation as tunneling from the Kerr and Kerr-Newman black holes," *Phys. Rev. D* **73**, 064003 (2006) [Erratum-ibid. *D* **73**, 069902 (2006)] [arXiv:hep-th/0512351].
- [18] D. Chen and S. Yang, "A method to study the Hawking radiation of the Kerr black hole," *Mod. Phys. Lett. A* **22**, 2611 (2007).
- [19] K. Umetsu, "Hawking Radiation from Kerr-Newman Black Hole and Tunneling Mechanism," *Int. J. Mod. Phys. A* **25**, 4123 (2010) [arXiv:0907.1420 [hep-th]].
- [20] K. Umetsu, "Tunneling Mechanism in Kerr-Newman Black Hole and Dimensional Reduction near the Horizon," *Phys. Lett. B* **692**, 61 (2010) [arXiv:1007.1823 [hep-th]].

## Derivation of Hawking Radiation on the Basis of Quantum Tunneling and Dimensional Reduction near the Horizon

Koichiro UMETSU

### Abstract

The black hole radiation which is commonly called Hawking radiation, is one of very interesting phenomena where both of general relativity and quantum theory play a role. In the paper, it is shown that the derivation of Hawking radiation on the basis of the quantum tunneling is very simplified by using the technique of the dimensional reduction near the event horizon of a black hole. Furthermore, in the case of a rotating black hole, we concretely derive the effects of the back reaction which is one of advantages in the approach.

**Keywords:** black hole, Hawking radiation, tunneling mechanism, dimensional reduction, back reaction