自己重力系のエントロピーについて

原　　哲也
和合　孝倫
由比　庸平
梶浦　大吾

(平成 23 年 9 月 22 日提出
平成 23 年 11 月 30 日修正
平成 23 年 12 月 23 日再修正)

要　旨

通常重力崩壊する前の星のエントロピー S は，星の質量を M とすると，非相対論的，非縮退な場合 $S \propto M$ であるが，重力崩壊して Black Hole になった時，そのエントロピーが $S \propto M^2$ となる．これを理解するために，自己重力系のエントロピーとして，通常の一様な場合の時のエントロピーに，重力場からの寄与があることに注目した．このような項により，Black Hole になった時，そのエントロピーが $S \propto M^2$ となる事が無理なく理解される．また，極限的に冷却した中性子星のエントロピーも $S \propto M^2$ となり，それが何らかの原因で崩壊して Black Hole となった場合，そのエントロピーの変化の連続性が理解される．

キーワード： エントロピー，自己重力系，化学ポテンシャル，ブラックホール，中性子星

1　Introduction

通常の非相対論的な，非縮退の一様な理想気体のガスであれば，n, m を粒子の個数密度，質量とすると，単位体積当たりのエントロピー s は

$$s = nk_B \left\{ \frac{5}{2} - \log \left[n \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_BT} \right)^{3/2} \right] \right\} \tag{1}$$

で与えられる [1, 2]．ここで k_B はボルツマン定数で，$\hbar$ はプランク定数を h とすると $\hbar = h/(2\pi)$ である．このエントロピーを重力平衡にある星の空間全体について (後で記述するように，重力の寄与も含めて) 積分すれば，星全体のエントロピーが得られる [3]．一様な星間ガスが重力収縮して星となる時，上式の log の項の違い，つまり温度や密度の非一様性等を無視して，オーダーの推定をすると，星のエントロピーは星を構成する総粒子数 N に比例している．重力収縮する過程をほぼ断熱変化とすれば，エントロピーは収縮過程で保存しており，星のエントロピーは，$S \sim N \sim M/m$ より

$$S/k_B \sim 10^{57}(M/M_\odot) \tag{2}$$

である．実際は収縮過程で密度や温度は変化するが，それは対数の因子の中の変化で，エントロピー変化に桁の大きさで影響するものではないという意味でほぼ断熱的という表現を用いた．またこの星が重力崩壊して Black Hole になるとして，その収縮過程もほぼ断熱的と考えると，Black Hole が形成される前の星のエントロピーは (2) 式で与えられる．

一方，星が重力崩壊して Black Hole になると，そのエントロピー S は Black Hole の表面積 A に比例すると導出されている [4]．簡単のために球対称の Schwarzschild 解を考え，その半径を $r_g = 2GM/c^2$

とすると，$A = 4\pi r_g^2$ より

$$S/k_B = A/(4l_p^2)$$

となる [5, 6]．ここで $l_p = \sqrt{G\hbar/c^3}$ はプランク長さである．回転している Kerr 解についてもエントロピーが面積に比例するという同様な関係が得られている [5]．

つまり Black Hole のエントロピーは

$$S/k_B = A/4 \sim 10^{77}(M/M_{\odot})^2 \tag{3}$$

であり，これは通常の星が重力崩壊して Black Hole になるとすると，エントロピーの急激な増加となる．質量が太陽程度とすると桁外れに，つまり約 10 の 20 乗も大きくなることになる． この増大の理由が必ずしも明らかでなく，特に Black Hole のエントロピーがその面積に比例するという問題が議論されている [7]．

この問題に関して，上のエントロピーの (1) 式は示量数であり，示量数は一般に粒子数に比例しており，相加的な量と考えられている．しかし，自己重力的な系のエントロピーとしては，この示量数的なエントロピーは適当ではない [3, 8]．

自己重力系の熱力学は，例えばエネルギーについていえば，重力エネルギーは

$$V = -\frac{GM^2}{R}$$

であり，質量の二乗に比例して，示量数的な状態量ではない．以下 2 節では自己重力系におけるエントロピーの問題を考え，3 節では Black Hole のエントロピーを，4 節では中性子星 のエントロピーを考察して行く．単位系は時として省略せずに示しているが，多くの場合，もしくは部分的に $G = \hbar = c = k_B = 1$ を用いている．

2　自己重力系のエントロピー

一般に重力のような外場が無く一様な理想気体の場合，熱力学的な状態量の間には

$$TS = U + pV - N\mu$$

の関係がある [1, 2]．一方，ランダウ-リフシッツの統計力学において，中性子星の平衡に関しその条件として

$$\mu + m\varphi = \text{一定}$$

が考察されている [2]．ここで m, μ, φ は各々粒子の質量，化学ポテンシャル，外場としての重力ポテンシャルである．つまり重力がある場合，

$$\mu \Longrightarrow \mu + m\varphi \tag{4}$$

と，重力場の効果が取り入れられている．大局的な自己重力場の考察より，球対称の重力ポテンシャルとして $\varphi = -GM/r$ を用いると，(4) 式はエントロピーに $\frac{1}{T}\frac{GM(Nm)}{r} = \frac{1}{T}\frac{GM^2}{r}$ の項が付け加わることを意味する (後の (10) 式参照)．また，ポテンシャルという性質上，どこを基準とするかにより変わってくるが，無限遠でゼロとし，かつ局所的でない大局的なエントロピーを対象とする．

自己重力系の考察は，Antonov (1962) そして Lynden-Bell と Wood (1968) において，Boltzmann-Gibbs 型のエントロピー

$$S = -\int k_B f \ln f d^6\tau \tag{5}$$

を最大にするという視点から，その安定性，不安定性が議論された [9, 10]．球対称で半径 r_e の中の等温度系という制限の中での議論ではあるが，彼等は重力ポテンシャルが，エントロピーに寄与している効果を考察した．Lynden-Bell と Wood（1968) はビリアル平衡の下で，系のエネルギーを E として

$$S/k_B = -N\log\left[\,n(k_BT)^{-3/2}\,\right] + \frac{1}{k_BT}\left(\frac{GM^2}{r_e} + 2E\right) - \frac{3}{2}N(1+\log m) \tag{6}$$

となる事を導いている．ここで n は系の外圧の粒子数密度を表している．また 粒子が識別できない場合は (6) 式に $N!$ の補正が必要で，重力のない場合その補正を考慮すると (1) 式と一致する．半径 r_e に断熱的な壁（外圧）があるという系ではあるが，(4) 式の場合と同じく，エントロピーに重力ポテンシャル (GM^2/r_e) の効果が表れている．

彼等は，この系で中心密度 ρ_c と半径 r_e の密度 ρ_e との比 ρ_c/ρ_e が 709 以上となると，不安定になるという結果を，エントロピーの 2 次の変分の符号を調べるという考察から得た．この不安定な事象は現在 Gravothermal Catastrophe として知られている [10, 11]．杉本等はこの現象を球状星団等，星の系において非摂動論的，並びに数値計算等をして詳しく解析し，かつ膨張する宇宙の中でのエントロピーの増大を構造形成や進化の問題と関連付けて議論している [11]．

以下では，エントロピーの考察において，自己重力系の効果を取り入れた（4）式，およびそれと同等な，(6) 式を採用する．両式ともにエントロピーに，大局的な球対称の重力ポテンシャルの項（$\frac{1}{k_BT}\left(\frac{GM^2}{r}\right)$）が表れるということが本質的に重要である．何故このような考察をするかというと，1 節でも述べたように，Black Hole のエントロピーをより深く，かつ良く知られている概念で理解するためである．

3　Black Hole のエントロピー

Black Hole について，その表面積が減少しないことから，熱力学でのエントロピーとの関連が類推され（Bekenstein [4]），その後，その蒸発に関係して温度などが推定されている [5]．その導出に関しては，不確定性関係を用いると，オーダーの推定ではあるが簡単に得られる [12]．

Black Hole は球対称で，質量を M，その重力半径を $r_g = 2GM/c^2$ とすると，この大きさに対応する質量ゼロの粒子のエネルギー ΔE は

$$\Delta E \simeq \Delta pc \simeq \frac{\hbar c}{2\Delta x} \simeq k_BT \tag{7}$$

と推定される．ここで $\Delta x\Delta p \simeq \hbar/2$, $\Delta E \simeq k_BT$ の関係を用いた．$\Delta x \simeq c_1 r_g$ とすると，温度 T は (7) 式より

$$T \simeq \frac{\hbar c}{2c_1 k_B(\frac{2GM}{c^2})} = \frac{\hbar c^3}{4c_1 GMk_B} \simeq \frac{m_{\rm pl}c^2}{4c_1k_B}\frac{m_{pl}}{M} \tag{8}$$

となる．ここで $m_{pl} = \sqrt{\hbar c/G}$ はプランク質量である．いま $c_1 = 2\pi$ とおくと

$$T \simeq \frac{\hbar c^3}{8\pi GMk_B} = T_{BH} \simeq 6.1\times 10^{-8}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1}\ \mathrm{K} \tag{9}$$

が得られ，Hawking の導いた温度と一致する [5]．

エントロピー S に対しては，$U = Mc^2$ とすると，(9) 式 の T より．

$$S = \int dS = \int \frac{dU}{T} = \int \frac{8\pi GMk_{\rm B}c^2 dM}{\hbar c^3} = \frac{4\pi GM^2k_{\rm B}}{\hbar c}$$

となる．これより，$S \propto M^2$ の関係が得られたが，これはあくまで Black Hole のエントロピーであり，星が崩壊する前の $S \propto M$ を，崩壊後の $S \propto M^2$ につなぐものでない．しかし 2 節で考察された (4) 式を用いて

$$S = \frac{1}{T}(U + pV - N\mu)$$

の計算を行うと，右辺の括弧の第 1 項や第 2 項は，$U \propto Nk_BT$, $PV \propto Nk_BT$ であり，$S \propto M$ であるが，第 3 項の重力の項は $\varphi \propto -\frac{GM}{R}$ であるから，この項のエントロピーへの寄与は，

$$S \simeq \frac{1}{T}(-Nm\varphi) \simeq \frac{1}{T}\frac{c_2GM^2}{R} \tag{10}$$

となる．ただし，ここで星の構造全体にわたる密度分布等の計算を行っていないことを考慮し，c_2 の因子を導入し $Nm\varphi \simeq -c_2NmGM/R \simeq -c_2GM^2/R$ とした．(8) 式の $T \simeq \hbar c/(2c_1k_BR)$, $R = 2GM/c^2$ を用いると

$$S \simeq \quad \frac{2c_1c_2GM^2k_B}{\hbar c}$$

の関係が得られる．星が重力崩壊し最終的に Black Hole の大きさに近づき，その系の温度が (8) 式の T に近づくとすると，巨大な Black Hole のエントロピーもそれほど無理なく理解可能と考えられる．

ただ，星が重力崩壊すると何故，その系の温度が (8) 式の T に近づくとなるかについては問題が残る．これについては，Black Hole の内部空間が広大で [3]，物質がそこで断熱膨張して温度が下がると考えてはどうかという議論がなされている [13].

4　中性子星のエントロピー

具体的に星の温度が低下する場合として中性子星を考える．中性子星の場合，宇宙背景放射等の影響を考えなければ，黒体放射等により冷却して原理的に温度が限りなくゼロに近づく．ここで考慮した自己重力の効果を考えなければ，エントロピーも限りなくゼロに近づく．そして，中性子星に何らかの質量の降着があり，その質量が臨界質量を超えれば，中性子星は重力崩壊して Black Hole になる [14]．これをエントロピーの視点からみると，最初ゼロに近い量が Black Hole が形成されると突然 $S \propto M^2$ となり，不連続的に急激に大きなエントロピーの出現となる．これも，ここで仮定したような自己重力の効果を導入すれば，エントロピーの変化も十分に連続的に理解可能となる．

中性子星が冷却する時，半径が R よりその温度の下限 T_{min} として (8) 式の導出と同様に

$$k_BT \geq k_BT_{min} \simeq \Delta pc \simeq \frac{\hbar c}{2\Delta x} \simeq \frac{\hbar c}{2c_3R} \tag{11}$$

を仮定する．ここで $\Delta x = c_3R$ とした．上式は不確定性関係から，有限な大きさ R を持つものは，その温度に下限がある事を示している．ある面では，大きな R の方が低い温度になる．これを，半径 R の中性子星のエントロピーの式に代入すると，オーダーの推定ではあるが

$$S \simeq \frac{c_2}{k_BT}\frac{GM^2k_B}{R} \leq \frac{c_2}{k_BT_{min}}\frac{GM^2k_B}{R} \simeq \frac{2c_2c_3GM^2k_B}{\hbar c} \simeq \frac{c_2c_3c^3r_g^2}{2\hbar G} \simeq \frac{c_2c_3A}{8\pi l_p^2} \tag{12}$$

が得られる．つまり，中性子星はまだ重力崩壊はしていないが，それが重力崩壊した後の Black Hole のエントロピーと同じオーダーのエントロピーを持っている事を示唆している．上式の不等号の右辺では中性子星の半径 R が露わに表れていない点が興味深い．

ここで，一様なフェルミ粒子についての低温で縮退したエントロピーは，μ に対してフェルミエネルギーを考慮しても非相対論的な場合や，相対論的な場合，共に

$$S = \frac{U + PV - \mu N}{T}$$

とすると，T $\to 0$ において 0 になる．又一部非縮退の効果を導入しても分子は T^2 の項が残り，T $\to 0$ において矢張り 0 になる [2]．これより，化学ポテンシャル μ の重力の効果の項のみを考慮した [2]．

このように，特に重力崩壊して事象の地平面が出来なくても，Black Hole の時と同じオーダーのエントロピーが得られることになる．またこの (12) 式の重力の項を見ると，温度が下がるにつれて，中性子星は特に収縮することもないとすれば，$T \to T_{min}$ においてエントロピーが増大するということになり，一見不思議な効果が表れる．これをどう解釈したらよいか不明である．

5 結論及び議論

自己重力系のエントロピーは，示量性の状態変数ではない．重力の効果を考慮するということは，化学ポテンシャルを

$$\mu \Rightarrow \mu + m\varphi$$

とすることに対応し，これより，自己重力の系のエントロピーの問題を考察した．ここで，ポテンシャルという性質上どこを基準とするかという問題や，局所的なエントロピーについてはどうかということが残るが，それは今後の検討課題とし，ここでは，大局的なエントロピーを主に考察した．

このようにエントロピーに大局的な重力の効果を導入することにより，Black Hole のエントロピーの急激な増大等の一見すると不可解な現象が，理解可能となる．その時，重力崩壊する系の温度が急激に下がる事については，明確な理解は得られてはいない．一つの考え方として，Black Hole の巨大な内部空間への自由膨張の効果ではないかという議論がある [13]．

温度が低い星として，縮退している中性子星の場合を考察した．化学ポテンシャルにこのような重力の効果を導入すると，まだ Black Hole へ崩壊していなくても，その限界まで温度が十分冷却したとすると，崩壊した時の地平面の面積に比例するエントロピーが導出された．

これより少なくともエントロピーは，星が重力崩壊して Black Hole になったとするなら，その Black Hole の表面積に比例するという関係式が得られたが．残念ながらその微視的なエントロピーの起源は不明である．特に統計力学的なエントロピーの定義である Boltzmann の関係式 $S = k_B \log W$ における微視状態数の総数 W が，Black Hole においては，もしくは冷却した中性子星においてどのような意味をもっているかについては，検討すべき課題である．

またエントロピーが通常の (5) 式で表した Boltzmann-Gibbs 型の

$$S = -\int k_B f \ln f d^6\tau$$

は現実の現象を巧く表現していないのではという探求より，Tsaillis 等が提案している Boltzmann-Gibbs 型以外のエントロピーの模索が続いている [15]．この自己重力系のエントロピーが，通常の Boltzmann-Gibbs のエントロピーの枠内で理解できるのか，また Tsallis によるエントロピーの概念の拡張によってより深く理解されるかどうかは興味深い [16]．

References

1. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, “Statistical Physics”, Reed Edu. and Pro. Pub. Ltd. Oxford (1980).
2. Ryogo Kubo, et al. “Statistical Mechanics: An Advanced Course With Problems And Solutions” (Elsevier : 1990)).
3. R. D. Sorkin, R. M. Wald, and Z. Z. Jiu, Gen. Rel. and Gra. 13 (1981) 1127.
4. J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D7 (1973) 2333.

5. S. W. Hawking, Phys. Rev. D13 (1976) 191.
6. V. F. Mukhanov and S. Winitzki, “Introduction to Quantum Effects in Gravity”, (2007, Cambridge Univ. Press).
7. T. Jacobson and R. Parentani, “Horizon Entropy”, Found. Phys. 33 (2003) 323-348.
R. M. Wald, “The Thermodynamics of Black Holes”, Living Rev. Rel. 4 (2001) 6.
C. Kiefer, “Quantum aspects of black holes”, arXive:astro-ph/0202032.
Don N. Page, “Hawking Radiation and Black Hole Thermodynamics”, hep-th/0409024.
Kip S. Thorne, R. H. Price, and D. A. Macdonald, “Black Holes: The Membrane Paradigm”, (1986, Yale University).
Ding-Xiong Wang, Phys. Rev. D 50 (1994) 7385.
8. Yu. V. Baryshev and A. A. Raikov, “On the entropy of self-gravitating systems”, Astrophysics, 29 (1989) 776.
9. V. A. Antonov, Vest. Lningrad Gros. Univ, 7 (1962) 135 (English trans. in IAU Symposium 113, Dynamics of Globular Clusters, ed. J. Goodman and P. Hut[Dordrecht: Reidel], pp. 525-540 [1985]).
10. D. Lynden-Bell and R. Wood, Mon. Not. R. Astr. Soc. 138 (1968) 495.
11. D. Sugimoto, Y. Eriguchi and I. Hachisu, Suppl. Prog. Theor. Phys. 70 (1981) 154.
I. Hachisu and D. Sugimoto, Prog. Theor. Phys. 60 (1978) 123.
I. Hachisu, Y. Nakada, K. Nomoto and D. Sugimoto, Prog. Theor. Phys. 60 (1978) 393.
12. F. Scardigli, Nuovo Cimento B 110 (1995) 1029 [arXiv: gr-qc/0206025].
13. K. Sakai, D. Kajiura and T. Hara, ACTA HUMANICA ET SCIENTIFICA UNIVERSITATIS SANGIO KYOTIENSIS, Natural Science Series 34, 126 (2005).
T.Hara, K. Sakai and D. Kajiura, arXive:gr-qc/0503105.
T.Hara, K. Sakai and D. Kajiura, arXive:gr-qc/0608067.
14. R. Kippenhahn and A. Weigert, “Stellar Structure and Evolution”, (1990, Springer-Verlag).
15. C. Tsallis, arXiv:cond-mat/1106.3781.
16. A. Taruya and M. Sakagami, Physica A307 (2002) 185-206.

On the Entropy of a Self-Gravitating System

Tetsuya HARA
Takanori WAGO
Yohei YUHI
Daigo KAJIURA

Abstract

The entropy S of a star is usually proportional to the mass M of the star before collapse as $S \propto M$. On the other hand, the entropy becomes to be proportional to the square of the mass as $S \propto M^2$ after the formation of the black hole. To understand the process in detail, we notice the additional term which includes the gravitational effects into the entropy. By taking this procedure, it is understandable that the entropy of the black hole becomes as $S \propto M^2$. For the neutron star which is cooled to the limit temperature, the entropy becomes proportional to the square of the mass which is the same order of the black hole.

Keywords: Entoropy, Self-Gravitating System, Chemical Potential, Black Hole, Neutron Star