〔研究論文〕

数学教員志望学生を対象とした数学授業力育成の一試行（そのⅠ）

二　澤　善　紀

要　　旨

初等・中等教育段階で、学校数学は様々な問題点を抱えている。中学校や高等学校の数学の教員を目指す大学生には、これらの問題点に対応できる授業力が要求される。数学の教員の場合、数学の基本概念はもちろんのこと、数学の有用性について理解しておく必要がある。さらに数学を理解する学習方法として、実験・工作などの活動をとりいれた学習体験を積んでおくことが重要である。新学習指導要領では、「言語力の育成・活用の重視」がなされ、「数学的活動」が一層重要視されているからである。これにより、学生の教員としての資質を向上させ、授業力を育成する。

本稿では、数学の教員志望の大学生を対象に、授業力を育成できるように数学の基本概念である「関数」と「定積分」について実験・工作などの活動を取り入れた教育内容を研究し、教育実践を行った。

その結果、関数や定積分の認識に大きな変化がみられ、活動を取り入れた教育内容の有効性が明らかとなった。

1. はじめに

初等・中等教育段階で、学校数学は様々な問題点を抱えている。これらの問題点はPISA調査やIEAの調査、全国学力・学習状況調査や教育課程実施状況調査結果などにも表れている。平成20年、21年に公示された学習指導要領では、これらの調査結果から課題とされたのは次の2つである。「数学で学ぶ内容に興味があると回答した生徒の割合が国際平均値より低く、数学の学習に対する不安を感じると回答した生徒の割合が国際平均値より高かった（PISA調査）。」「事柄や場面を数学的に解釈すること、数学的な見方や考え方を生かして問題を解決すること、自分の考えを数学的に表現することなどに課題がみられた（教育課程実施状況調査など）。」その結果、「言語力の育成・活用の重視」がなされ、「数学的活動」が一層重要視されることになった。また中学校の授業時数・教育内容が増え、高等学校では科目の再編成や新しい単元が追加されている。したがって、現場の教員には単に教科書の内容を指導するだけでなく、様々な能力や授業力の向上が要求される。このような状況の中、「教員免許更新制は、その時々で教員として必要な資質能力が保持されるよう、定期的に最新の知識技能を身に付けることで、教員が自信と誇りを持って教壇に立ち、社会の尊敬と信頼を得ることを目指すものです。」（文部科学省）とあり、教員免許更新制に代表されるように教

員の授業力の向上を図るための研修が、各地で実施されている。

一方、教員を目指す学生への教育はどうであろうか。これまで「ゆとり教育」の名のもとで、授業時数や教育内容が削減されてきた。これから教員を目指す学生は、削減された授業時間で削減された教育内容を受けてきている。残念ながら多くの大学では、従来通りの科目設定で単位数も大きな変化はない。したがって、講義方法・内容を工夫する必要がある。守屋（2008）は、学生の授業力を育成するために、「中等数学科教育を受講している学生 31 名に、小学校・中学校で実験などをしながら数学を勉強した経験があるかと問うと、経験者は 0 名であった。この授業の受講者は、将来、数学教育を専門とする先生になろうとしている学生である。その学生が、数学を座学としてしか学んできていない。2002 年 4 月から施行されている現行学習指導要領には、『算数的活動』、『数学的活動』という言葉が目標に付加されている。これら活動を何も経験していない学生が教員になり、児童・生徒に『活動』させることができるとは思えない。そこで、将来教員になる学生に数学的活動を経験してもらうために、…中略…『活動』を大いに取り入れた講義を試みてきた。」と数学の教員養成のための講義で、「活動」を取り入れた実践と成果を報告している。学生が座学だけで数学を理解するのではなく、活動を取り入れた学習方法を経験しながら数学を理解することが授業を組み立てていく際の基礎力（資質の向上）となり、授業力の育成につながる。したがって、数学の教員を志望する学生は、その有用性を含め、実験・観察などの活動を取り入れた学習方法を通して数学を学ぶ経験が必要である。理学部「数学科教育法 1・2、I–1・2」受講者に「中学校・高等学校で実験などをしながら数学を勉強した経験があるか」という調査を行うと、ほとんどの学生は高等学校では経験がない、と回答している。守屋（2008）は、おもに小学校の教員を想定した実践を行っている。そこで高等学校の教員を想定して、中学校・高等学校・大学という垣根を取り払った教育内容で、実験・工作などの「活動」を取り入れた実践を行った。

教育内容のテーマは、解析分野で「関数の概念」、「定積分の概念」である。この 2 つのテーマを選んだ理由は次の通りである。

関数は現代数学を支える重要概念で、中学校・高等学校で指導されるが、中学生や高校生にとって理解しにくい概念であるといわれている。したがって関数教育のあり方について、横地 (1983)、鈴木（1998）などの多くの先行研究がある。横地 (1983)、鈴木（1998）は中学生を対象として 1 変数関数だけでなく多変数関数を授業で扱うことの重要性を指摘している。しかし教員をめざす学生を対象とした資質向上を目的としたものではない。

積分は図形の面積を求めることに端を発する。その基礎はリーマン積分に見られるように区分求積法である。大田（2009）は、高等学校の現状を考えると、やむを得ない事情もあるとしながら、「そもそも定積分とは何であるかが説明されず、定積分の計算の仕方が天下りに与えられているだけである」と指摘している。これがどの程度影響を与えているのか明ら

かではないが、学生への認識調査でも定積分の概念が十分に理解できていないことが、明らかになっている。またこの教材は、小学校で学習する内容が高等学校・大学で学習する内容につながっている例である。

さらに関数（特に2変数関数）と積分は、立体の体積を求めるような教材を導入すると1つの教材として統合できる。

本稿では、理学部「数学科教育法1・2、I–1・2」で実践した教育内容とその結果、及びその有効性について検討する。

2. 認識調査の内容と結果

理学部で開講されている「数学科教育法1・2、I–1・2」受講生を対象に、これまでに学んだ数学の概念を十分に理解しているかどうか、「関数の概念」、「定積分の概念」について認識調査を行った。

2–1 日時・対象・内容

［I］関数の概念

(1) 対象：「数学科教育法1・2、I–1・2」受講者（2回生30数名）

(2) 日時：2009年4月（2010年も実施）

(3) 主な質問項目：

①関数とは何か、説明してください。

②我々の身の回りにある関数の例（関数の有用性、関数の応用例）を書いてください。

［II］定積分の概念

(1) 対象：「数学科教育法1・2、I–1・2」受講者（2回生40名）

(2) 日時：2010年4月

(3) 主な質問項目：

①定積分 $\int_a^b f(x)dx$ の定義（定積分の考え方がわかるように）をかいてください。

②記号 $\int$ や $f(x)dx$ の意味（何を表すか）を簡潔に説明してください。

2–2 認識調査の結果

［I］関数の概念

残念ながらほとんどの学生が答えることができなかった。また、関数を表す式が関数である、グラフが関数である、などと関数の概念を誤解した回答も見受けられた。しかし、彼らは2次関数、三角関数、指数関数、対数関数などの初等関数について、これらの数式の表現や基本的な性質の質問には答えることができる。だが「関数とは何か」と質問すると、答え

ることができない。また初等関数は具体的にどのような場面で使われるのか（どのような現象を表すことができるのか)、と有用性などについて質問しても十分に答えることができる学生はほとんどいなかった。

［II］定積分の概念

残念ながらほとんどの学生が正確に答えることができなかった。正確に答えることができた学生は 1 名である。

①については高等学校で学習した定積分の定義の印象が強く、35.0%（14 名/40 名）が $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ と答えた。また無回答が約 42.5%（17 名/40 名）であった。

②は、15.0%（6 名/40 名）が、$\int$ は積分の始まりで、dx はどの文字で積分するかを表す、などと答えている。無回答が 40.0%（16 名/40 名）あった。定積分の基本的な計算はできるが、その概念の理解は十分でない、という結果である。

3. 教育実践について

教育内容は、以下の通りである。

3–1 教育実践の教育内容について

まず関数をテーマにした。一般に、関数を苦手とする中学生・高校生は多いといわれている。中学校において関数を導入する際は、身近な事象を教材にして関数（1 変数）の概念を説明する。しかしその後は、関数のグラフをかく、あるいは関数式の変形が中学生・高校生の学習目標となってしまう傾向にある。その結果、学生の認識調査にみられるように、関数の定義（概念）を答えることができなかったり、関数を表す式が関数である、グラフが関数である、などという誤解につながっていくと考えられる。そこで、これらの問題点を是正するための活動を取り入れた授業を行った。

次に積分をテーマにした。積分は曲線で囲まれた図形の面積を求める方法として生まれた。リーマン積分がその基礎となっている。リーマン積分の考え方は、高等学校では区分求積法として学習する。また区分求積法の考え方は、小学校 5 年生で円の面積を学習する際に用いられている。小学校で学習する内容が高等学校・大学で学習する高度な内容につながっている教材といえる。日本の高等学校における積分教育は、微分の逆演算として積分を定義するという特徴がある。積分計算はできるが、その概念を十分に理解していない学生が多いということが、認識調査により明らかになっている。そこで関数同様これらの問題点を是正するため、活動を取り入れた授業を行った。

さらに立体の体積を求める際に、2 重積分を用いるような教材を導入すると、定積分の概念の理解が深まるだけでなく関数の分野で学習する 2 変数関数との関連性が強くなる。これにより、2 つの教育内容が 1 つに統合できる。

「関数の概念」、「定積分の概念」では厳密な理論展開は行わない。厳密な理論は理学部の専門科目の中で学ぶことができる。今回は高等学校の授業を想定して、教育実践を試みた。パーソナルコンピュータ（以下、PC と称す）を利用した実験や模型の作成（工作）などの活動を取り入れた。

教育実践の対象・日時・目的・内容は、次の通りである。

［I］関数の概念

（1）対象：「数学科教育法 1・2、I–1・2」受講者（2 回生 30 数名）

（2）日時：2009 年 4 月～5 月（90 分×2 回）（2010 年も実施）

（3）目的：①すでに知っている様々な公式の多くを多変数関数としてとらえる。
　　②我々の身の回りの事象の中に様々な多変数関数で表すことができるものがあり、その関数式から現実の事象を考察する。
　　③①、②を通して関数の概念を理解する。

（4）内容：1.　2 変数関数の例とその性質
　　2.　身近な事象と数学―音の伝播―
　　3.　曲面模型の作製

［II］定積分の概念

（1）対象：「数学科教育法 1・2、I–1・2」受講者（2 回生 40 名）

（2）日時：2010 年 4 月～5 月（90 分×3 回）

（3）目的：①定積分の概念（区分求積法、微分積分学の基本定理）を理解する。
　　②区分求積法の考え方の有用性を理解する。

（4）内容：1.　区分求積法
　　2.　微分積分学の基本定理
　　3.　平面図形の重心

3–2 教育実践の展開と実際について

実際の実践展開は、次の通りである。

3–2–1［I］関数の概念

I–1.　2 変数関数の例とその性質

まず事前の認識調査の結果を学生に示した。関数の概念を理解できていると思われる回答は、数名程度であった。次に中学校、高等学校、大学の各教育段階における関数の定義を示し、表現の違いは多少あるが、どの教育段階でも定義に大差がないことを学生は認識した（図 1）。

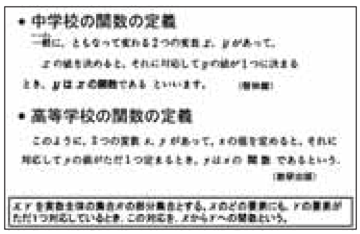


図 1.　関数の定義に関する講義資料

次に、これまで学んできた定理・公式の多くが多変数関数であることを学生に理解させたいと考えた。次の問題を提示した。

［問題］ $x+y=1$ のとき、関数 $z=xy$ の最大値を求めよ。

これは高等学校において、2 次関数の最大値の問題として学習する。ここでは問題の背景が 2 変数関数である、という観点で考察させた。さらに、関数 $z=xy$ は見方を変えると長方形の面積を表していることに気づかせた。長方形の面積を考える場合、条件 $x>0$、$y>0$ が必要であるが、ここでは問題を簡単にするために、あえてこの条件をはずした。これより上記で提示した問題は厳密性を欠くが、次のように置き換えられることを示した。

「周の長さが一定の長方形で、その面積が最大になるのはどのような長方形か。また面積の最大値を求めよ。」

すでに学習した 2 次関数の最大値の問題が、身近な事象についての問題を背景にもつことを学生に強調した。また高等学校で使用した問題集や参考書に掲載されている問題例も、身近な事象（問題）を背景にもつものがある、ことを説明した。このような観点は、教員にとっても教員を志望する学生にとっても重要なものである。

次に、2 変数関数 $z=xy$ の性質を解析するために、整数の組 (x, y) と z の関係をまとめた表、曲面の模型と 3D グラフを参考にして、学生は次の性質を学んだ（図 2）。

(a) グラフは連続で曲面である。

(b) 平面 $y=2$ で切断すると切り口は $z=2x$ である。2 変数関数は、1 つの変数を定数として考えると 1 変数関数となる。

(c) 平面 $y=x$ に関して面対称である。

(d) 平面 $y=x$ で切断すると切り口は放物線である。

前述の問題例は、「曲面 $z=xy$」と「平面 $x+y=1$、z は任意の値」の共通部分を対象に考えていることになり、それは放物線である。

高校生段階では 1 変数関数の最大値の問題に帰着したが、ここでは問題の背景が 2 変数関数であることを確認させた。

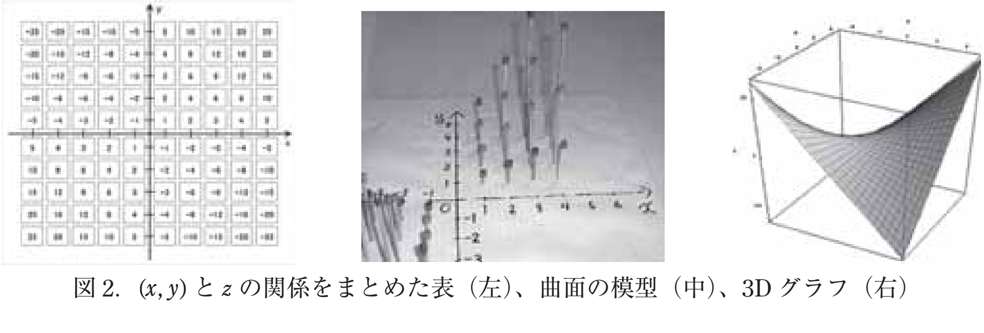


図 2. (x, y) と z の関係をまとめた表（左）、曲面の模型（中）、3D グラフ（右）

I-2. 身近な事象と数学―音の伝播―

次に、音は身近な事象であり、教材として最適であるので、音の伝播について考察させた。特に教材として優れている理由は、次の3つである。①三角関数を用いて表すことができるので、三角関数の有用性が理解できる。②PCを用いた実験が可能である。③多変数関数として考察することが可能である。

具体的な教育内容は、以下の通りである。

音を構成する最小単位を純音という。ここでは、学生とともに純音について考察した。

最初に、単振動は三角関数$y=\sin\theta$であることを示した。次に、スピーカーのコーンが振動して音を出す仕組みを説明し、音は空気の振動であることを理解させた。1秒間に振動する回数fを周波数（振動数）といい、単位はヘルツ（Hz）という。そうすると、$\theta=2\pi ft$が得られる。したがって、音の伝播は$y=A\sin 2\pi ft$と表すことができることを導いた。ただし、Aは振幅を表す。

次に音と関数式の関係を明確にするために、PCを用いて音をつくる実験を行った。周波数（振動数）f、振幅A、時間tの値を変化させ、それぞれの値が変化した場合の音の違いを考察した。この実験から、学生は次の性質を学んだ。

(a) 周波数が大きいと高い音、周波数が小さいと低い音になる。周波数が一定の値以下、または一定の値以上になると、人には音はきこえない。

(b) 振幅が大きいと強い音（大きい音）、振幅が小さいと弱い音（小さい音）になる。

(c) 時間の値を大きくすると、長い間、音が鳴り続ける。

また、音の伝播を表す数式を数学的に考察して、学生は次の性質を導いた。

(d) 音は時間、周波数、振幅について3変数関数である。

(e) 音は時間tについて、三角関数である。周波数fについて、三角関数である。振幅Aについて1次関数である。

(f) 時間、周波数または振幅のうち、1つを定数と考えると2変数関数である。

我々の身の回りの音は、複数の純音が組み合わされてできている。そこで学生は、2つ以上の純音を加えた式をつくる、または振幅や周波数を時間の関数ととらえて音の関数を作成した。

学生がつくった関数式でどのような音がでるのかPCで実験を行い確認させた。学生がつくった関数式の中には音が聞こえないものがあった。その際に学生がお互いにアイデアをだし関数式を改良して、音のでる関数を作り上げていった。

I-3. 曲面模型の作製

2変数関数の性質について理解を深めさせるために、音の伝播で考察した関数式をもとに、$z=\sin xy$または$z=x\sin y$の曲面模型を作成させた（図3、4）。PCを利用した3Dグラフの

提示も有効であるが、実際に工作することで2変数関数の性質がより理解できると考えた。

3-2-2［II］定積分概念

II-1. 区分求積法と微分積分学の基本定理

数学の教員志望の学生にとって、数学の概念の成り立ちを知ることも必要である。そこで、エジプト時代における川沿いの土地の面積の求め方を例にして、「図形の面積を求める」という問題を紹介した（図5）。

次に、区分求積法の考え方をPCのアニメーションを提示して行い（図6）、以下の問題を考察させた。

（1）直線　$y=x$、直線 $x=1$、x 軸で囲まれた図形（三角形）の面積を、区分求積法を用いて求めよ。⇔定積分の定義により、$\int_0^1 xdx$ を求めよ。

（2）放物線 $y=x^2$、直線 $x=1$、x 軸で囲まれた図形の面積を、区分求積法を用いて求めよ。⇔定積分の定義により、$\int_0^1 x^2dx$ を求めよ。

（3）放物線 $y=x^2$、直線 $x=2$、x 軸で囲まれた図形の面積を、区分求積法を用いて求めよ。⇔定積分の定義により、$\int_0^2 x^2dx$ を求めよ。

（4）定積分の定義により、$\int_0^t x^2dx$ を求めよ。

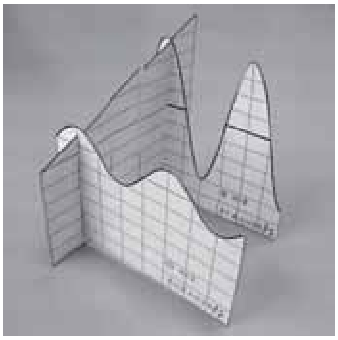


図3. 作成途中の曲面模型

図4. 完成した曲面模型

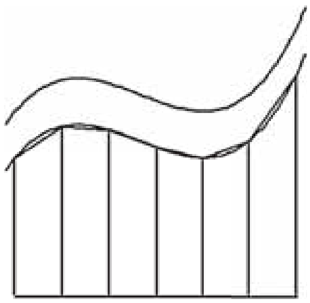


図5. ナイル川沿いの土地

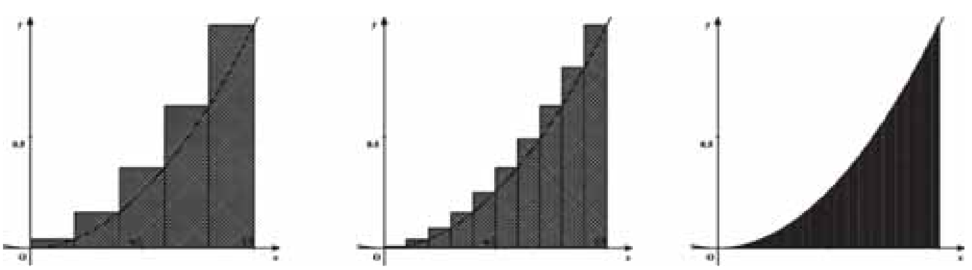


図6. 区分求積法の考え方を示すアニメーション画像

（5）（4）の結果を利用して、$\int_a^b x^2dx$ を求めよ。

（1）、（2）を解くことにより、学生に区分求積法の計算方法を示した。学生には原始関数を利用する計算方法と比較すると、区分求積法の計算は、煩雑になることを実感させた。

（3）では、$\int_0^2 x^2dx$ を求めさせた。積分区間が変化するごとに区分求積法で面積を求めることは効率が悪いので、これを一般化することを（4）で考えさせた。

（4）で学生に、$\int_0^t x^2dx=\dfrac{1}{3}t^3$ を求めさせた。これで関数 $f(x)=x^2$ に対して、面積関数 $S(t)=\dfrac{1}{3}t^3$ が対応することを学生に示唆した。このように公式化することで、煩雑な計算を繰り返す必要はなく公式の利便性を説明した。また関数 $f(x)=x^6$ や関数 $f(x)=\sin x$ に対する面積関数を求めることは困難で、区分求積法の計算の限界を学生に気づかせた。さらに、面積関数の求め方について、$S'(t)=t^2=f(t)$ であることから微分の逆演算で面積関数を求めることができることを示した。ニュートンやライプニッツはこの事実を発見し、微分積分学の創始者とも呼ばれていることを紹介した。そして微分積分学の基本定理 $\dfrac{d}{dt}\int_a^t f(x)dx=f(t)$ を提示した。この定理を利用することで、我々は多様な関数の定積分が可能になり、計算の負担が減ったことを説明した。

（5）では、$a=1$、$b=2$ とおき計算方法を学生に考察させ、微分積分学の基本公式 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ を導いた。

面積の意味についても、面積という言葉のイメージから、土地や図形の面積すなわち広さを連想する。しかし、積分を用いて得られる面積は、様々な分野で様々な意味をもつことを説明した。一例として「消費電力と月（時間）」との関係を示した（図 7）。またこのような例を調べる課題を示した。

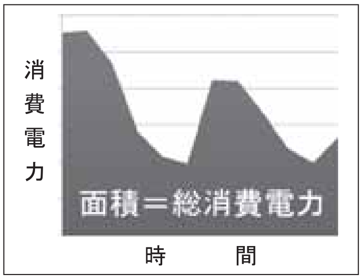
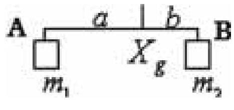


図 7.　面積の意味

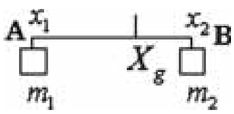
II-2.　図形の重心

区分求積法の考え方についてさらに理解を深めさせるため、以下のような問題を考察し平面図形の重心の座標を求める計算公式を導いた。

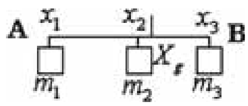
（1）右図のような軽い棒 AB の両端に重さが m_1、m_2 のおもりをつるす。点 X_g でこの棒を支えることができる。点 X_g と A、点 X_g と B の距離をそれぞれ a、b として a、b、m_1、m_2 の関係式を導け。



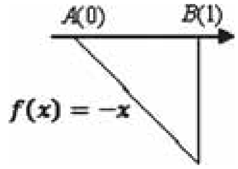
（2）右図のような軽い棒 AB の両端に重さが m_1、m_2 のおもりをつるす。A、B の x 座標はそれぞれ x_1、x_2 である。重心の座標 X_g を求めよ。



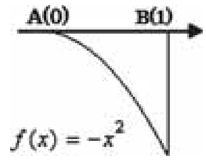
(3) 右図のような軽い棒 AB がある。重さが m_1、m_2、m_3 のおもりを x 座標が x_1、x_2、x_3 の場所でつるす。重心 G の座標 X_g を求めよ。



(4) 厚紙で直角 2 等辺三角形を切り取り（右図）、直角をはさむ 1 辺が水平になるように糸でつるしたい。どの点でつるせばよいか。※以下、厚紙は密度が一様で単位面積当たりの質量は 1 とする。



(5) 厚紙で右図のような図形を切り取り、辺 AB が水平になるように糸でつるしたい。どの点でつるせばよいか。



以上の問題を次のように指導した。

(1) では、モーメントという物理概念について説明した。

(2) では、図形の重心の座標 X_g を求めるための計算式を学生に導かせた。

(3) では、おもりの数が 3 個でも全く同様に重心の座標 X_g を求めることができることを説明した。

(4) では、おもりが連続的に並んでいると考えて、区分求積法の考え方を応用し、重心の座標 X_g を求めるための等式 $X_g \cdot \int_0^1 x dx = lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\left(\frac{k}{n}\ \frac{1}{n}\right)$ すなわち $X_g \cdot \int_0^1 x dx = \int_0^1 x \cdot x dx$ を導き、重心の座標 X_g を求めさせた。これを公式化して、学生に $X_g \cdot \int_a^b f(x)dx = \int_a^b xf(x)dx$ すなわち、$X_g = \dfrac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$ を示した。

(5) は (4) で導いた公式を利用して重心の座標 X_g を求めさせた。

特に (4) の説明では、黒板に図 8 を提示して学生に直感的に理解しやすいように努めた。このように実際の授業で活用できる工夫を随所に示した。

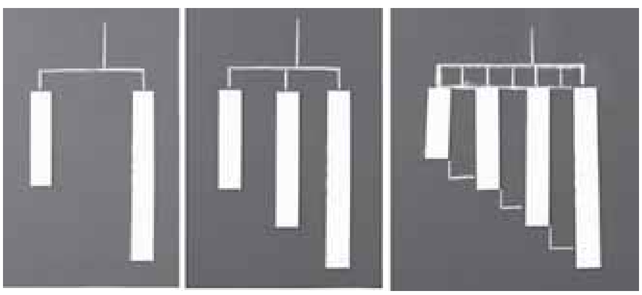


図 8. おもりの数を増やしていく様子

II-3. 模型の作製

最後に厚紙で図 9 のような模型を作成させた。そのために PC で関数表示ソフト GRAPES を利用させた。

手順は次の通りである。①GRAPES で、各自それぞれ自由に関数式を入力してグラフを表示させる。②区間を設定し、平面図形を描く。③平面図形の重心を計算し、平面図形に重心の点を GRAPES で表示させる。④平面図形を印刷し、厚紙に貼り付けてはさみで切り取る。⑤最後に糸を重心につけて、お互いにそれをつなぎ合わせていく。重心の位置が正解なら、直線部分は水平になるはずである。

実際に模型を作成することで、机上で求めた重心の公式が正しいことを実際に目で確かめることができ、数学的な内容の理解を深めることができると考えられる。

図 9. 糸で平面図形 の重心をつるす

4. 教育実践の評価

教育実践の評価は、次の通りである。

4-1 評価の観点

評価の観点は、次の通りである。

［I］関数の概念

［A］2 変数（多変数）関数の関数式の見方が理解できたか。

［B］すでに学習した数学や物理の中に、多変数関数の例が多くあることが理解できたか。音の伝播について、そのモデル化された関数式が理解できたか。

［C］2 変数関数のグラフ（曲面）について理解できたか。2 変数関数の関数式のとらえ方が理解できたか。

［D］関数の概念のイメージが変わったか。関数の概念が理解できたか。または関数の有用性が理解できたか。

［II］定積分の概念

［A］定積分の概念（区分求積法、微分積分学の基本定理）が理解できたか。

［B］区分求積法で基本的な図形の面積が求められるか。

［C］平面図形の重心を求めることで、区分求積法の考え方の有用性を理解できたか。

4-2 評価問題

評価問題は、次の通りである。

［I］関数の概念

［A-1］関数 $z=\pi x^2 y$ ……①について

（1）y を定数と考えると、x について何次関数となりますか。

（2）$x=1$ のとき、①の式とグラフをかいてください。

（3）x、y のうち、z の値に大きく影響を与える変数はどちらですか。

［A-2］2 変数関数の例をかいてください。

［B-1］単振動は三角関数で表すことができる、ということが理解できましたか（自己評価）。

［B-2］音（純音）は三角関数で表される、ということが理解できましたか（自己評価）。

［B-3］音（純音）は $y=A\sin 2\pi ft$ で表されます。f の値が変化すると、音はどのように変化しますか。

［B-4］音（純音）は、$y=A\sin 2\pi ft$ で表されます。A の値が変化すると、音はどのように変化しますか。

［B-5］あなたが作成した音で、最も印象に残った音の式をかいてください。

［C］曲面の模型を作成してください。

［D］関数について、理解が深まりましたか。その理由をかいてください。

［II］定積分の概念

［A-1］定積分の概念（考え方）にもとづき、$\int_0^1 f(x)dx$ の定義をかいてください。

［A-2］$\int_a^b f(x)dx$ で、$\int$ や $f(x)dx$ の意味を説明してください。

［A-3］微分積分学の基本定理は、何を示している定理ですか。

［B-1］$\int_0^1 3x^2dx$ を $\int_0^1 3x^2dx=\left[x^3\right]_0^1=1$ 以外の方法で求めてください。

［B-2］直線 $y=2x$、$x=1$、x 軸で囲まれた図形の面積を区分求積法（定積分を用いない方法）で求めてください。

［C］密度が一様な厚紙で作った図形の重心の x 座標 X_g は、等式 $X_g\cdot\int_a^b f(x)dx=\int_a^b xf(x)dx$ で求めることができる。左辺の $\int_a^b f(x)dx$ は、図形の重さ（ここでは、面積と重さが一致すると考えている）を表す。右辺の式を説明してください。

4-3 結果と考察

評価問題の結果と考察は、次の通りである。

［I］関数の概念

［A-1］について

（1）、（2）の正答率は 100％である。また（3）も約 94％の正答率である。2 つの変数をもつ 2 変数関数の場合、1 つの変数を固定して考えると 1 変数関数となり、関数のもつ性質が

考察しやすくなることについて、学生たちは理解できたと考えられる。

［A–2］について

事前の認識調査ではほとんど回答のなかった設問であるが、実践授業後は無回答の答案はほとんどなかった。様々な公式や定理を関数の例としてあげることができるようになっている。これまで学んだ公式や定理を関数としてとらえることができるようになった。また、課題として「多変数関数の例を提示し、関数式のもつ性質を高校生にわかるように解説せよ」を与えている。

【学生がかいた関数の例】

2 人の体重の平均$\frac{x+y}{2}$、弧の長さ$l=r\theta$、円柱の表面積$S=2\pi r^2+2\pi rh$、円錐の体積$z=\frac{1}{3}\pi x^2 y$、余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\theta$、オームの法則$E=IR$、ボイルシャルルの法則$PV=nRT$、位置エネルギー$E=mgh$、運動エネルギー$\frac{1}{2}mv^2$……etc

また関数の概念について理解を深められたことは、次の学生の感想からもわかる。

・2 変数関数は、1 つの変数を定数として考えるとわかりやすいことが理解できた。

・これまで学んできた様々な公式が多変数関数である、ということがわかった。

・関数について深く考えたことがなかったので、問題例を作ることで身近な例を示すとよいことがわかった。

［B–1］と［B–2］について

理解できたか、理解できなかったか、について自己評価させた。

［B–1］については、高等学校段階では数学と物理は隔離された状態で学ぶため、導入部分では「単振動は三角関数で表すことができる」ということを、PC でグラフを提示しながら説明した。約 90％以上の学生が理解できたと回答しているので、一定の効果がみられる。

［B–2］についても、約 90％以上の学生が理解できたと答えている。三角関数の有用性の一面が理解できたと判断できる。授業時間が許せば、フーリエ級数について学生たちに考察させたい。なぜなら、高等学校の数学 III「定積分」で学習する計算問題の中に、フーリエ級数を背景としてもつ問題があるからである。

［B–3］と［B–4］は、授業で PC を用いた実験の結果についての設問である。90％以上の学生が正確に答えることができている。理論展開だけでなく、教員志望の学生には実験などの数学的活動の体験が必要であると考える。このような学習体験は、中学校・高等学校の教員となった際に、生徒たちに興味・関心をもたせ、数学の魅力を理解させるための授業研究やその実践に役立つと考えられる。

［B–5］は、この授業のまとめとして、振幅・振動数に関数をあてはめて新たな関数式をつくらせ、どのような音が出るのか PC で実験をした。次の関数式は、学生が作成したものである。

【学生の作成した音の伝播を表す関数の例】

$y = \cos t \sin 2\pi 4000 t^2$、$y = \sin 2\pi \sum_{n=1}^{3} (t^n + 400t)$、$y = \log t \sin 2\pi \dfrac{2000}{t^2}$、

$y = 3^t \sin(2\pi 3000(\cos t + 2)t)$、……

学生の作成した関数例の中には、音が聞こえないものがあった。この場合、「どのように関数式を改善すればいいのか」ということについて学生はお互いにアイデアをだして、関数式を改善していった。これまでの数学の授業（特に高等学校）において、学生はお互いに議論を重ねて考察することはほとんど経験していないと推測されるので、貴重な学習体験（数学的活動）になったと考えられる。また「身近な事象を表す関数式から、その性質を分析して、再び事象にあてはめる」というプロセスの重要性は、次の学生の感想にもみられる。

・パソコンで音をつくることにより、音の伝播の数式がよく理解できた。
・自分で式をつくり、パソコンでその音を出すことができたので振幅や周波数の意味がよくわかった。
・振動数と振幅を変化させると、音の変化が実験で確かめられ驚いた。

［C］について

高等学校では、数学の課題として模型を作製するということはほとんどない。したがって、学生も数学を理解するために実験や模型の作製が有効な手段となることを知らないことが多い。この課題を提示した理由は、模型の作製が数学の内容を理解するために有効であることを体験させるためである。これは紙のパーツをひとつひとつ組み合わせて曲面模型を作製する。作製中に学生は曲面の形や2変数関数の性質を繰り返し考察したことが、次の学生の感想からみてとれる。その結果、学生は関数への理解を深めることができたと判断できる。

【模型作製後の学生の主な感想】

・パソコンで描いたグラフを見るよりも、まず自分でつくってみることでより身近に感じるようになりました。様々な関数が集まり少しずつ変化していくことで、曲面の立体的な図形になることがよくわかりました。
・模型を作成すると、パソコンではわからなかったところまでみることができ、3次元の曲面をイメージする力がついたと思う。
・幼稚な感想になりますが、時間を忘れ集中して取り組んだ。楽しんで取り組めました。授業では本物の模型をみることができずおおよその形しかわかりませんでしたが、自分で模型をつくったことにより、授業より2変数関数の図形（グラフ）の概形がわかり正確な形に近いものをはじめて実感できるようになりました。

［D］について

これまで学生は、特に大学入学前は与えられた問題を解くことだけに終始してきたことは容易に想像できる。その結果、計算はできるが関数の概念は十分に理解できていない、という状況を生み出した。授業後は、このような状況を自ら分析し、関数に対する考え方に変化

があったことを意識できるようになり、今回の教育実践の有効性が確認できた。このことは、学生が今回の授業のまとめとして書いた感想から読み取れる。

・高校生の頃は、ただ単に計算を覚えただけだったので、概念や教え方についていろいろ身についた。
・関数はふだん問題を解いているだけ、公式を使うだけだったが、いろんな視点からみると様々なところに関数は存在しており、見方が変わった。
・大半？すべてのもの？は関数であることがわかった。これまでは何も考えずに、ただ計算していた。
・数学の中だけでなく、身の回りに関数があることがわかった。
・関数は数学を勉強する上で最も大切な概念だと思っているので、理解を深めることができてよかった。
・今までは関数と聞くと $y=f(x)$ というイメージが強かったが、それ以上に身近な事象も関数として表せるものや他にもいろいろ面白みのある概念だとわかり、以前より理解が深まった。

［II］定積分の概念

［A−1］について

$lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x_k$ が存在する、ということが示されていれば正解とした。正答率は約 60%（22 名/37 名）である。事前認識調査で定積分の定義を答えることができたのは 1 名だけであった。また、$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ が定積分の定義であると答えた人数は、約 18.9%（7 名/37 名）である。定積分の定義の理解に教育実践の成果がみられる。

［A−2］について

$\int$ は和、$f(x)dx$ は矩形の面積である、などと答えることができれば正解とした。48.7%（18 名/37 名）が正解している。一方を答えることができれば一部正解とした。一部正解者は 29.7%（11 名/37 名）で、約 80% 弱（29 名/37 名）が正解と一部正解である。［A−1］と同様に実践の効果がみられる。［A−1］［A−2］の正答率から、定積分の概念の理解度が実践前より高くなったことがわかる。

［A−3］について

微分と積分は逆演算である、ということが示されていれば正解とした。残念ながら正答率は約 27.0%（10 名/36 名）と高くなかった。無回答は 29.7%（11 名/37 名）であった。その理由の 1 つは設問の仕方にある。定理の内容は覚えていても、それを微分積分学の基本定理と呼ぶことを忘れている学生が何人もいることが調査後に判明した。授業時間の関係で、授業中の扱いがやや簡潔になってしまったことも原因と考えられる。授業の緻密な時間配分が必要であることを痛感した結果となった。また、設問の内容についても再考する必要がある。ただ次の授業後の学生の感想から、一定の成果があったことがわかる。

・これまでは機械的に解いていただけだが、なぜ定積分で面積が求められるのかわかった。
・定積分の計算は面倒だと思っていたが、区分求積法の計算はもっと大変で限界があることがわかった。

［B-1］［B-2］について

正答率はそれぞれ 86.4%（32 名/37 名）、78.4%（29 名/37 名）と高かった。区分求積法の簡単な計算ができることから、区分求積法の考え方の理解度と定着度が高いことが判断できる。

［C］について

右辺は、各点におけるモーメントの和であることを説明できていれば正解とした。右辺の意味や導き方を示すことができていたのは約 37.8%（14 名/37 名）である。一部正解者は約 8.1%（3 名）であった。右辺の導き方を示すことができた学生の定積分の概念の理解度は高い、と考えられる。「モーメント」の概念を説明し、定積分を利用することの説明方法は、今後改善の余地がある。この例は物理が苦手な学生にとっては、区分求積法の考え方の有用性を十分に理解できなかったようである。

実践後に、模型を作成させた（図 10）。曲線を表す数式は、3 次関数や三角関数など各自で自由に設定させている。直線部分が水平になるように重心を求め、糸で模型をつるし、直線が水平になることで重心の位置が正しいことを確認させた。中学校や高等学校の数学の教員を目指す学生には、理論的に求めた結果が実験で成立することを確認するような学習体験は必要である。このことは、次の学生の感想からもわかる。

・実際に模型を作ってみることで、重心が視覚的にわかり、また実際に定積分で重心を求めることができるということを、身をもって感じることができて良かった（同様の感想多数）。

定積分の概念が正確に理解できていなかった学生に変化がみられるなど、実践内容の有効性が示された。


図 10.　学生の作成した模型

以上の結果から、次のことが示唆された。学生が関数の概念を理解するためには、1 変数関数だけにとらわれずに、基本的な 2 変数関数を教材にグラフやその性質を考察することが有効である。また定積分の概念については、区分求積法の計算から始めて、歴史に沿うような形でその考え方を考察することは有効である。

その結果、学生の関数や定積分に対する認識が大きく変化したことがわかる。理解が十分でなかった関数や定積分の概念について、理解が深まっている。座学だけでは、これだけの変化は期待できないのではないだろうか。身近な事象を教材として、PC を用いた実験や模型の作成（工作）などの活動を授業に取り入れた成果であると判断できる。さらに学生同士が数学的内容について、お互い議論するなどの数学的活動も有効に働いたと考えられる。数学を学習する方法として、身近な事象を数学化し、実験や模型の作成などの活動を取り入れた今回の実践は、教員を志望する学生にとって、これまでにない学習体験となった。新学習指導要領における「言語力の育成・活動の重視」や「数学的活動を一層重視する」の意味も一定理解できたと考えられる。これにより教員としての資質の向上が期待でき、授業力を身につけるための第一歩になったと考える。

また次のことも示唆された。学生は高等学校在籍時には、与えられた問題を繰り返し解くことに終始してきたと予想される。その結果、計算はできるが関数や定積分の概念を十分に理解しないままに大学に入学している。大学教育では計算ができることはもちろんのこと、概念（考え方）の理解を欠かすことはできない。今回の教育実践はこのような状況を改善する一つの方法であり、数学の高大接続教育の教育内容としても適切なものである、といえる。

5. まとめ

学生は今回の体験を通して、数学を座学だけで学ぶのではなく、身近な事象を数学化して実験・工作などの活動を取り入れることにより、教育的効果が期待できることを理解できたといえる。その結果、学生の資質が向上し、授業力の育成に一定の成果があったと考えられる。今回の実践だけで、すぐに学生の授業力の向上につながるとは考えにくい。今後も実践を継続する必要がある。また学生自身が、自ら今回のような学習方法を研究し、数学を学ぶ姿勢を身につけることができれば、最もよい。このような学生が 1 人でも多く増えるようなきっかけとなる授業（講義）を提供する必要がある。

また新学習指導要領において、高等学校・数学 I に「課題学習」をいう単元が新設されている。それは、「数学 I の内容又はそれらを相互に関連付けた内容を生活と関連付けたり発展させたりするなどして、生徒の関心や意欲を高める課題を設け、生徒の主体的な学習を促し、数学のよさを認識できるようにする。」とある。このような単元の指導は、生徒の実態に合わせた授業展開が必要で、状況に応じて自ら教材を作成する必要がある。今回の学習経験は、新しい教材を作り出す観点を身につける基礎にもなる。

さらに今回の教育内容と実践は、高等学校数学と大学数学のギャップを埋める数学の高大接続教育の内容としても有効であると考える。

今後の課題は次の 2 点である。(1) 今回の教育実践についての客観的な評価テストの開

発、(2) 教育実践の教育内容の充実、である。これらの課題について、今後研究を進めていきたい。

参考文献

[1] 横地清編（1983)、『数・代数・解析の体系化と実践』、ぎょうせい

[2] 鈴木正彦（1998)、『新版 21 世紀への学校数学の展望』、誠文堂新光社

[3] 守屋誠司（2008)、「算数・数学の授業力を持つ教員を育成する試み」、『京都教育大学教育実践研究紀要』 第 8 号、1-10

[4] 大田邦郎（2009)、「高等学校の積分指導におけるいくつかの問題」、『北海道大学大学院教育学研究院紀要』108、21-29

[5] 二澤善紀（2009)、「中等教育段階における 2 変数関数の導入を目指して―2 変数関数の性質から偏微分・重積分まで―」、数学教育学会『2009 年度数学教育学会秋季年会発表論文集』、167-169

[6] 二澤善紀（2010)、「中等教育段階における解析分野のカリキュラム開発の研究（その I）―区分求積法について―」、数学教育学会『2010 年度数学教育学会春季年会発表論文集』、59-61

[7] 田原真人（2008)、『微積で楽しく高校物理がわかる本』、秀和システム

[8] 文部科学省検定済教科書、『未来へ広がる　数学 123』、啓林館

[9] 文部科学省検定済教科書、『改訂版　数学 III』、数研出版株式会社

[10] 文部科学省（2009)、『高等学校学習指導要領　解説　数学編』、文部科学省