

最適所得課税について (2)

市田 浩三

目次

- はじめに
- I. モデルの定式化
- II. 方程式の解
- III. 計算結果と考察
- おわりに

はじめに

Mirrlees の先駆的な研究以後、線形および非線形モデルを扱った最適所得課税に関する多くの論文等が発表されてきた [1-12]. 文献 [12] では、Mirrlees [1] に従って最適所得課税の定式化を行い、Pontryagin の最大値原理 (maximum principle) を利用して数値シミュレーションを行った。ここでは Lagrange の未定乗数法を利用してこの問題を連立常微分方程式で表現した。その方程式体系について検討し、数値実験による結果について述べた。

I. モデルの定式化

Mirrlees による最適所得課税モデルはつぎのとおりである [1]. 個人 (家計) は同一の効用関数 $u(x, y)$ をもつ。 x は消費 ($x > 0$) で y は労働供給 ($0 \leq y < 1$) である。 u は $x > 0, 0 \leq y < 1$ において連続微分可能であり、一般に $\partial u / \partial x > 0, \partial u / \partial y < 0$ であると仮定される。個人の稼得能力を表すパラメータ n は $f(n)$ で表される連続な密度関数を持ち、区間 $n_0 \leq n \leq n_N$ において $f(n) \geq 0$ であるとする ($n_0 > 0, n_N < \infty$)。課税前所得 $z = ny$ に対する非線形所得税関数を $T(z) = T(ny)$ とすると

$$x = z - T(z) = ny - T(ny) \quad (1)$$

であり、個人は効用関数を最大にするように y を定めるので

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} u(ny - T(ny), y) = u_1(n - nT'(ny)) + u_2 = 0 \quad (2)$$

より

$$1 - T'(ny) = -\frac{u_2}{u_1 n} \quad (3)$$

となる。ここで、 u_1 と u_2 はそれぞれ u の x と y に関する偏微分を示し、 T' は T の z に関する微分を表す。(2)(3) を利用すると

$$\frac{du}{dn} = \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} = u_1(y - yT'(ny)) = u_1 y(1 - T'(ny)) = u_1 y \left(-\frac{u_2}{u_1 n}\right) = -\frac{yu_2}{n} \quad (4)$$

となる。個々の効用 u が社会的厚生に与える影響を社会的厚生関数 $G(u)$ で表すと、最適所得課税は積分

$$W = \int_{n_0}^{n_N} G(u) f(n) dn \quad (5)$$

を最大にする課税政策である。社会の総生産額に対する政府の税収が一定値 $1-r$ ($1>r>0$) であるとすると

$$1 - r = \frac{\int_{n_0}^{n_N} (z - x) f(n) dn}{\int_{n_0}^{n_N} z f(n) dn} = \frac{\int_{n_0}^{n_N} T(ny) f(n) dn}{\int_{n_0}^{n_N} ny f(n) dn} \quad (6)$$

と表され、これより

$$\int_{n_0}^{n_N} (x - rz) f(n) dn = \int_{n_0}^{n_N} (ny - rny - T(ny)) f(n) dn = 0 \quad (7)$$

となる。(4)(7) を制約条件として (5) を最大にするために、Lagrange 関数

$$L = \int_{n_0}^{n_N} [(G(u) + \theta(x - rz)) f(n) + \lambda \left(\frac{du}{dn} - g\right)] dn \quad (8)$$

を導入する。ただし

$$g = g(u, y) = -\frac{yu_2}{n} \quad (9)$$

である。(8) を部分積分すると

$$L = \int_{n_0}^{n_N} [(G(u) + \theta(x - rz)) f(n) - u \frac{d\lambda}{dn} - \lambda g] dn + \lambda(n_N) u(n_N) - \lambda(n_0) u(n_0) \quad (10)$$

となる。 L を u および y で微分して 0 とおくと

$$\left(\frac{\partial G}{\partial u} + \theta \frac{\partial x}{\partial u}\right) f(n) - \frac{d\lambda}{dn} - \lambda \frac{\partial g}{\partial u} = 0 \quad (11)$$

$$\left[\frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \theta \left(\frac{\partial x}{\partial y} - r \frac{\partial z}{\partial y}\right)\right] f(n) - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{d\lambda}{dn} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad (12)$$

が得られる。ここで x と g の微分については注意が必要である。仮定 $\partial u / \partial x > 0$ から $u(n)$ は $x(n)$ の

単調増加関数となっているので、 x は u および y の関数として表現できる。したがって

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{\partial u / \partial x} \quad (13)$$

となる。また (4) と (9) から

$$\frac{du}{dn} = \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad (14)$$

であるが、この両辺を x で偏微分した

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial n} = \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (15)$$

から

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial^2 u / \partial n \partial x}{\partial u / \partial x} \quad (16)$$

となる。また (2) から

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (17)$$

であるから、(13)(16)(17) を考慮すると

$$\left(\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{\theta}{\partial u / \partial x} \right) f(n) - \frac{d\lambda}{dn} - \lambda \frac{\partial^2 u / \partial n \partial x}{\partial u / \partial x} = 0 \quad (18)$$

$$\theta \left(\frac{\partial x}{\partial y} - r \frac{\partial z}{\partial y} \right) f(n) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad (19)$$

となる。 $u(x, y)$, $G(u)$, $f(n)$ としては次の関数形を仮定する [12]。なお $z=ny$, $x=ny-T(ny)$ である。

$$u(x, y) = \log x + \log(1 - y) \quad (20)$$

$$G(u) = -\frac{1}{\beta} e^{-\beta u} \quad (21)$$

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma n}} \exp\left[-\frac{(\log n - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (22)$$

(20)(21) を用いて (18)(19) の中の偏微分を計算する。

$$\frac{\partial G}{\partial u} = e^{-\beta u} \quad (23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x} = \frac{1}{ny - T} \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial n \partial x} = \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{ny - T} = -\frac{y(1-T')}{(ny - T)^2} \quad (25)$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = n - nT' \quad (26)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = n \quad (27)$$

また(9)と(20)より

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{yu_2}{n} \right) = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{1-y} \right) = \frac{1}{n} \frac{(1-y) - (-y)}{(1-y)^2} = \frac{1}{n(1-y)^2} \quad (28)$$

が得られる。これらの式を(18)(19)に代入すると

$$[e^{-\beta u} + \theta(ny - T)]f(n) - \frac{d\lambda}{dn} + \frac{\lambda y(1-T')}{ny - T} = 0 \quad (29)$$

$$\theta n(1-T' - r)f(n) - \lambda \frac{1}{n(1-y)^2} = 0 \quad (30)$$

となる。(17)(20)から

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{n - nT'}{ny - T} - \frac{1}{1-y} = 0 \quad (31)$$

したがって

$$1 - T' = \frac{ny - T}{n(1-y)} \quad (32)$$

となるので、これを利用すると(29)(30)は

$$\frac{d\lambda}{dn} = [e^{-\beta u} + \theta(ny - T)]f(n) + \frac{\lambda y}{n(1-y)} \quad (33)$$

$$\lambda = \theta n(1-y)[(ny - T) - rn(1-y)]f \quad (34)$$

となる。

II. 方程式の解

解くべき方程式は次の通りである。

$$\frac{du}{dn} = \frac{y}{n(1-y)} \quad (35)$$

$$\frac{d\lambda}{dn} = [e^{-\beta u} + \theta(ny - T)]f(n) + \frac{\lambda y}{n(1-y)} \quad (36)$$

$$\lambda = \theta n(1-y)[(ny-T) - rn(1-y)]f \quad (37)$$

$$u = \log(ny-T) + \log(1-y) \quad (38)$$

$$\int_{n_0}^{n_N} (ny - rny - T)f(n)dn = 0 \quad (39)$$

また (10) から境界条件 (横断性条件) は

$$\lambda(n_0) = \lambda(n_N) = 0 \quad (40)$$

である.

(35) ~ (38) は常微分方程式 2 つと関数方程式 2 つの連立方程式である. β と r はあらかじめ与える定数で, θ は未知のパラメータである. n は独立変数で, u, λ, y, T はすべて n の関数である. (35) ~ (38) は 4 変数の連立方程式であるが, (37)(38) から y と T を u と λ で表すことができれば, u と λ の連立常微分方程式になる. (38) から

$$ny - T = \frac{e^u}{1-y} \quad (41)$$

となるから, (41) を (37) に代入すると

$$\lambda = \theta n f e^u - \theta r n^2 f (1-y)^2 \quad (42)$$

から

$$1-y = \sqrt{\frac{\theta n f e^u - \lambda}{\theta r n^2 f}} \quad (43)$$

が得られる. (41)(43) を (35)(36) に代入すると

$$\frac{du}{dn} = \frac{1 - \sqrt{\frac{\theta n f e^u - \lambda}{\theta r n^2 f}}}{n \sqrt{\frac{\theta n f e^u - \lambda}{\theta r n^2 f}}} \quad (44)$$

$$\frac{d\lambda}{dn} = \left(e^{-\beta u} + \frac{\theta e^u}{\sqrt{\frac{\theta n f e^u - \lambda}{\theta r n^2 f}}} \right) f + \frac{1 - \sqrt{\frac{\theta n f e^u - \lambda}{\theta r n^2 f}}}{n \sqrt{\frac{\theta n f e^u - \lambda}{\theta r n^2 f}}} \lambda \quad (45)$$

となる. ただし, $0 \leq y < 1$ であるから (43) より

$$0 < \frac{\theta n f e^u - \lambda}{\theta r n^2 f} \leq 1 \quad (46)$$

である必要がある。

Ⅲ. 計算結果と考察

本稿で取り上げたモデルは、Mirrlees [1] の論文のモデルを Lagrange の未定乗数法を利用し連立常微分方程式として定式化したもので、必ずしも先行研究と対応しているわけではない。数値的に解があるかどうかを中心に調べた。動的最適化に関してはいくつかの文献を参考にした [13-16]。また、常微分方程式の数値解法には4次の Runge-Kutta 法を使用した。

数値実験におけるパラメータの値は Mirrlees [1] を参考にして定めた。個人の稼得能力 n の密度関数 $f(n)$ の式 (22) において、 $\mu=-1$, $\sigma=0.39$ とした。また $n_0=0.1$, $n_N=1.5$, $r=0.93$ とし、初期値は $y(n_0)=0$, $T(n_0)=-0.1$ とした。Mirrlees は小さな n に対して $y=0$ となることを示している [1]。 β については $\beta=0$, $\beta=1$, $\beta=\infty$ の3つの場合について調べた。

① $\beta=0$ のとき

$0 \leq y < 1$ したがって (46) が満たされるのは $-5.0260 \leq \theta \leq -5.0184$ のときである。 $\theta=-5.024$ における、 $n=0.1$ から $n=1.5$ までの n (0.1 刻み) に対する各変数 $1-y, y, z, T, x, u, \lambda$ の値を表1, 表2に示す。 $n \leq 1.2$ では、 n の増加とともに y は増加するが $n \geq 1.2$ から y は減少する。 z は n の増加とともに単調に増加する。 T, x, u, λ はすべて n の増加とともに単調に増加する。 T は $n < 1.2$ では負であるが、 $n \geq 1.2$ で正となる。(35) の右辺は正であるため、 $du/dn > 0$ であるから、 u が n の増加関数であることは明らかである。 λ は $n=0.1$ において近似的に0であって、 n の増加とともに最初増加しその後減少して、 $n=1.5$ において近似的に0なる。したがって境界条件 (横断性条件) である (40) を近似的に満たしている。

② $\beta=1$ のとき

$0 \leq y < 1$ したがって (46) が満たされるのは $-41.48 \leq \theta \leq -41.43$ のときである。 $\theta=-41.475$ における、 $n=0.1$ から $n=1.5$ までの n (0.1 刻み) に対する各変数 $1-y, y, z, T, x, u, \lambda$ の値を表3, 表4に示す。 y, z, T, x, u はすべて n の増加とともに単調に増加する。 λ は $n=0.1$ において近似的に0であって、 n の増加とともに最初増加しその後減少して、 $n=1.5$ において近似的に0なる。したがって境界条件 (横断性条件) である (40) を近似的に満たしている。

③ $\beta=\infty$ のとき

$0 \leq y < 1$ したがって (46) を満たす解は存在しなかった。 θ の値にかかわらず y は $0 \leq y < 1$ の範囲を超える結果となった。

表 1

$\beta = 0 \quad r = 0.93$				
n	f	$1-y$	y	z
0.1	0.03868	1	0	0
0.2	1.50856	0.81093	0.18907	0.03781
0.3	2.97390	0.71059	0.28941	0.08682
0.4	2.49909	0.65862	0.34139	0.13655
0.5	1.50124	0.62678	0.37322	0.18661
0.6	0.77637	0.60525	0.39475	0.23685
0.7	0.37487	0.58975	0.41025	0.28718
0.8	0.17585	0.57814	0.42187	0.33749
0.9	0.08183	0.56930	0.43070	0.38763
1.0	0.03821	0.56275	0.43726	0.43726
1.1	0.01802	0.55845	0.44155	0.48570
1.2	0.00861	0.55703	0.44297	0.53157
1.3	0.00418	0.55995	0.44005	0.57206
1.4	0.00206	0.57012	0.42988	0.60183
1.5	0.00103	0.59243	0.40757	0.61136

表 2

$\beta = 0 \quad r = 0.93$				
n	T	x	u	λ
0.1	-0.1	0.1	-2.30259	-0.00014
0.2	-0.09376	0.13158	-2.23774	0.02367
0.3	-0.08430	0.17113	-2.10701	0.08641
0.4	-0.07444	0.21099	-1.97355	0.11250
0.5	-0.06447	0.25108	-1.84913	0.09544
0.6	-0.05451	0.29136	-1.73532	0.06569
0.7	-0.04459	0.33177	-1.63138	0.04055
0.8	-0.03474	0.37223	-1.53618	0.02366
0.9	-0.02497	0.41260	-1.44863	0.01346
1.0	-0.01528	0.45254	-1.36781	0.00765
1.1	-0.00571	0.49141	-1.29306	0.00444
1.2	0.00367	0.52790	-1.22399	0.00271
1.3	0.01255	0.55951	-1.16059	0.00179
1.4	0.01992	0.58191	-1.10335	0.00132
1.5	0.02265	0.58871	-1.05334	0.00110

おわりに

本稿ではモデルの定式化とその方程式の解の存在する範囲に重点を置いて考察した。完全な解を求めたわけではない。今後検討すべき点はつぎのとおりである。

表 3

$\beta = 1 \quad r = 0.93$				
n	f	$1-y$	y	z
0.1	0.03868	1	0	0
0.2	1.50856	0.83422	0.16578	0.03316
0.3	2.97390	0.72696	0.27304	0.08191
0.4	2.49909	0.67007	0.32993	0.13197
0.5	1.50124	0.63456	0.36545	0.18272
0.6	0.77637	0.61023	0.38977	0.23386
0.7	0.37487	0.59253	0.40747	0.28523
0.8	0.17585	0.57909	0.42091	0.33673
0.9	0.08183	0.56853	0.43147	0.38833
1.0	0.03821	0.55100	0.44004	0.44004
1.1	0.01802	0.55275	0.44725	0.49197
1.2	0.00861	0.54638	0.45362	0.54435
1.3	0.00418	0.54025	0.45975	0.59767
1.4	0.00206	0.53357	0.46643	0.65300
1.5	0.00103	0.52501	0.47499	0.71248

表 4

$\beta = 1 \quad r = 0.93$				
n	T	x	u	λ
0.1	-0.1	0.1	-2.30259	-0.00112
0.2	-0.09304	0.12619	-2.25120	0.30243
0.3	-0.08092	0.16283	-2.13393	1.07573
0.4	-0.06822	0.20019	-2.00884	1.36331
0.5	-0.05547	0.23819	-1.88953	1.12367
0.6	-0.04284	0.27670	-1.77873	0.75220
0.7	-0.03043	0.31566	-1.67645	0.45194
0.8	-0.01825	0.35498	-1.58199	0.25633
0.9	-0.00632	0.39465	-1.49447	0.14103
1.0	0.00538	0.43466	-1.41308	0.07640
1.1	0.01687	0.47510	-1.33707	0.04106
1.2	0.02817	0.51617	-1.26575	0.02191
1.3	0.03932	0.55835	-1.19849	0.01154
1.4	0.05037	0.60264	-1.13461	0.00587
1.5	0.06131	0.65117	-1.07332	0.00274

- ① 本モデルについて、さらにパラメータの値をいろいろ変えて数値実験を行う。効用関数を $u = \alpha \log(1-y) + \log x$ または $u = (-1/x) - [1/(1-y)]$ とすれば異なった結果が得られる可能性もある。
- ② 最大値原理の最適解 (full optimum) を与える個人の効用関数および個人の稼得能力の密度関数はどんな形をしているか検討する。

- ③ 所得税以外の最適課税問題への応用を考える。
- ④ Bellman の動的計画法 (Dynamic Programming) を利用して解く。

参 考 文 献

- [1] Mirrlees, J. A. (1971) “An exploration in the theory of optimum income taxation”, *Review of Economic Studies*, vol. 31, pp. 175–208.
- [2] Stern, N. H. (1976) “On the specification of optimum income taxation”, *Journal of Public Economics*, vol. 6, pp. 123–162.
- [3] Tuomala, M. (1984) “On the optimal income taxation”, *Journal of Public Economics*, vol. 23, pp. 351–366.
- [4] Tuomala, M. (1990) *Optimal Income Tax and Redistribution*, Clarendon Press, Oxford.
- [5] Tarkiainen, R. and Tuomala, M. (1999) “Optimal nonlinear income taxation with a two-dimensional population”, *Computational Economics*, vol. 13, pp. 1–16.
- [6] Laramie, A. J. and Mair, D. (2000) *A Dynamic Theory of Taxation*, Edward Elgar, Cheltenham.
- [7] 入谷純 (1986) 『課税の最適理論』, 東洋経済新報社.
- [8] 山田雅俊 (1991) 『現代の租税理論——最適課税理論の展開——』, 創文社.
- [9] 小西砂千夫 (1997) 『日本の税制改革——最適課税論によるアプローチ——』, 有斐閣.
- [10] 大阪大学財政研究会 (1985) 『現代財政』第 6 章「最適課税論」, 創文社.
- [11] 田近栄治・古谷泉生 (2000) 「日本の所得税——現状と理論——」『フィナンシャル・レビュー』, 4 月号, pp. 129–161.
- [12] 市田浩三・浅井 勇 (2004) 「最適所得課税について」『京都産業大学論集』, 社会科学系列, 第 21 号, pp. 91–104.
- [13] ピェール N. V. チュー, 永田 良他訳 (1997) 『経済分析とダイナミカルシステム』, 文化書房博文社.
- [14] 板垣有記輔 (1985) 『動的最適化と経済理論』, 多賀出版.
- [15] 日向寺純雄監訳 (1996) 『課税の経済学』, 勁草書房.
- [16] Kamien, M. I. and Schwarz, N. L. (1996) *Dynamic Optimization — The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, North-Holland, Amsterdam.

On the Optimal Income Taxation (2)

Kozo ICHIDA

ABSTRACT

In the previous paper we have derived the nonlinear model of optimal income taxation along with Mirrlees and shown calculated results. This note uses Lagrange multiplier method to solve the optimal income taxation problem and the resulted system of ordinary differential equations are solved with the 4-th order Runge-Kutta method.