研究ノート

最適所得課税理論と日本の申告所得税

市　田　浩　三

目　　次

はじめに
Ⅰ．モデルの定式化
Ⅱ．連立常微分方程式
Ⅲ．申告所得金額階級別表との比較
おわりに

は　じ　め　に

Mirrleesの先駆的な研究以後，線形および非線形モデルを扱った最適所得課税に関する多くの論文等が発表されてきた[1]．これまでMirrleesに従って最適所得課税の定式化を行い，Pontriaginの最大値原理やLagrangeの未定乗数法を利用して数値シミュレーションを行ってきた[2]．ここではLagrangeの未定乗数法を利用して，この問題を連立常微分方程式で表現した結果を平成16年度の申告所得金額階級別表と比較してみた．

Ⅰ．モデルの定式化

Mirrleesによる最適所得課税モデルはつぎのとおりである[3]．個人（家計）は同一の効用関数$u(x, y)$をもつ．xは消費$(x>0)$でyは労働供給$(0\leq y<1)$である．uは$x>0, 0\leq y<1$において連続微分可能であり，一般に$\partial u/\partial x>0, \partial u/\partial y<0$であると仮定される．個人の稼得能力を表すパラメータnは$f(n)$で表される連続な密度関数を持ち，区間$n_0\leq n\leq n_N$において$f(n)\geq 0$であるとする$(n_0>0, n_N<\infty)$．課税前所得$z=ny$に対する非線形所得税関数を$t(z)=t(ny)$とすると

$$x = z - t(z) = ny - t(ny) \tag{1}$$

であり，個人は効用関数を最大にするようにyを定めるので

1） 参考文献を参照．
2） 市田浩三・浅井勇（2004）．
　　市田浩三（2005）．
3） Mirrlees（1971）．

$$\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}u(ny-t(ny),y)=u_1(n-nt'(ny))+u_2=0 \tag{2}$$

より

$$1-t'(ny)=-\frac{u_2}{u_1 n} \tag{3}$$

となる．ここで，u_1 と u_2 はそれぞれ u の x と y に関する偏微分を示し，t' は t の z に関する微分を表す．(2) (3) を利用すると

$$\frac{du}{dn}=\frac{\partial u}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial n}=u_1(y-yt'(ny))=u_1 y(1-t'(ny))=u_1 y(-\frac{u_2}{u_1 n})=-\frac{yu_2}{n} \tag{4}$$

となる．個々の効用 u が社会的厚生に与える影響を社会的厚生関数 $G(u)$ で表すと，最適所得課税は積分

$$W=\int_{n_0}^{n_N}G(u)f(n)dn \tag{5}$$

を最大にする課税政策である．社会の総生産額に対する政府の税収が一定値 $1-r$ $(1>r>0)$ であるとすると

$$1-r=\frac{\int_{n_0}^{n_N}(z-x)f(n)dn}{\int_{n_0}^{n_N}zf(n)dn}=\frac{\int_{n_0}^{n_N}t(ny)f(n)dn}{\int_{n_0}^{n_N}nyf(n)dn} \tag{6}$$

と表され，これより

$$\int_{n_0}^{n_N}(x-rz)f(n)dn=\int_{n_0}^{n_N}(ny-rny-t(ny))f(n)dn=0 \tag{7}$$

となる．(4) (7) を制約条件として (5) を最大にするために，Lagrange 関数

$$L=\int_{n_0}^{n_N}[(G(u)+\theta(x-rz))f(n)+\lambda(\frac{du}{dn}-g)]dn \tag{8}$$

を導入する．ただし

$$g=g(u,y)=-\frac{yu_2}{n} \tag{9}$$

である．(8) を部分積分すると

$$L=\int_{n_0}^{n_N}[(G(u)+\theta(x-rz))f(n)-u\frac{d\lambda}{dn}-\lambda g]dn+\lambda(n_N)u(n_N)-\lambda(n_0)u(n_0) \tag{10}$$

となる．L を u および y で微分して 0 とおくと

$$(\frac{\partial G}{\partial u}+\theta\frac{\partial x}{\partial u})f(n)-\frac{d\lambda}{dn}-\lambda\frac{\partial g}{\partial u}=0 \tag{11}$$

$$[\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\theta(\frac{\partial x}{\partial y}-r\frac{\partial z}{\partial y})]f(n)-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{d\lambda}{dn}-\lambda\frac{\partial g}{\partial y}=0 \tag{12}$$

が得られる．

$u(x, y)$, $G(u)$, $f(n)$ としては次の関数形を仮定する[4]．なお $z=ny$, $x=ny-t(ny)$ である．

$$u(x,y)=\log x+\log(1-y) \tag{13}$$

$$G(u)=-\frac{1}{\beta}e^{-\beta u} \tag{14}$$

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma n}\exp[-\frac{(\log n-\mu)^2}{2\sigma^2}] \tag{15}$$

(13) (14) を用いて (11) (12) の中の偏微分を計算すると

$$\frac{d\lambda}{dn}=[e^{-\beta u}+\theta(ny-t)]f(n)+\frac{\lambda y}{n(1-y)} \tag{16}$$

$$\lambda=\theta n(1-y)[(ny-t)-rn(1-y)]f \tag{17}$$

となる．

Ⅱ．連立常微分方程式

解くべき方程式は次の通りである．

$$\frac{du}{dn}=\frac{y}{n(1-y)} \tag{18}$$

$$\frac{d\lambda}{dn}=[e^{-\beta u}+\theta(ny-t)]f(n)+\frac{\lambda y}{n(1-y)} \tag{19}$$

$$\lambda=\theta n(1-y)[(ny-t)-rn(1-y)]f \tag{20}$$

$$u=\log(ny-t)+\log(1-y) \tag{21}$$

$$\int_{n_0}^{n_N}(ny-rny-t)f(n)dn=0 \tag{22}$$

---

4) Mirrlees (1971) では (13) を $u(x,y)=\alpha\log x+\log(1-y)$，(15) を $f(n)=\frac{1}{n}\exp[-\frac{(\log n+1)^2}{2}]$ としている．

(18)～(21)は常微分方程式2つと関数方程式2つの連立方程式である．β と r はあらかじめ与える定数で，θ は未知のパラメータである．n は独立変数で，u, λ, y, t はすべて n の関数である．(18)～(21)は4変数の連立方程式であるが，(20)(21)から y と t を u と λ で表すことができれば，u と λ の連立常微分方程式になる．(21)から

$$ny - t = \frac{e^u}{1-y} \tag{23}$$

となるから，(23)を(20)に代入すると

$$\lambda = \theta nfe^u - \theta rn^2 f(1-y)^2 \tag{24}$$

から

$$1 - y = \sqrt{\frac{\theta nfe^u - \lambda}{\theta rn^2 f}} \tag{25}$$

が得られる．(23)(25)を(18)(19)に代入すると

$$\frac{du}{dn} = \frac{1 - \sqrt{\dfrac{\theta nfe^u - \lambda}{\theta rn^2 f}}}{n\sqrt{\dfrac{\theta nfe^u - \lambda}{\theta rn^2 f}}} \tag{26}$$

$$\frac{d\lambda}{dn} = \left(e^{-\beta u} + \frac{\theta e^u}{\sqrt{\dfrac{\theta nfe^u - \lambda}{\theta rn^2 f}}}\right) f + \frac{1 - \sqrt{\dfrac{\theta nfe^u - \lambda}{\theta rn^2 f}}}{n\sqrt{\dfrac{\theta nfe^u - \lambda}{\theta rn^2 f}}}\lambda \tag{27}$$

となる．ただし，$0 \leq y < 1$ であるから(25)より

$$0 < \frac{\theta nfe^u - \lambda}{\theta rn^2 f} \leq 1 \tag{28}$$

である必要がある．

Ⅲ．申告所得金額階級別表との比較

本稿で取り上げたモデルによる解はMirrleesの論文のモデルをLagrangeの未定乗数法を利用し連立常微分方程式として定式化したもので，必ずしも先行研究と対応しているわけではない．本モデルの計算結果を国税庁のサイトから得られた平成16年度の申告所得金額階級別表（平成16年度分の申告所得税の納税者について申告所得金額区分とその納税者数が記載された表）の結果と比較

表 1　申告所得金額階級別表

（単位：人）

区　分	合計所得				譲渡所得を有する者	短期譲渡所得を有する者	山林所得を有する者
	営業等	農　業	その他	計			
70 万円以下	69,205	1,689	84,371	155,265	30,102	7,215	1,233
100 万円以下	109,128	3,158	128,636	240,922	11,544	1,300	267
150 万円以下	231,885	11,576	504,458	747,919	16,187	1,386	365
200 万円以下	256,045	16,620	861,098	1,133,763	15,182	993	264
250 万円以下	243,021	16,711	652,119	911,851	12,352	658	170
300 万円以下	204,497	15,809	447,782	668,088	11,881	497	108
400 万円以下	278,343	25,134	610,768	914,245	18,842	768	146
500 万円以下	150,337	16,999	418,141	585,477	15,991	501	82
600 万円以下	81,098	10,722	321,517	413,337	12,931	390	60
700 万円以下	45,572	6,749	260,516	312,837	11,062	417	39
800 万円以下	27,362	4,297	204,981	236,640	9,746	214	29
1,000 万円以下	30,958	4,635	279,380	314,973	17,084	321	30
1,200 万円以下	16,353	2,168	176,115	194,636	12,375	233	16
1,500 万円以下	16,513	1,354	169,573	187,440	14,485	251	13
2,000 万円以下	17,867	588	150,916	169,371	16,194	233	11
3,000 万円以下	16,019	199	113,632	129,850	17,136	251	5
5,000 万円以下	11,574	46	66,677	78,297	12,930	220	7
5,000 万円超	6,728	20	39,134	45,882	10,784	256	3
合　計	1,812,505	138,474	5,489,814	7,440,793	266,808	16,104	2,848

することを試みた．平成 16 年度の申告所得金額階級別表は表 1 のとおりである．この表のままでは計算結果と比較し難いので，表 1 から申告所得税（表 2）を作成した．表 2 における合計所得は表 1 の区分をまとめたものである．表 2 の平均は各区分の合計金額の中間値をとったもので，たとえば合計所得 200 万円の平均値は（100+200)/2=150 とした値である．なお，合計所得 5,000 万円超の家計は平均金額が不明なので除外した．所得控除は家計によって異なるが，ここでは一律 200 万円とした．所得税は表 3 の平成 16 年度の税額表を用いて計算したものである．そして控除後の金額×人数と税収（所得税×人数）を計算した．なお，控除後の金額が負であるときの税収は 0 とした．

表 2 を常微分方程式の解と対応づける表にするために，平均所得×人数，税収および税収／(平均所得×人数)（表で T と表している）を計算した．税収の合計を（平均所得×人数）の合計で割ると約 11.7% となる．これが(6)の $1-r$ に対応すると考えられるので $1-r=0.117$ から $r=0.883$ とした．表 4 の左端の列は常微分方程式の解との対応のためにつけたものである．常微分方程式(26)(27)の数値解法には 4 次の Runge-Kutta 法を使用した．数値実験におけるパラメータの値は以下のように定めた．個人の稼得能力 n の密度関数 $f(n)$ の式(15)において，$\mu=-1, \sigma=1$ とした．また $n_0=0.1$, $n_N=1.5, \beta=0, y(n_0)=0$ とした．Mirrlees は小さな n に対して $y=0$ となることを示している．n は表

表 2 申告所得税

合計所得（万円）	平 均（万円）	控 除 後（万円）	所 得 税（万円）	人 数（万人）	控除後×人数（億円）	税 収（億円）
0	0	–200	0	0	0	
100 以下	50	–150	0	39.6187	–5942.805	0
200 以下	150	–50	0	188.1682	–9408.41	0
300 以下	250	50	5	157.9939	7899.695	789.9695
400 以下	350	150	15	91.4245	13713.675	1371.3675
500 以下	450	250	25	58.5477	14636.925	1463.6925
600 以下	550	350	37	41.3337	14466.795	1529.3469
700 以下	650	450	57	31.2837	14077.665	1783.1709
800 以下	750	550	77	23.664	13015.2	1822.128
1000 以下	900	700	107	31.4973	22048.11	3370.2111
1200 以下	1100	900	147	19.4636	17517.24	2861.1492
1500 以下	1350	1150	222	18.744	21555.6	4161.168
2000 以下	1750	1550	342	16.9371	26252.505	5792.4882
3000 以下	2500	2300	602	12.985	29865.5	7816.97
5000 以下	4000	3800	1157	7.8297	29752.86	9058.9629
計	14800			739.4911		41820.6247

表 3 所得税の税額表（平成 16 年度）

課税される所得金額	税 率	控除額
1,000 円から 3,299,000 円まで	10%	0 円
3,300,000 円から 8,999,000 円まで	20%	330,000 円
9,000,000 円から 17,999,000 円まで	30%	1,230,000 円
18,000,000 円以上	37%	2,490,000 円

2 の合計所得の区分の数 15 に合わせて 0.1 ～ 1.5 とした．表 4 に常微分方程式の解を示す．表 2 の税収の合計が $1–r$ になるように規格化し，表 4 の T と t の差の自乗和が最小になるようにパラメータ θ と $t(n_0)$ を定めた．

T と t のグラフを図 1 に示す．両端では常微分方程式の解の方が値が小さいがそれ以外の点では解の方が値が大きい．

つぎに，労働供給について常微分方程式の解 y と実績値 Y を比較するが，この場合も Y の各値を一定値 YY で割った値と y の差の自乗和が最小になるように YY を定め，Y/YY と y をグラフで比較した（グラフでは Y/YY を Y としている）．グラフの右端では y と Y の差が急速に広がっている．

表 4　税収 /（平均所得×人数）の計算

n	平均所得	所 得 税	人　数	平均所得人数	税　収	T
0.1	0	0		0	0	0
0.2	50	0	39.6187	1980.935	0	0
0.3	150	0	188.1682	28225.23	0	0
0.4	250	5	157.9939	39498.475	789.9695	0.02
0.5	350	15	91.4245	31998.575	1371.3675	0.042857143
0.6	450	25	58.5477	26346.465	1463.6925	0.055555556
0.7	550	37	41.3337	22733.535	1529.3469	0.067272727
0.8	650	57	31.2837	20334.405	1783.1709	0.087692308
0.9	750	77	23.664	17748	1822.128	0.102666667
1.0	900	107	31.4973	28347.57	3370.2111	0.118888889
1.1	1100	147	19.4636	21409.96	2861.1492	0.133636364
1.2	1350	222	18.744	25304.4	4161.168	0.164444444
1.3	1750	342	16.9371	29639.925	5792.4882	0.195428571
1.4	2500	602	12.985	32462.5	7816.97	0.2408
1.5	4000	1157	7.8297	31318.8	9058.9629	0.28925
計	14800		739.4911	357348.775	41820.625	0.117030273

T= 税収 /（平均所得×人数）

表 5　常微分方程式の解

n	u	y	ny	t	x
0.1	–2.99974	0	0	–0.0498	0.0498
0.2	–3.0131	0.008212	0.001642	–0.0479	0.049546
0.3	–2.9931	0.084959	0.025488	–0.0293	0.054786
0.4	–2.95715	0.135605	0.054242	–0.00588	0.060119
0.5	–2.91684	0.169264	0.084632	0.019504	0.065128
0.6	–2.8765	0.192193	0.115316	0.045582	0.069734
0.7	–2.83787	0.207942	0.145559	0.071638	0.073921
0.8	–2.80162	0.218613	0.17489	0.097193	0.077697
0.9	–2.76796	0.225528	0.202975	0.1219	0.081075
1.0	–2.73689	0.229559	0.229559	0.145489	0.084071
1.1	–2.70832	0.23131	0.254441	0.167737	0.086704
1.2	–2.68213	0.23121	0.277452	0.188458	0.088994
1.3	–2.65815	0.229576	0.298448	0.207488	0.09096
1.4	–2.63623	0.226647	0.317306	0.224683	0.092623
1.5	–2.61623	0.222609	0.333913	0.23991	0.094004

表 6　労働供給

n	平均所得	nY	Y	Y/YY	y
0.1	0	0	0	0	0
0.2	50	0.0125	0.0625	0.0359195	0.0082122
0.3	150	0.0375	0.125	0.0718391	0.0849592
0.4	250	0.0625	0.15625	0.0897989	0.1356053
0.5	350	0.0875	0.175	0.1005747	0.1692639
0.6	450	0.1125	0.1875	0.1077586	0.1921932
0.7	550	0.1375	0.1964286	0.11289	0.2079417
0.8	650	0.1625	0.203125	0.1167385	0.2186129
0.9	750	0.1875	0.2083333	0.1197318	0.2255278
1.0	900	0.225	0.225	0.1293103	0.2295595
1.1	1100	0.275	0.25	0.1436782	0.2313101
1.2	1350	0.3375	0.28125	0.1616379	0.2312098
1.3	1750	0.4375	0.3365385	0.1934129	0.2295757
1.4	2500	0.625	0.4464286	0.2565681	0.2266472
1.5	4000	1.0	0.6666667	0.3831418	0.222609

$YY=1.74$

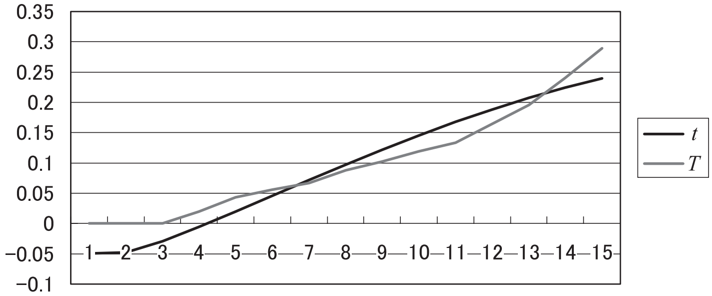

図 1　税収の比較

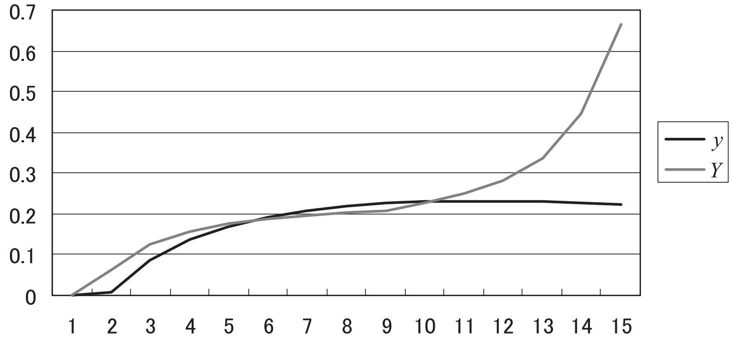

図 2　労働供給の比較

お わ り に

Mirrlees の論文のモデルを Lagrange の未定乗数法を利用し連立常微分方程式として定式化したものの計算結果を国税庁のサイトから得られた平成 16 年度の申告所得金額階級別表の結果と比較してみた．所得税額に関してはそれほど差が認められないが，労働供給に関しては能力のある個人の労働供給に大きな差が見受けられた．これは n よりも速く階級別表の所得が大きくなっているためで，区分に問題があるかもしれない．階級別表のデータは離散的な数値なので，常微分方程式でなく最初から離散的なモデルと比較した方がよいように思われる．

参 考 文 献

Mirrlees, J. A. (1971) "An exploration in the theory of optimum income taxation", *Review of Economic Studies,* vol. 31, pp. 175–208.

Mirrlees, J. A. (1976) "Optimal tax thory: A synthesis", *Journal of Public Economics*, vol. 6, pp. 327–358.

Mirrlees, J. A. (1986) "The theory of optimal taxation", in K. J. Arrow and M. D. Intrilligator (eds.), *Handbook of Mathematical Economics*, III (Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V.).

Stern, N. H. (1976) "On the specification of optimum income taxation", *Journal of Public Economics,* vol. 6, pp. 123–162.

Tuomala, M. (1984) "On the optimal income taxation", *Journal of Public Economics,* vol. 23, pp. 351–366.

Tuomala, M. (1990) *Optimal Income Tax and Redistribution,* Clarendon Press, Oxford.

Tarkiainen, R. and Tuomala, M. (1999) "Optimal nonlinear income taxation with a two-dimensional population", *Computational Economics,* vol. 13, pp. 1–16.

Laramie, A. J. and Mair, D. (2000) *A Dynamic Theory of Taxation,* Edward Elgar, Cheltenham.

入谷　純（1986）『課税の最適理論』，東洋経済新報社．

山田雅俊（1991）『現代の租税理論――最適課税理論の展開――』，創文社．

小西砂千夫（1997）『日本の税制改革――最適課税論によるアプローチ――』，有斐閣．

大阪大学財政研究会（1985）『現代財政』第 6 章「最適課税論」，創文社．

田近栄治・古谷泉生（2000）「日本の所得税――現状と理論――」『フィナンシャル・レビュー』，4 月号，pp. 129–161.

市田浩三・浅井　勇（2004）「最適所得課税について」『京都産業大学論集』，社会科学系列，第 21 号，pp. 91–104.

市田浩三（2005）「最適所得課税について（2）」『京都マネジメント・レビュー』，第 8 号，pp. 175–183.

Optimal Income Tax Theory and Individual Income Tax in Japan

Kozo ICHIDA

Abstract

In the previous papers we have derived the nonlinear model of optimal income taxation along with Mirrlees and shown calculated results. This note compared the results of optimal income tax theory with the individual income taxes in Japan in 2004.