最適所得課税について
——所得税が所得のベキ乗に比例する場合の労働供給——

市　田　浩　三
中　橋　　　創

目　　次

は　じ　め　に

Mirrlees の先駆的な研究以後，線形および非線形モデルを扱った最適所得課税に関する多くの論文等が発表されてきた［1–13］．これまで Mirrlees に従って最適所得課税の定式化を行い，Pontriagin の最大値原理や Lagrange の未定乗数法を利用して数値シミュレーションを行ってきた［14–16］．Mirrlees のモデルにおける問題点の１つは，能力が小さい個人の所得税が負になることである．ここでは，その問題が生じないようにモデルを変更し，所得税が所得の s 乗 $(1\leq s\leq 2)$ で与えられたときのシミュレーションを行い，労働供給がどのように変化するか考察した．

Ⅰ．モデルの定式化

Mirrlees による最適所得課税モデルはつぎのとおりである［1］．個人（家計）は同一の効用関数 $u(x,y)$ をもつ．x は消費（$x>0$）で y は労働供給（$0\leq y<1$）である．貯蓄は考えない．u は $x>0$，$0\leq y<1$ において連続微分可能であり，一般に $\partial u/\partial x>0$，$\partial u/\partial y<0$ であると仮定される．個人の稼得能力を表すパラメータ n は $f(n)$ で表される連続な密度関数を持ち，区間 $n_0\leq n\leq n_N$ において $f(n)\geq 0$ であるとする（$n_0>0, n_N<\infty$）．u としては，通常

$$u(x,y)=\log x+\log(1-y) \tag{1}$$

または

$$u(x,y)=(-1/x)-1/(1-y) \tag{2}$$

が用いられる．課税前所得 $z=ny$ に対する非線形所得税関数を $T(z)=T(ny)$ とすると

$$x=z-T(z)=ny-T(ny) \tag{3}$$

となるが，(3) では所得 ny が 0 または 0 に近いとき， x が正であるためには T が負になる必要がある．しかし，一般に所得が小さいときは所得税が 0 であると考えられるので， u として (1) の代わりに

$$u(x,y)=\log(x+b)+\log(1+c-y) \tag{4}$$

を考える．ここで b と c はあらかじめ定める正の定数である．これによって $0\leq y\leq 1$ におけるすべての y について計算を行うことができ， $T\geq 0$ となる．社会的厚生関数 $G(u)$ ，個人の稼得能力密度関数 $f(n)$ としてはこれまでと同様 [14,15]，次の関数形を仮定する．

$$G(u)=-\frac{1}{\beta}e^{-\beta u} \tag{5}$$

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma n}\exp[-\frac{(\log n-\mu)^2}{2\sigma^2}] \tag{6}$$

$G(u)$ は個々の効用 u が社会的厚生に与える影響を表した関数である．最適所得課税は積分

$$W=\int_{n_0}^{n_N}G(u)f(n)dn \tag{7}$$

を最大にする課税政策である．また，社会の総生産額に対する政府の税収が一定値 $1-r$ （$1>r>0$）であるとすると

$$1-r=\frac{\int_{n_0}^{n_N}(z-x)f(n)dn}{\int_{n_0}^{n_N}zf(n)dn}=\frac{\int_{n_0}^{n_N}T(ny)f(n)dn}{\int_{n_0}^{n_N}nyf(n)dn} \tag{8}$$

と表され，これより

$$\int_{n_0}^{n_N}(x-rz)f(n)dn=\int_{n_0}^{n_N}(ny-rny-T(ny))f(n)dn=0 \tag{9}$$

となる．

Ⅱ．所得税が所得に比例するとき

所得税が所得に比例するとき，所得税は

$$T(ny)=any \tag{10}$$

で表される（a は定めるべきパラメータ）．このとき

$$u=\log(ny-any+b)+\log(1+c-y) \tag{11}$$

となる．個人は効用関数を最大にするように労働供給 y を定めるので

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{n-an}{ny-any+b}-\frac{1}{1+c-y}=0 \tag{12}$$

から

$$y=\frac{(1-a)(1+c)n-b}{2(1-a)n}=\frac{1+c}{2}-\frac{b}{2(1-a)n} \tag{13}$$

となる．n を順次与えればこの式から y が計算できる．なお，$n\to\infty$ のとき $y\to(1+c)/2$ となる．パラメータ a は (9) において $T(ny)=any$ とおくと

$$\int_{n_0}^{n_N}(ny-rny-any)f(n)dn=(1-r-a)\int_{n_0}^{n_N}nyf(n)dn=0 \tag{14}$$

から

$$a=1-r \tag{15}$$

となる．a と y が定まると，T と x は

$$T=any \tag{16}$$

$$x=ny-any \tag{17}$$

で計算される．u は (11) から計算される．n が小さいとき（シミュレーションでは n の最小値を $n=0.1$ とした）$y\geq 0$ となることが必要なので，(13) より b と c は

$$(1+c)(1-a)\geq 10b \tag{18}$$

を満たす必要がある．

Ⅲ．所得税が所得の２乗に比例するとき

所得税が所得の２乗に比例するときは (10) の代わりに

$$T(ny)=an^2y^2 \tag{19}$$

となる（a は定めるべきパラメータ）．このとき (11)(12) は

$$u=\log(ny-an^2y^2+b)+\log(1+c-y) \tag{20}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{n-2an^2y}{ny-an^2y^2+b}-\frac{1}{1+c-y}=0 \tag{21}$$

である．(21) より

$$3an^2y^2-2[(1+c)an^2+n]y+(1+c)-b=0 \tag{22}$$

が得られ，この y の 2 次方程式を解くと（2 次方程式から解は 2 つ得られるが，大きい方の解は 1 を超え $0\leq y\leq 1$ を満たさないので捨てる）

$$y=\frac{an+can+1-\sqrt{(an+can+1)^2-3a(n+cn-b)}}{3an} \tag{23}$$

となる．パラメータ a は (9) において $T(ny)=an^2y^2$ とおくと

$$\int_{n_0}^{n_N}(ny-rny-an^2y^2)f(n)dn=(1-r)\int_{n_0}^{n_N}nyf(n)dn-a\int_{n_0}^{n_N}n^2y^2f(n)dn=0 \tag{24}$$

から

$$a=\frac{(1-r)\int_{n_0}^{n_N}nyf(n)dn}{\int_{n_0}^{n_N}n^2y^2f(n)dn} \tag{25}$$

を満たす必要がある．(23)(25) から a と y が定まれば T と x は

$$T(ny)=an^2y^2 \tag{26}$$

$$x=ny-an^2y^2 \tag{27}$$

で計算される．u は (20) から計算される．ただし，Ⅱの場合と同様 n が小さい（$n=0.1$）とき $y\geq 0$ となるためには，(23) より

$$1+c\geq 10b \tag{28}$$

であることが必要である．なお，(23) から $n\to\infty$ のとき $y\to 2(1+c)/3$ となる．

Ⅳ．所得税が所得の s 乗（$1<s<2$）に比例するとき

所得税が所得の s 乗に比例するときは (19) の代わりに

$$t(ny)=an^sy^s \tag{29}$$

となる（a と s は定めるべきパラメータ）．このとき (20)(21) は

$$u=\log(ny-an^s y^s+b)+\log(1+c-y) \tag{30}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{n-asn^s y^{s-1}}{ny-an^s y^s+b}-\frac{1}{1+c-y}=0 \tag{31}$$

となる．(31) より

$$a(1+s)n^s y^s-a(1+c)sn^s y^{s-1}-2ny+(1+c)n-b=0 \tag{32}$$

が得られ，この y の方程式を解いて，$0\leq y\leq 1$ における解を求める．パラメータ a は (9) において $T(ny)=an^s y^s$ とおくと

$$\int_{n_0}^{n_N}(ny-rny-an^s y^s)f(n)dn=(1-r)\int_{n_0}^{n_N}nyf(n)dn-a\int_{n_0}^{n_N}n^s y^s f(n)dn=0 \tag{33}$$

から

$$a=\frac{(1-r)\int_{n_0}^{n_N}nyf(n)dn}{\int_{n_0}^{n_N}n^s y^s f(n)dn} \tag{34}$$

を満たす必要がある．a と y が定まれば T と x は

$$T(ny)=an^s y^s \tag{35}$$

$$x=ny-an^s y^s \tag{36}$$

で計算される．u は (30) から計算される．ただし，Ⅱの場合と同様 n が小さい（$n=0.1$）とき $y\geq 0$ となることが必要である．なお (31) から $n\to\infty$ のとき $y\to(1+c)s/(1+s)$ となる．

Ⅴ．計算結果

シミュレーションにおいて b，c 以外のパラメータの値は Mirrlees [1] を参考にして定めた．個人の稼得能力 n の密度関数 $f(n)$ の式 (6) において，$\mu=-1$，$\sigma=0.39$ と定め，$n_0=0.1$，$n_N=1.5$ とした．$f(0.1)\approx 0.03868$，$f(1.5)\approx 0.00103$ となる．$f(n)$ のグラフを図 1 に示す．

(4) の b と c については，$b=0.1$，$c=1$ とした．また，政府の税収に関するパラメータについては，$r=0.9$ と $r=0.7$ の 2 つの場合について計算した．いずれの場合も目標関数 W に関係なく，y，ny，T，x，u が計算できる．

①　所得税が所得に比例するとき

$r=0.9$ の場合の計算結果を表 1 および図 2 に示す．$a=1-r=0.1$ となる．y，ny，T，x，u はすべて n とともに単調に増加した．y は最初急速に増加するが，n が 0.3 を越えると増加は緩やか

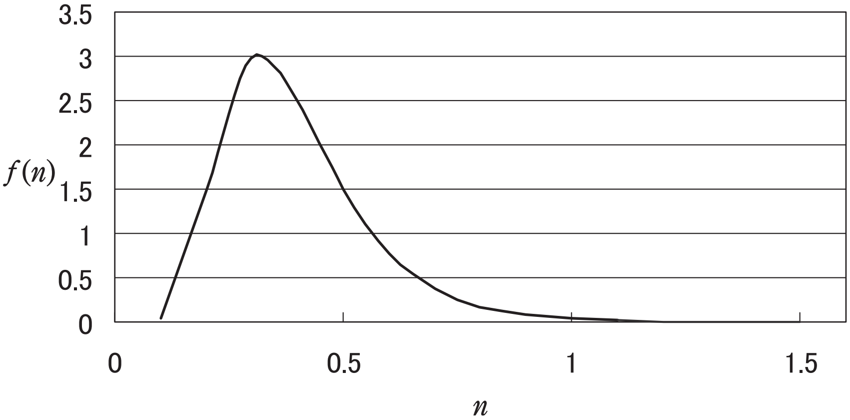
3.5
3
2.5
2
$f(n)$
1.5
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
n

図1

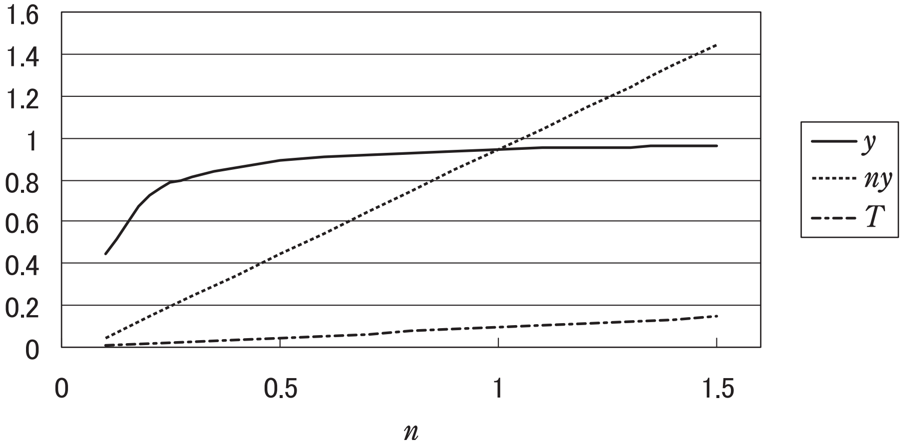
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
n
y
ny
T

図2

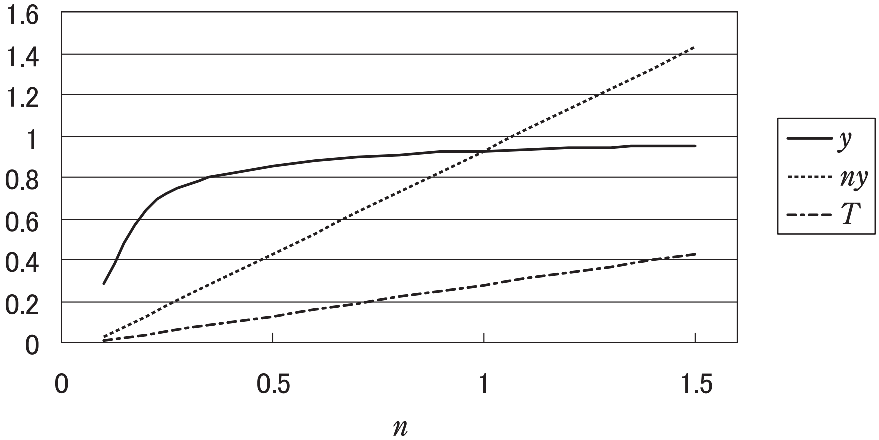
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
n
y
ny
T

図3

表 1

n	y	ny	T	x	u
0.1	0.44444	0.04444	0.00444	0.04000	–1.52428
0.2	0.72222	0.14444	0.01444	0.13000	–1.22455
0.3	0.81482	0.24444	0.02444	0.22000	–0.96954
0.4	0.86111	0.34444	0.03444	0.31000	–0.76154
0.5	0.88889	0.44444	0.04444	0.40000	–0.58779
0.6	0.90741	0.54444	0.05444	0.49000	–0.43908
0.7	0.92064	0.64444	0.06444	0.58000	–0.30929
0.8	0.93056	0.74444	0.07444	0.67000	–0.19423
0.9	0.93827	0.84444	0.08444	0.76000	–0.09092
1.0	0.94444	0.94444	0.09444	0.85000	0.00277
1.1	0.94950	1.04444	0.10444	0.94000	0.08849
1.2	0.95370	1.14444	0.11444	1.03000	0.16747
1.3	0.95727	1.24444	0.12444	1.12000	0.24070
1.4	0.96032	1.34444	0.13444	1.21000	0.30894
1.5	0.96296	1.44444	0.14444	1.30000	0.37284

表 2

n	y	ny	T	x	u
0.1	0.28571	0.02857	0.00857	0.02000	–1.58127
0.2	0.64286	0.12857	0.03857	0.09000	–1.35535
0.3	0.76191	0.22857	0.06857	0.16000	–1.13350
0.4	0.82143	0.32857	0.09857	0.23000	–0.94436
0.5	0.85714	0.42857	0.12857	0.30000	–0.78276
0.6	0.88095	0.52857	0.15857	0.37000	–0.64254
0.7	0.89796	0.62857	0.18857	0.44000	–0.51902
0.8	0.91071	0.72857	0.21857	0.51000	–0.40877
0.9	0.92064	0.82857	0.24857	0.58000	–0.30929
1.0	0.92857	0.92857	0.27857	0.65000	–0.21869
1.1	0.93507	1.02857	0.30857	0.72000	–0.13554
1.2	0.94048	1.12857	0.33857	0.79000	–0.05871
1.3	0.94506	1.22857	0.36857	0.86000	0.01267
1.4	0.94898	1.32857	0.39857	0.93000	0.07932
1.5	0.95238	1.42857	0.42857	1.00000	0.14183

になるが，最後まで増加は続く．(13) から

$$ny=\frac{(1-a)(1+c)n-b}{2(1-a)}=\frac{1+c}{2}n-\frac{b}{2(1-a)} \tag{37}$$

となるので ny，$T=any$ とも n の 1 次式になる．

r=0.7 の場合の計算結果を表 2 および図 3 に示す．a=1−r=0.3 となる．図 3 の形は図 2 とほとんど同じであるが，政府の税収が増えるので r=0.9 のときより労働供給 y は減少し，T は増加する．

② 所得税が所得の 2 乗に比例するとき

r=0.9 の場合の計算結果を表 3 および図 4 に示す．a=0.2692 となった．y は最初急速に増加するが，n が 0.5 を越えるとゆるやかに減少してゆく．ny，T，x，u は n とともに単調に増加した．

表3

n	y	ny	T	x	u
0.1	0.48341	0.04834	0.00063	0.04771	–1.49603
0.2	0.71428	0.14286	0.00549	0.13736	–1.18685
0.3	0.78107	0.23432	0.01478	0.21954	–0.94291
0.4	0.80636	0.32254	0.02801	0.29453	–0.75304
0.5	0.81468	0.40734	0.04467	0.36267	–0.60074
0.6	0.81425	0.48855	0.06426	0.42429	–0.47534
0.7	0.80862	0.56604	0.08626	0.47977	–0.37001
0.8	0.79962	0.63969	0.11017	0.52952	–0.28016
0.9	0.78828	0.70945	0.13551	0.57394	–0.20258
1.0	0.77527	0.77527	0.16183	0.61345	–0.13493
1.1	0.76106	0.83717	0.18870	0.64847	–0.07547
1.2	0.74599	0.89519	0.21576	0.67943	–0.02285
1.3	0.73033	0.94942	0.24269	0.70673	0.02399
1.4	0.71428	0.99999	0.26923	0.73075	0.06590
1.5	0.69802	1.04703	0.29516	0.75187	0.10357

表4

n	y	ny	T	x	u
0.1	0.41234	0.04123	0.00262	0.03862	–1.51377
0.2	0.55101	0.11020	0.01869	0.09151	–1.28193
0.3	0.53719	0.16116	0.03996	0.12119	–1.12836
0.4	0.49263	0.19705	0.05975	0.13730	–1.02805
0.5	0.44420	0.22210	0.07590	0.14619	–0.95964
0.6	0.39979	0.23988	0.08854	0.15133	–0.91084
0.7	0.36122	0.25285	0.09838	0.15447	–0.87461
0.8	0.32827	0.26262	0.10613	0.15649	–0.84680
0.9	0.30017	0.27017	0.11232	0.15785	–0.82485
1.0	0.27615	0.27615	0.11735	0.15881	–0.80712
1.1	0.25545	0.28100	0.12150	0.15950	–0.79252
1.2	0.23749	0.28499	0.12498	0.16001	–0.78029
1.3	0.22179	0.28833	0.12793	0.16041	–0.76991
1.4	0.20798	0.29117	0.13046	0.16071	–0.76099
1.5	0.19574	0.29360	0.13265	0.16096	–0.75325

r=0.7 の場合の計算結果を表4および図5に示す．a=1.5388 となった．y は最初急速に増加するが，n が 0.2 を越えると急激に減少して，能力 n が大きい個人は労働供給を減らすことがわかる．ny，T，x，u は n とともに単調に増加するが r=0.9 のときより増加は緩やかである．

③　所得税が所得の s 乗 $(1<s<2)$ に比例するとき

①のときと②のときで個人の労働供給に大きな差がある．所得税が所得（所得の1乗）に比例するときは，労働供給は n とともに最後まで増加するが，所得税が所得の2乗に比例するときは，労働供給は途中から減少に転じることがわかった．所得税が所得の s 乗 $(1<s<2)$ に比例するときはこの中間になるが，労働供給が最後に一定になるときの s を計算した．

r=0.9 の場合の計算結果を表5および図6に示す．s=1.496，a=0.1615 となった．y は最初急

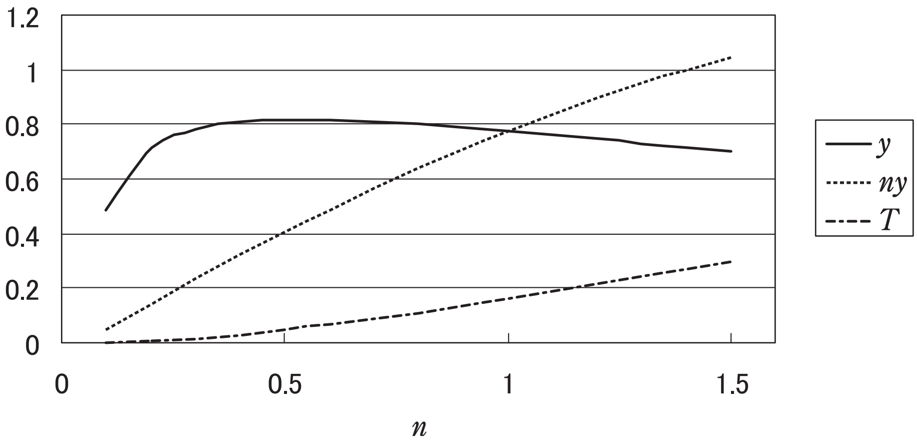
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
n
y
ny
T

図 4

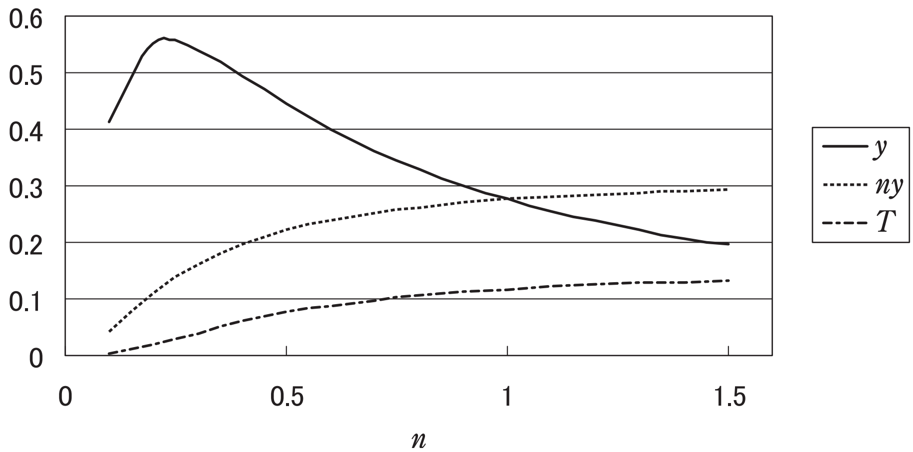
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.5
1
1.5
n
y
ny
T

図 5

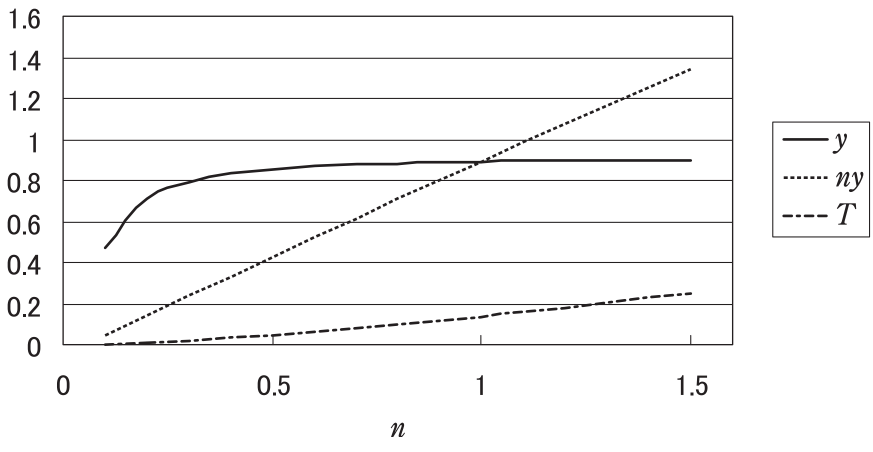
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
n
y
ny
T

図 6

表 5

n	y	ny	T	x	u
0.1	0.46774	0.04677	0.00165	0.04512	–1.50345
0.2	0.71274	0.14255	0.00876	0.13379	–1.20082
0.3	0.79324	0.23797	0.01886	0.21912	–0.95426
0.4	0.83218	0.33287	0.03115	0.30172	–0.75686
0.5	0.85452	0.42726	0.04526	0.38200	–0.59398
0.6	0.86850	0.52110	0.06091	0.46019	–0.45593
0.7	0.87778	0.61444	0.07794	0.53651	–0.33645
0.8	0.88413	0.70730	0.09620	0.61110	–0.23130
0.9	0.88846	0.79961	0.11558	0.68403	–0.13756
1.0	0.89151	0.89151	0.13601	0.75550	–0.05307
1.1	0.89359	0.98294	0.15740	0.82555	0.02376
1.2	0.89487	1.07384	0.17966	0.89418	0.09413
1.3	0.89566	1.16436	0.20279	0.96157	0.15900
1.4	0.89603	1.25444	0.22670	1.02774	0.21913
1.5	0.89603	1.34404	0.25135	1.09269	0.27513

表 6

n	y	ny	T	x	u
0.1	0.35709	0.03571	0.00596	0.02975	–1.54567
0.2	0.62125	0.12425	0.02867	0.09558	–1.31059
0.3	0.71249	0.21375	0.05679	0.15696	–1.10612
0.4	0.75748	0.30299	0.08814	0.21485	–0.93851
0.5	0.78348	0.39174	0.12183	0.26991	–0.79850
0.6	0.79990	0.47994	0.15735	0.32259	–0.67895
0.7	0.81082	0.56758	0.19438	0.37320	–0.57497
0.8	0.81833	0.65466	0.23268	0.42199	–0.48319
0.9	0.82352	0.74117	0.27206	0.46911	–0.40116
1.0	0.82712	0.82712	0.31240	0.51472	–0.32712
1.1	0.82956	0.91252	0.35357	0.55895	–0.25973
1.2	0.83109	0.99730	0.39545	0.60185	–0.19796
1.3	0.83200	1.08160	0.43802	0.64358	–0.14099
1.4	0.83243	1.16540	0.48121	0.68419	–0.08817
1.5	0.83243	1.24864	0.52491	0.72373	–0.03898

速に増加するが，n が 0.2 を越えると増加は緩やかになり，最後は一定になる．ny，T，x，u は n とともに単調に増加した．

r=0.7 の場合の計算結果を表 6 および図 7 に示す．s=1.260，a=0.3968 となった．y，ny，T，x，u の変化は r=0.9 のときとほとんど同じである．

おわりに

効用関数を変更して，労働供給 y が $0 \le y \le 1$ の全範囲で計算でき，T が負にならないようにして，所得税が所得の s 乗（s=1，s=2 および $1<s<2$）のときの労働供給の変化を計算した．所得税が所

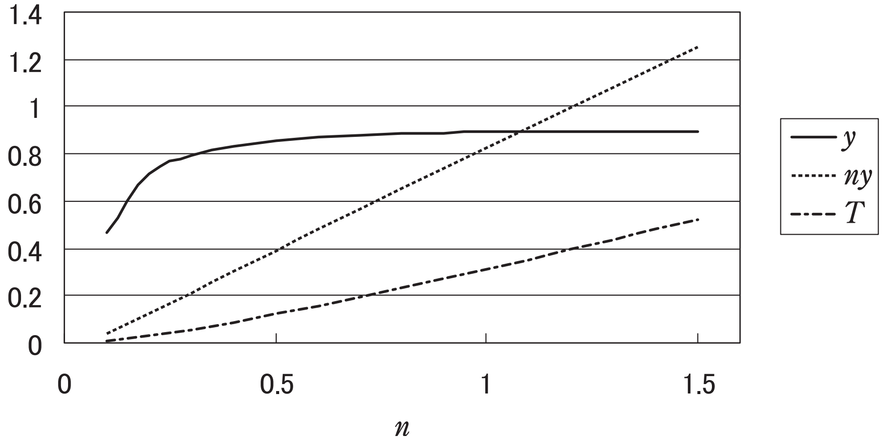

図 7

得に比例するとき（s=1）は労働供給は個人の能力の増加とともに増加するが，所得税が所得の 2 乗に比例するとき（s=2）は労働供給は能力の増加とともに途中から減少に転じることがわかった．そして労働供給が能力の増加とともに最後に一定となる s $(1<s<2)$ の値を計算した．能力の大きな個人が労働供給を減少しないのは所得税が所得の s 乗 $(1<s<2)$ であるという結果が得られた．s の値は r によって異なる．日本の所得税率のように階段関数の場合を計算することが今後の課題である．

参　考　文　献

［1］ Mirrlees, J. A. (1971) “An exploration in the theory of optimum income taxation”, *Review of Economic Studies,* vol. 31, pp. 175–208.
［2］ Mirrlees, J. A. (1976) “Optimal tax thory: A synthesis”, Journal of Public Economics, vol. 6, pp. 327–358.
［3］ Mirrlees, J. A. (1986) “The theory of optimal taxation”, in K. J. Arrow and M. D. Intrilligator (eds.), *Handbook of Mathematical Economics*, III (Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V.).
［4］ Stern, N. H. (1976) “On the specification of optimum income taxation”, *Journal of Public Economics,* vol. 6, pp. 123–162.
［5］ Tuomala, M. (1984) “On the optimal income taxation”, *Journal of Public Economics,* vol. 23, pp. 351–366.
［6］ Tuomala, M. (1990) *Optimal Income Tax and Redistribution,* Clarendon Press, Oxford.
［7］ Tarkiainen, R. and M. Tuomala (1999) “Optimal nonlinear income taxation with a two-dimensional population”, *Computational Economics,* vol. 13, pp. 1–16.
［8］ Laramie, A. J. and D. Mair (2000) *A Dynamic Theory of Taxation,* Edward Elgar, Cheltenham.
［9］ 入谷　純（1986）『課税の最適理論』，東洋経済新報社.
［10］ 山田雅俊（1991）『現代の租税理論―最適課税理論の展開―』，創文社.
［11］ 小西砂千夫（1997）『日本の税制改革―最適課税論によるアプローチ―』，有斐閣.
［12］ 大阪大学財政研究会（1985）『現代財政』第 6 章「最適課税論」，創文社.
［13］ 田近栄治・古谷泉生（2000）「日本の所得税―現状と理論―」『フィナンシャル・レビュー』，4 月号，pp. 129–161.
［14］ 市田浩三・浅井　勇（2004）「最適所得課税について」『京都産業大学論集』，社会科学系列，第 21 号，pp. 91–104.

［15］ 市田浩三（2005)「最適所得課税について（2)」『京都マネジメント・レビュー』，第8号，pp. 175–183.
［16］ 市田浩三（2006)「最適所得課税と日本の申告所得税」『京都マネジメント・レビュー』第9号，pp. 99–107.

A Note on Optimal Income Tax Theory
—Study of Labour Supply When Individual Income Tax is Proportional to the Power of Income—

Kozo ICHIDA
Sou NAKAHASHI

ABSTRACT

Since the pioneering work of Mirrlees there have been published a number of papers concerning optimal income taxation. In this paper a study on labour supply is made when the individual income tax is proportional to s-th power of income ($1 \leq s \leq 2$). Labour supply at the large value of n (ability of individual) changes with the value of s. When $s=1$ labour supply is increasing with increasing n. However, when $s=2$ labour supply is decreasing when n is large. We also calculate the value of s when labour supply becomes constant at the large value of n.