

# 多重ゼータ値の代数的性質の研究

平成 27 年 4 月 23 日受付

田 中 立 志\*

## 要 旨

多重ゼータ値には等号を許す和と許さない和の 2 種類がある。両者を補間する多重ゼータ値が近年山本修司氏により導入された。その補間多重ゼータ値に関して、川島関係式や一般複シャッフル関係式が成り立つことを代数的に証明した。さらに、山本氏が証明した巡回和公式に別証明を与えた。本研究は若林徳子氏（立命館大学）との共同研究である。

キーワード：補間多重ゼータ値，調和積，川島関係式，一般複シャッフル関係式，巡回和公式

## 1. 研究の背景と目的

ここ 20 年ほど、多重ゼータ値の線形関係式に関する研究が盛んに行われている。筆者もその研究に携わっているひとりである。解析的に示された関係式族や幾何的構造をもとに予想された関係式族を既知の関係式に代数的に帰着させ証明することにいくつも成功してきた。

ところで、近年山本修司氏（慶應義塾大学）により等号つき多重ゼータ値と等号なし多重ゼータ値を 1 つの変数を用いて補間する「補間多重ゼータ値」なるものが導入された。これは多重ゼータ値の線形和を係数にもつ 1 変数多項式である。多重ゼータ値に関する既存の結果がこの補間多重ゼータ値ではどのような形でとらえられるのかという疑問が湧く。そのような流れで補間多重ゼータ値に関する線形関係式について代数的視点からの研究を始めた。

## 2. 研究経過成果報告

(1) 補間多重ゼータ値に関して、川島関係式や一般複シャッフル関係式が成り立つことを代数的に証明した。さらに、山本氏が証明した巡回和公式に別証明を与えた。その過程で、補間多重ゼータ値の関係式、とりわけ川島関係式、一般複シャッフル関係式、巡回和公式を代数的に記述するため、非可換多項式環  $\mathbb{Q}[t]\langle x, y \rangle$  上の写像や積をいくつか新たに定義し、既知のものとの整合性が取れていることを証明している。取り立てて新しいものは得られていないが、たとえば変数  $t$  を特殊化して何か面白いことがあるかどうかは今後調べてみる必要がある。本研究の成果は論文 “On some relations for interpolated multiple zeta values” にまとめ、現在投稿中である。詳細はそちらをご参照いただきたい。

---

\* 京都産業大学理学部

(2) 論文 “On inclusion properties for relations of multiple zeta values: a survey” が RIMS 講究録別冊に受理された。

### 3. 本年度の研究活動報告

(1) 補間多重ゼータ値に関する川島関係式, 一般複シャッフル関係式を代数的に証明し, その系として巡回和公式の別証明を得た。(若林徳子氏 (立命館大学) との共同研究)

(2) 大野泰生氏 (東北大学), 鎌野健氏 (大阪工業大学), 佐々木義卓氏 (大阪体育大学) と共同開催している関西多重ゼータ研究会を本年度も 2014 年 6 月 14 日, 9 月 12 日, 12 月 6 日, 2015 年 2 月 19-20 日の計 4 回実施した。うち, 最後の 1 回は金子昌信氏 (九州大学), 坂田美加氏 (九州大学) も世話人となり, 第 8 回多重ゼータ研究集会との共同開催の形で行った。

(3) 論文 “Restricted sum formula and derivation relation for multiple zeta values” は現在修正中である。

#### 【論文】

- (1) T. Tanaka, Restricted sum formula and derivation relation for multiple zeta values, in revision.
- (2) T. Tanaka, On inclusion properties for relations of multiple zeta values: a survey, to appear.
- (3) T. Tanaka, N. Wakabayashi, On some relations for interpolated multiple zeta values, submitted.

# A study on algebraic properties for multiple zeta values

Tatsushi TANAKA

## Abstract

We know two kinds of multiple zeta values (MZV for short): strict version and non-strict version. In recent years, MZV which interpolate the two was introduced by Dr. Shuji Yamamoto. We give an algebraic proof of Kawashima relation and extended double shuffle relation for the interpolated MZV. Also we give another proof of cyclic sum formula which is first proved by Yamamoto. This is a joint work with Dr. Noriko Wakabayashi.

**Keywords :** multiple zeta values, harmonic product, Kawashima relation, extended double shuffle relation, cyclic sum formula

