ひねった導分の抽象代数的性質の研究

平成 26 年 4 月 24 日受付

田　中　立　志 *

要　旨

昨年度には，Eie，Liaw，Ong らにより示されていた多重ゼータ値の制限和公式は純代数的に導分関係式の族に含まれることがわかった。本年度はその報告活動や多重ゼータ値の関係式の包含関係に関する既知の結果や予想などについて概説講演を行った。

キーワード：多重ゼータ値，シャッフル積，導分，制限和公式，大野関係式

1. 研究の背景と目的

多重ゼータ値の導分関係式は，井原，金子，Zagier らにより証明された。この導分関係式とは，2 変数非可換多項式環上のある導分作用素の列を用いて代数的に記述される多重ゼータ値間のひとつの大きな関係式族である。彼らの証明はいわゆる一般複シャッフル関係式の重要なサブクラスとして導かれていたが，大野関係式や川島関係式などさまざまな関係式を結びつけることや，多重ゼータ値の q- 類似や p 進多重ゼータ値にも成り立つことが知られており，多重ゼータ値を研究する上で大変重要な関係式のクラスであるといえる。

Alain Connes は Henri Moscovici とともに保型形式論において重要な Rankin-Cohen bracket の “modular Hecke algebra” なるものへの拡張を行い，そこに現れる抽象的な代数構造を研究している。とくに彼らが見つけた Hopf 代数は大変興味深い。

Don Zagier や金子昌信は Connes-Moscovici の Hopf 代数を参考にして多重ゼータ値の導分関係式を記述するための導分作用素を “ ひねって ” 拡張し，多重ゼータ値の間に一般導分関係式なる関係式が成り立つだろうと予想していた。筆者は彼らによるその予想を解決したのであるが，その解決には彼らが定義したひねった導分に関して解明されていなかった抽象代数的性質をいくつか発見し証明できたことが本質的に大きく貢献している。

本研究の目的は多重ゼータ値と似て非なる対象を包括的に議論するための枠組みを構築することである。この目標に向かう第一歩として，ひねった導分の周辺の理論をある程度整備しようとするものである。

* 京都産業大学理学部

2. 研究経過成果報告

大野泰生氏（近畿大学），鎌野健氏（大阪工業大学），佐々木義卓氏（大阪体育大学）らとともに開催している「関西多重ゼータ研究会」を平成 24 年度には計 7 回行った。参加者らと行われた研究討論の中で挙がっていた問題意識のひとつに，Eie，Liaw，Ong らにより示されていた多重ゼータ値の制限和公式は純代数的に導分関係式の族に含まれるか，ということがあった。当該研究を遂行する過程でこのことを肯定的に解決できたので，以下にそれを述べる。

自然数 $k_1, k_2, \dots, k_n$ $(k_1 \geq 2)$ に対して，多重ゼータ値とは

$$\zeta(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum_{m_1 > m_2 > \cdots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \cdots m_n^{k_n}}$$

で与えられる。

$a, b \geq 0,\ k \geq a + b + 2$ とする。Eie，Liaw，Ong らにより証明された多重ゼータ値の制限和公式とは以下で与えられる。

$$\sum_{\substack{k_1 + \cdots + k_b = k - a \\ k_1 \geq 2, k_2, \dots, k_b \geq 1}} \zeta(k_1, \dots, k_b, \underbrace{1, \dots, 1}_{a}) = \sum_{\substack{k'_1 + \cdots + k'_{a+1} = a + b + 1 \\ k'_1, \dots, k'_{a+1} \geq 1}} \zeta(k'_1 + k - a - b - 1, k'_2, \dots, k'_{a+1})$$

多重ゼータ値の導分関係式を記述するために，Hoffman によって導入された多重ゼータ値の代数的定式化を与える。$\mathfrak{H} = \mathbb{Q}\langle x, y \rangle$ を $\mathbb{Q}$ 上の 2 変数 x, y の非可換多項式環とし，$\mathfrak{H}^1$ と $\mathfrak{H}^0$ をそれぞれ $\mathfrak{H}$ の部分代数 $\mathbb{Q} + \mathfrak{H}y, \mathbb{Q} + x\mathfrak{H}y$ とする。$\mathbb{Q}$- 線形写像 $Z : \mathfrak{H}^0 \to \mathbb{R}$ を $Z(1) = 1$ および

$$Z(x^{k_1 - 1} y x^{k_2 - 1} y \cdots x^{k_n - 1} y) = \zeta(k_1, k_2, \dots, k_n)$$

によって定義する。

∂ を $\mathfrak{H}$ から $\mathfrak{H}$ への $\mathbb{Q}$-線形写像でライプニッツ・ルール

$$\partial(ww') = \partial(w)w' + w\partial(w')$$

をみたすとする。このような ∂ を $\mathfrak{H}$ 上の導分といい, $\mathfrak{H}$ の生成元 x, y の像によって一意的に定まる。$z = x + y$ とする。任意の $n \geq 1$ に対して，導分 $\partial_n : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ を $\partial_n(x) = xz^{n-1}y$ および $\partial_n(y) = -xz^{n-1}y$ によって定義する。$\partial_n(\mathfrak{H}) \subset \mathfrak{H}^0$ が直ちにわかる。多重ゼータ値の導分関係式は以下で述べられる。

$$\partial_n(x\mathfrak{H}y) \subset \ker Z \quad (n \geq 1).$$

シャッフル積 $ш : \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ とは，$\mathbb{Q}$-双線形写像で,

$$1 \,ш\, w = w \,ш\, 1 = w \quad (w \in \mathfrak{H})$$

および帰納的性質

$$uw \sqcup\!\sqcup vw' = u(w \sqcup\!\sqcup vw') + v(uw \sqcup\!\sqcup w') \quad (u, v \in \{x, y\}, w, w' \in \mathfrak{H})$$

をみたすものをいう。代数 $(\mathfrak{H}, \sqcup\!\sqcup)$ は可換かつ結合的で，$(\mathfrak{H}^1, \sqcup\!\sqcup)$ と $(\mathfrak{H}^0, \sqcup\!\sqcup)$はそれぞれ部分代数になる。さらに写像 Z は $\sqcup\!\sqcup$- 準同型，すなわち

$$Z(w \sqcup\!\sqcup w') = Z(w)Z(w') \quad (w, w' \in \mathfrak{H}^0)$$

が成り立つ。これは多重ゼータ値のシャッフル積公式と呼ばれている。

この代数的定式化の下で，上述した制限和公式は次のように述べられる。$a, b \geq 0,\ k \geq a+b+2$ に対して，

$$x(x^{k-a-b-2} \sqcup\!\sqcup y^b)y^{a+1} - x^{k-a-b-1}(x^b \sqcup\!\sqcup y^a)y \in \ker Z.$$

今回得られた結果は以下の通り。

定理。制限和公式は導分関係式の線形結合としてかける。つまり，$a, b \geq 0,\ k \geq a+b+2$ に対して，

$$x(x^{k-a-b-2} \sqcup\!\sqcup y^b)y^{a+1} - x^{k-a-b-1}(x^b \sqcup\!\sqcup y^a)y \ \in \ \sum_{n \geq 1} \partial_n(x\mathfrak{H}y)$$

が成り立つ。

最後に，導分関係式は大野関係式に含まれることが知られているため，制限和公式も大野関係式に含まれることになることを注意しておく。

3. 本年度の研究活動報告

(1) 京都大学数理解析研究所の短期共同研究「多重ゼータ値の研究」において「多重ゼータ値の関係式の関係について」と題した講演を行った。多重ゼータ値間の関係式の包含関係に関する既知の結果や予想などについて主に概説を行うこととなったが，上記の結果の報告をあわせて行った。講演内容は RIMS 講究録別冊に掲載される予定である。

(2) 関西多重ゼータ研究会において，「多重ゼータ値の導分関係式と制限和公式」と題し，昨年度の研究結果に関してより詳細な解説を行った。

【論文】

(1) T. Tanaka, Restricted sum formula and derivation relation for multiple zeta values, preprint.
(2) T. Tanaka, On inclusion properties for relations of multiple zeta values: a survey, in prepara-tion.

A study on some purely algebraic properties of the twisted derivation

Tatsushi TANAKA

Abstract

Last year, we obtain that the restricted sum formula proved by Eie, Liaw and Ong is included in the class of the derivation relation for multiple zeta values purely algebraically. This year, I presented survey lectures on not only the result but also inclusion properties and conjectures among relations for multiple zeta values.

Keywords : multiple zeta values, shuffle product, derivation, restricted sum formula, Ohno relation