p-admissibility をもつ重みについて

平成 26 年 4 月 30 日受付

正　岡　弘　照 *

要　旨

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ 上の Muckenhoupt の A_p 条件を満足する重み $(1 < p < \infty)$ の全体 A_p は加法，正のスカラー倍，結びおよび交わりについて，閉じている。M_p を $\mathbb{R}^n$上の p-admissibility をもつ重み $(1 < p < \infty)$ の全体とする。$n = 1$ の場合，M_p は加法，正のスカラー倍，結びおよび交わりについて，閉じている。$n \geq 2$ とする。このとき，M_p は正のスカラー倍について，閉じているが，交わりについて，閉じていない。また，加法および結びについては，ある q $(\geq p)$ が存在して，w_j $(j = 1, 2)$ が p-admissibility をもつ重みであれば，それらの和 $w_1 + w_2$ およびそれらの結び $\max\{w_1, w_2\}$ は q-admissibility をもつ重みである。

キーワード：Muckenhoupt の A_p 条件を満足する重み，doubling 特性，ポアンカレの不等式，交わり，p-admissibility をもつ重み

1. 研究の背景および目的

n (≥ 2) 次元ユークリッド空間上の非線形ポテンシャル論を考察する上で，重みつきソボレフ空間が基本的な道具となる。ここでは，重みとして，p-admissibility をもつ重み $(1 < p < \infty)$ を考察することにする。本研究の目的は n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ 上の p-admissibility をもつ重みの全体 M_p が加法，正のスカラー倍，結びおよび交わりについて，閉じているかどうかを考察することである。昨年度は, この研究に関連して, $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ 上の doubling 測度の全体 M_2 が加法, 正のスカラー倍，結びおよび交わりについて，閉じているかどうかを考察した。本年度は，M_p のほか，$\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ 上の Muckenhoupt の A_p 条件を満足する重み $(1 < p < \infty)$ の全体 A_p についても，加法，正のスカラー倍，結びおよび 交わりについて，閉じているかどうかを考察する。

2. 平成 25 年度得られた結果

2.1. 導入と問題設定. 本年度は，特定課題研究 “p-admissibility をもつ重みの研究 ” についての最終年度である。本研究の目的を完全には，遂行できなかったが，以下で報告するように，ある程度満足すべき結果が得られたと思われる。なお，この研究は Tero Kilpeläinen 教授 (Jyväskylä 大学) と Pekka Koskela 教授 (Jyväskylä 大学) との共同研究である。

* 京都産業大学理学部

$1 < p < \infty$ とする。$w(x)$ を $\mathbb{R}^n$（$n \geq 1$）上の非負値局所可積分関数とし，$d\mu(x) = w(x)\,dx$（dx は n 次元ルベーグ測度）とおく。$\Omega(\subset \mathbb{R}^n)$ を領域とし，関数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ が Ω 上，**リプシッツ**であるとは，ある定数 L が存在して，任意の x，$y \in \Omega$ に対して，

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$$

を満たすことである。**p-admissibility をもつ重み**であるとは，μ が **doubling** 条件を満足し，w が**ポアンカレの不等式**を満足することである。すなわち，任意の中心 x，半径 r の球 $B(x, r)$ と任意のリプシッツ関数 u に対して，

(doubling 条件) $\mu(B(x, 2r)) \leq C_{d\mu}(B(x, r))$,

(ポアンカレの不等式) $⨍_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}| d\mu \leq C_p r (⨍_{B(x,r)} |\nabla u|^p d\mu)^{1/p}$,

ここで，任意の可積分関数 v とボレル集合 $E(\subset \mathbb{R}^n)$ に対して，

$$v_E = \frac{1}{\mu(E)} \int_E v\,d\mu = ⨍_E v\,d\mu.$$

本課題の主要な目的は，以下の問題の解決であった。

問題 p-admissibility をもつ重み $w_j(x)$（$j = 1, 2$）と正数 α に対して，$w_1 + w_2$，αw_1, $\max\{w_1, w_2\}$, $\min\{w_1, w_2\}$ は p-admissibility をもつ重みになるか？

2.2. Muckenhoupt の A_p 条件を満足する重み

定義 1. $w(x)$ を $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ 上の正値局所可積分関数とする。このとき，w が以下の条件を満足するとき，w は **Muckenhoupt** 族に属する，または，**A_p 条件**を満足する重み $(1 < p < \infty)$ であるという。
ある定数 $C_{p,w}$ が存在して，

$$⨍_B w\,dx \leq C_{p,w} (⨍_B w^{1/(1-p)} dx)^{1-p} \quad (B \text{ は任意の球}).$$

実解析学において，A_p 条件を満足する重みは非常に重要な概念である。A_p 条件を満足する重みが

p-admissibility をもつ重みであることが知られている。A_p で，A_p 条件を満足する重みの族を表すとする。

定理 1. A_p 条件を満足する重み $w_j(x)$ $(j=1,2)$ と正数 α に対して，w_1+w_2，αw_1，$\max\{w_1, w_2\}$，$\min\{w_1, w_2\}$ は A_p 条件を満足する重みである。

定理 1 の証明は，次の 2 つの既知の命題[†]に基づく。詳細は，近日出版予定の文献(1)を参照していただきたい。$A_\infty = \cup_{p>1} A_p$ とおき，$w \in A_p$ に対して，$d\mu(x) = w(x)\,dx$ とおき，$|E| = \int_E dx$ (E はボレル集合）とおく。

命題 1. 以下の 2 つの条件は同値である。

(1)　$w \in A_\infty$.

(2)　μ が doubling 条件を満足し，ある定数 C と δ が存在して，すべての球 B とすべてのボレル集合 E（$\subset B$）に対して，

$$\frac{\mu(E)}{\mu(B)} \le C\left(\frac{|E|}{|B|}\right)^{\delta}.$$

命題 2. 以下の 2 つの条件は同値である。

(1) $w \in A_p$.

(2) $w \in A_\infty$かつ $w^{-1/(p-1)} \in A_\infty$.

上で，A_p 条件を満足する重みが p-admissibility をもつ重みであることを注意したが，さらに，次の命題[‡]が成り立つ。

命題 3. $n=1$ とする。以下の 2 つの条件は同値である。

(1) w が p-admissibility をもつ重みである。

(2) $w \in A_p$.

[†] J. Garcia-Cuerva and J. L. Rubio de Francia, Weighted norm inequalities and related topics, North-Holland, 1985 を参照。

[‡] J. Björn, S. M. Buckley, and S. Keith, Admissible measures in one dimension, Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006), 703-705 を参照。

したがって，この節の最初に述べた定理１の系として，以下を得る。

系. $n = 1$ とする。p-admissibility をもつ重み $w_j(x)$ $(j = 1, 2)$ と正数 α に対して，$w_1 + w_2$，αw_1，$\max\{w_1, w_2\}$, $\min\{w_1, w_2\}$ は p-admissibility をもつ重みである。

この系から，１節で述べた問題は，肯定的に解決するように思えるが，$n \geq 2$ の場合，正のスカラー倍については，正しいが，交わりについては，正しくない。加法および結びについては，未解決であるが，若干の結果を得た。これらについては，次の節で述べる。

2.3. *p*-admissibility をもつ重み

$1 < p < \infty$ とする。

定理 2. $n \geq 2$ とする。$w_j(x)$ $(j = 1, 2)$ を p-admissibility をもつ重みとし，α を正数とする。このとき，

(1) αw_1 は p-admissibility をもつ重みである。

(2) 一般には，$\min\{w_1, w_2\}$ は p-admissibility をもつ重みでない。

(3) ある $q\,(\geq p)$ が存在して，$w_1 + w_2$ および $\max\{w_1, w_2\}$ は q-admissibility をもつ重みである。

定理２の (1) は p-admissibility をもつ重みの定義より，容易にしたがう。

定理２の (2) は以下の４つ補題を用いることによって所求の例が構成される。詳細は，文献 (1) をご覧いただきたい。

補題 1. w を $\mathbb{R}^n$ 上の非負値可積分関数で，$d\mu(x) = w(x)\,dx$ が doubling 特性をもつとする。さらに，ある定数 c が存在して，任意のリプシッツ関数 u と任意の球 $B = B(x, r)$ に対して，

$$\min\{\mu(\{y \in B : u(y) = 0\}),\ \mu(\{y \in B : u(y) = 1\})\} \leq cr^p \int_{B(x,4\sqrt{n}r)} |\nabla u|^p d\mu.$$

このとき，w は p-admissibility をもつ重みである。

補題 2. w を $\mathbb{R}^n$ 上の p-admissibility をもつ重みとする。このとき, $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の重み $\hat{w}$ を

$$\hat{w}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = w(x_1, \ldots, x_n) \quad (x = (x_1, \ldots, x_n))$$

で定義すると，$\hat{w}$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の p-admissibility をもつ重みである。

$\Omega(\subset \mathbb{R}^n)$ を領域とするとき，$C^\infty(\Omega)$ で，Ω 上の何回でも微分可能な関数の全体をあらわすことにする。$w(x)$ を Ω 上の p-admissibility をもつ重みとする。$d\mu(x) = w(x)\,dx$ とおく。任意の $\phi \in C^\infty(\Omega)$ に対して，

$$||\phi||_{1,p} = (\int_\Omega |\phi|^p d\mu)^{1/p} + (\int_\Omega |\nabla \phi|^p d\mu)^{1/p}$$

とおく。$W^{1,p}(\Omega, \mu)$ で，$\{\phi \in C^\infty(\Omega) : ||\phi||_{1,p} < \infty\}$ のノルム $||\cdot||_{1,p}$ に関する完備化をあらわし，これを Ω 上の**重み付きソボレフ空間**という。

$$W^{1,p}_{loc}(\Omega, \mu) = \{u : \text{各領域 } \Omega' \text{で}, \overline{\Omega'} \subset \Omega \text{ 満たすものに対して}, u \in W^{1,p}(\Omega')\}$$

とおく。ここで，Ω' は $\overline{\Omega'}$ の $\mathbb{R}^n$ における閉包とする。

定義 2. $\mathbb{R}^n$ 上の同相写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が次の条件を満たすとき，**擬等角写像**という。
(i) $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ の座標関数 $f_j(x)$ ($j = 1, \ldots, n$) が $W^{1,n}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ に属する。
(ii) ある定数 $K(\geq 1)$ が存在して，n 次元ルベーグ測度に関して，ほとんどすべての $x(\in \mathbb{R}^n)$ で，

$$||f'(x)||^n \leq K\, det(f'(x))$$

がなりたつ。ここで，$f'(x)$ は f のヤコビ行列であり，$||f'(x)|| = \max\{|f'(x)h| : h \in \mathbb{R}^n,\ |h|=1\}$ ($\mathbb{R}^n$ を n 次元ベクトル空間と同一視しており，$|\cdot|$ は，通常のベクトルのノルムである）であり，$det(f'(x))$ はヤコビ行列式である。

補題 3. $0 < s < 1$ とする。このとき，擬等角写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ およびボレル集合 $E_s(\subset \mathbb{R})$ が存在して，

$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R},\ \dim_H E_s \leq s \text{ かつ } \dim_H f(\mathbb{R} \setminus E_s) \leq s$$

をみたす。ここで，$\dim_H E_s$ は E_s のハウスドルフ次元を表す。また，$\mathbb{R}$ と $\{(x_1, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\}$ を同一視している。

Ω $(\subset \mathbb{R}^n)$ を開集合とする。任意の集合 $E(\subset \Omega)$ の (p, μ) - 容量 $cap_{p,\mu}(E, \Omega)$ は 以下のように定義される。まず，任意のコンパクト集合 $K(\subset \Omega)$ の (p, μ) - 容量 $cap_{p,\mu}(K, \Omega)$ は次式で定義される。

$$cap_{p,\mu}(K, \Omega) = \inf\left\{\int_\Omega |\nabla \phi|^p d\mu : \phi \in C^\infty(\Omega) \text{ で}, K \text{ 上}, \phi \geq 1\right\}.$$

次に，任意の開集合 $U(\subset \Omega)$ の (p, μ) - 容量 $cap_{p,\mu}(U, \Omega)$ は次式で定義される。

$$cap_{p,\mu}(U, \Omega) = \sup\{cap_{p,\mu}(K, \Omega) : K \text{ はコンパクトで，} K \subset U\}.$$

最後に，任意の集合 E（$\subset \Omega$）の（p, μ）- 容量 $cap_{p,\mu}(E, \Omega)$ は次式で定義される。

$$cap_{p,\mu}(E, \Omega) = \inf\{cap_{p,\mu}(U, \Omega) : U \text{ は開集合で，} E \subset U\}.$$

定義 3. 集合 E（$\subset \mathbb{R}^n$）は任意の領域 Ω（$\subset \mathbb{R}^n$）に対して，$cap_{p,\mu}(E \cap \Omega, \Omega) = 0$ であるならば，E は（p, μ）- 容量 0 であるという。

補題 4. $1 < p < n$ とし，f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を擬等角写像とする。$w(x) = J_f(x)^{1-p/n}$ とおき，$E \subset \mathbb{R}^n$とする。このとき，$\dim_H f(E) < n - p$ であれば，E は（p, μ）- 容量 0 である。
ここで，$\dim_H f(E)$ は $f(E)$ のハウスドルフ次元を表す。

定理 2 の (3) の証明には次の命題[§] が本質的である。詳細は，文献 (1) をご覧 いただきたい。

命題 4. w を p-admissibility をもつ重みとし，$d\mu(x) = w(x)\,dx$ とする。ある $q(\geq p)$ と正の定数 C_j $(j = 1, 2)$ が存在して，任意のリプシッツ関数 u と任意の球 $B = B(\zeta, r)$ に対して，

$$|u(x) - u(y)| \leq C_1 r(\fint_{B(\zeta, C_2 r)} |\nabla u|^q d\mu)^{1/q} \quad (x, y \in B).$$

論文

(1) T. Kilpeläinen, P. Koskela, and H. Masaoka, *Lattice property of p-admissible weights*, to appaer in Proceedings of the American Mathematical Society.

口頭発表

(1) 2013 年 8 月 28 日（水）～ 30 日（金）に北海道大学理学部で開催されたポテンシャル論研究集会で ,“The localizations of harmonic Hardy-Orlicz space and their direct sum” を講演した。

[§] P. Hajłasz and P. Koskela, Sobolev met Poincaré., Mem. Amer. Math Soc. 145 (2000), no. 688, x+101pp を参照

On p-admissible weights

Hiroaki MASAOKA

Abstract

Denote by A_p (resp. M_p) the class of Muckenhoupt A_p -weights (resp. p-admissible weights) on n dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$. A_p is closed under addition, positive scalar multiplication, join and meet. In case that $n = 1$ M_p is closed under addition, positive scalar multiplication, join and meet. Suppose that $n \geq 2$. M_p is closed under positive scalar multiplication. But M_p is not closed under meet. There exists $q(\geq p)$ such that, for $w_j \in M_p$ $(j = 1, 2)$, their sum $w_1 + w_2$ and their join $\max\{w_1, w_2\}$ belong to M_q.

Keywords : Muckenhoupt A_p -weight, doubling property, Poincaré inequality, meet, p-admissible weight