ひねった導分の抽象代数的性質の研究

平成25年4月23日受付

田　中　立　志*

要　旨

研究の過程で副産物的に得られた結果として，Eie, Liaw, Ong らにより示されていた多重ゼータ値の制限和公式は純代数的に導分関係式の族に含まれることがわかったので，そのことを報告する。

キーワード：多重ゼータ値，導分，制限和公式，導分関係式，非可換多項式環

1. 研究の背景と目的

多重ゼータ値の導分関係式は，井原，金子，Zagier らにより証明された。この導分関係式とは，2変数非可換多項式環上のある導分作用素の列を用いて代数的に記述される多重ゼータ値間のひとつの大きな関係式族である。彼らの証明はいわゆる一般複シャッフル関係式の重要なサブクラスとして導かれていたが，大野関係式や川島関係式などさまざまな関係式を結びつけることや，多重ゼータ値の q-類似や p 進多重ゼータ値にも成り立つことが知られており，多重ゼータ値を研究する上で大変重要な関係式のクラスであるといえる。

Alain ConnesはHenri Moscoviciとともに保型形式論において重要なRankin–Cohen bracketの “modular Hecke algebra”なるものへの拡張を行い，そこに現れる抽象的な代数構造を研究している。とくに彼らが見つけたHopf 代数は大変興味深い。

Don Zagier や金子昌信は Connes–Moscovici の Hopf 代数を参考にして多重ゼータ値の導分関係式を記述するための導分作用素を“ひねって”拡張し，多重ゼータ値の間に一般導分関係式なる関係式が成り立つだろうと予想していた。筆者は彼らによるその予想を解決したのであるが，その解決には彼らが定義したひねった導分に関して解明されていなかった抽象代数的性質をいくつか発見し証明できたことが本質的に大きく貢献している。

本研究の目的は多重ゼータ値と似て非なる対象を包括的に議論するための枠組みを構築することである。この目標に向かう第一歩として，ひねった導分の周辺の理論をある程度整備しようとするものである。

---

* 京都産業大学理学部

2. 研究経過成果報告

大野泰生氏(近畿大学)，鎌野健氏(大阪工業大学)，佐々木義卓氏(大阪体育大学)らとともに開催している「関西多重ゼータ研究会」を平成 24 年度には計 7 回行った。参加者らと行われた研究討論の中で挙がっていた問題意識のひとつに，Eie, Liaw, Ong らにより示されていた多重ゼータ値の制限和公式は純代数的に導分関係式の族に含まれるか，ということがあった。当該研究を遂行する過程でこのことを肯定的に解決できたので，以下にそれを述べる。

自然数 $k_1, k_2, \dots, k_n$ $(k_1 \geq 2)$ に対して，多重ゼータ値とは

$$\zeta(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum_{m_1 > m_2 > \cdots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \cdots m_n^{k_n}}$$

で与えられる．

$a, b \geq 0, k \geq a+b+2$ とする．Eie, Liaw, Ong らにより証明された多重ゼータ値の制限和公式とは以下で与えられる．

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_b=k-a \\ k_1\geq 2, k_2,\dots,k_b \geq 1}} \zeta(k_1, \dots, k_b, \underbrace{1, \dots, 1}_{a}) = \sum_{\substack{k'_1+\cdots+k'_{a+1}=a+b+1 \\ k'_1,\dots,k'_{a+1}\geq 1}} \zeta(k'_1 + k - a - b - 1, k'_2, \dots, k'_{a+1}).$$

多重ゼータ値の導分関係式を記述するために，Hoffman によって導入された多重ゼータ値の代数的定式化を与える．$\mathfrak{H} = \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$ を $\mathbb{Q}$ 上の 2 変数 x, y の非可換多項式環とし，$\mathfrak{H}^1$ と $\mathfrak{H}^0$ をそれぞれ $\mathfrak{H}$ の部分代数 $\mathbb{Q}+\mathfrak{H}y$，$\mathbb{Q}+x\mathfrak{H}y$ とする．$\mathbb{Q}$-線形写像 $Z : \mathfrak{H}^0 \to \mathbb{R}$ を $Z(1)=1$ および

$$Z(x^{k_1-1} y x^{k_2-1} y \cdots x^{k_n-1} y) = \zeta(k_1, k_2, \dots, k_n)$$

によって定義する．

∂ を $\mathfrak{H}$ から $\mathfrak{H}$ への $\mathbb{Q}$-線形写像でライプニッツ・ルール

$$\partial(ww') = \partial(w)w' + w\partial(w')$$

をみたすとする．このような ∂ を $\mathfrak{H}$ 上の導分といい，$\mathfrak{H}$ の生成元 x, y の像によって一意的に定まる．$z=x+y$ とする．任意の $n \geq 1$ に対して，導分 $\partial_n : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ を $\partial_n(x) = xz^{n-1}y$ および $\partial_n(y) = -xz^{n-1}y$ によって定義する．$\partial_n(\mathfrak{H}) \subset \mathfrak{H}^0$ が直ちにわかる．多重ゼータ値の導分関係式は以下で述べられる．

$$\partial_n(x\mathfrak{H}y) \subset \ker Z \quad (n \geq 1).$$

シャッフル積 $\text{ш} : \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ とは，$\mathbb{Q}$-双線形写像で，

$$1 \,\text{ш}\, w = w \,\text{ш}\, 1 = w \quad (w \in \mathfrak{H})$$

および帰納的性質

$$uw ш vw' = u(w ш vw') + v(uw ш w') \quad (u, v \in \{x, y\}, w, w' \in \mathfrak{H})$$

をみたすものをいう．代数$(\mathfrak{H}, ш)$は可換かつ結合的で，$(\mathfrak{H}^1, ш)$と$(\mathfrak{H}^0, ш)$はそれぞれ部分代数になる．さらに写像Zは$ш$-準同型，すなわち

$$Z(w ш w') = Z(w)Z(w') \quad (w, w' \in \mathfrak{H}^0)$$

が成り立つ．これは多重ゼータ値のシャッフル積公式と呼ばれている．

この代数的定式化の下で，上述した制限和公式は次のように述べられる．$a, b \geq 0, k \geq a+b+2$に対して，

$$x(x^{k-a-b-2} ш y^b)y^{a+1} - x^{k-a-b-1}(x^b ш y^a)y \in \ker Z.$$

今回得られた結果は以下の通り．

定理．制限和公式は導分関係式の線形結合としてかける．つまり，$a, b \geq 0, k \geq a+b+2$に対して，

$$x(x^{k-a-b-2} ш y^b)y^{a+1} - x^{k-a-b-1}(x^b ш y^a)y \ \in \ \sum_{n \geq 1} \partial_n(x\mathfrak{H}y)$$

が成り立つ．

最後に，導分関係式は大野関係式に含まれることが知られているため，制限和公式も大野関係式に含まれることになることを注意しておく．

3. 今後の課題

以下の課題が挙げられる。

(1) ひねった導分の exp 像の特徴づけを行うこと。

(2) ひねった導分の対となる作用素の位置づけを解明すること。

(3) 巡回和公式を川島関係式から代数的に導出するときに新たに構成した“巡回導分”に似た作用素をひねるとどうなるかを解明すること。

(4) 今回副産物的に得られた結果を多重L値へ拡張できるかどうかを考察すること。

論文

(1) T. Tanaka, Restricted sum formula and derivation relation for multiple zeta values, preprint.

A study on some purely algebraic properties of the twisted derivation

Tatsushi TANAKA

Abstract

As a byproduct in the process of the study, we obtain that the restricted sum formula proved by Eie, Liaw and Ong is included in the class of the derivation relation for multiple zeta values purely algebraically. This is reported here.

Keywords : multiple zeta values, derivation, restricted sum formula, derivation relation, noncommutative polynomial ring