doubling 測度について

平成 25 年 4 月 24 日受付

正　岡　弘　照*

要　旨

d 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ 上の測度の全体 $\mathcal{M}$ は加法，正のスカラー倍に関して，閉じていることはよく知られている。$\mathcal{M}$ 上では結びと交わりが定義でき，それらに関して，$\mathcal{M}$ は閉じていることがわかる。

$\mathbb{R}^d$ 上の doubling 測度の全体 $\mathcal{M}_2$ は，加法，正のスカラー倍および結びに関して，閉じているが，交わりに関して，閉じていないことを報告する。

キーワード：doubling 測度，交わり，quasisymmetric，擬等角写像，絶対連続

1. 研究の背景および目的

$d\ (\geq 2)$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ 上の非線形ポテンシャル論を考察する上で，重みつきソボレフ空間が基本的な道具となる。重みは p-admissibility と呼ばれるいくつかの特性を持たねばならない。重みが Muckhenhoupt の A_p 条件を満足するかあるいは，重みがある擬等角写像のヤコビアンの $1-p/d$ 乗で表現されておれば，重みは p-admissibility をもつことが知られている。このことにより，p-admissibility をもつ重みの研究の多くは Muckhenhoupt の A_p 条件を満足する重みあるいはある擬等角写像のヤコビアンの $1-p/d$ 乗で表現される重みについての研究であり，一般の p-admissibility をもつ重みはあまり研究されなかった。p-admissibility をもつ重みによって，誘導される測度は doubling 測度である。一般の p-admissibility をもつ重みを研究する上で，doubling 測度の諸性質を知ることは必要である。本研究の目的は，$\mathbb{R}^d$ 上の測度の族に対して，導入される種々の演算が $\mathbb{R}^d$ 上の doubling 測度の族においても，演算になりうるかを考察することである。

2. 平成 24 年度に得られた結果

平成 24 年度は，上に述べたテーマについて，Jyväskylä 大学の Tero Kilpeläinen 氏および Pekka Koskela 氏と共同研究を行った。得られた結果を次に述べる。

$\mathbb{R}^d\ (d \geq 1)$ を d 次元ユークリッド空間とする。$\mathcal{M}$ で $\mathbb{R}^d$ 上の測度の全体を記すことにする。$B=B\,(x, r)$ を中心 $x\ (\in \mathbb{R}^d)$，半径 $r\ (>0)$ をもつ $\mathbb{R}^d$ 内の球とする。$B=B\,(x, r)$ に対して，$B\,(x, 2r)$ を

* 京都産業大学理学部

$2B$ と記すことにする。このとき，

定義 1. $\mu\in\mathcal{M}$とする。このとき，ある定数 C がとれて，すべての球 B に対して，

$$\mu(2B) \le C\mu(B)$$

がなりたつとき，μ は **doubling 測度**といわれる。

$\mathbb{R}^d$ 上の doubling 測度の全体を $\mathcal{M}_2$ と記すことにする。$\mathcal{B}$を$\mathbb{R}^d$ 上の Borel 集合の全体とする。

定義 2. $\mu, v\in\mathcal{M}, \alpha>0$ とする。このとき，

$$(\mu+\nu)(E) := \mu(E)+\nu(E)\ (E\in\mathcal{B}),$$
$$(\alpha\mu)(E) := \alpha\mu(E)\ (E\in\mathcal{B}).$$

定理 1. $\mathcal{M}_2$ は定義 1 で定めた＋および正のスカラー倍について，閉じている。

定義 3. $\mu, v\in\mathcal{M}$とする。このとき，

$$(\mu\vee\nu)(E) =: \sup\{\mu(F)+\nu(E\setminus F) \mid F\subset E \text{ かつ } F\in\mathcal{B}\}\ (E\in\mathcal{B}),$$
$$(\mu\wedge\nu)(E) =: \inf\{\mu(F)+\nu(E\setminus F) \mid F\subset E \text{ かつ } F\in\mathcal{B}\}\ (E\in\mathcal{B}).$$

命題. $\mu, v\in\mathcal{M}$とする。このとき，$\mu\vee v$，$\mu\wedge v\in\mathcal{M}$である。

定理 2. $\mathcal{M}_2$ は$\vee$について，閉じている。

定理 3. $\mathcal{M}_2$ は$\wedge$について，閉じていない。

定理 1，命題および定理 2 は測度論的な考察より導かれる。証明の詳細は論文(1)をご覧頂きたい。定理 3 の証明には，以下の擬正則写像および擬等角写像論における 2 つの定理を必要とする。

定義 4. 連続な狭義単調増加関数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$が$(k-)$ **quasisymmetric** であるとは，異なるすべての x, $x+t, x-t\in\mathbb{R}$に対して，

$$\frac{1}{k} \le \frac{f(x+t)-f(x)}{f(x)-f(x-t)} \le k$$

がなりたつことである。

定理 T. 以下の特性(T)を満たす quasisymmetric 同相写像$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$が存在する。

(T)　ある Borel 集合 $N\subset\mathbb{R}$がとれて，$f(N)$および$\mathbb{R}\setminus N$ の 1 次元 Lebesgue 測度が 0 である。

定義 5. 向き付けを保つ同相写像 $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ が$(K-)$擬等角であるとは，以下の 3 条件を満足することである。

(1) $\mathbb{R}$上の 1 次元 Lebesgue 測度に関して，ほとんどすべての$y\in\mathbb{R}$に対して，$x\to F(x, y)$が絶対連続である。

(2) $\mathbb{R}$上の 1 次元 Lebesgue 測度に関して，ほとんどすべての $x\in\mathbb{R}$に対して，$y\to F(x, y)$が絶対連続である。

(3) $\mathbb{R}^2$ 上の 2 次元 Lebesgue 測度に関して，ほとんどすべての$(x, y)\in\mathbb{R}^2$ に対して，

$$\max_{\theta\in\mathbb{R}} |\partial_\theta F(x,y)| \le K \min_{\theta\in\mathbb{R}} |\partial_\theta F(x,y)|$$

がなりたつ。ここで，$\mathbb{R}^2$ 上の 2 次元 Lebesgue 測度に関して，ほとんどすべての (x, y) に対して，$\partial_\theta F(x, y) := e^{-i\theta}(\partial_x F(x, y)\cos\theta + \partial_y F(x, y)\sin\theta)$ とおく。

定理 AB. H を $\mathbb{R}^2$ の上半平面とする。このとき，以下の 2 つの条件は同値である。

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $(k-)$ quasisymmetric 同相写像である。

(2) 同相写像 $F : \overline{H} \to \overline{H}$ ($\overline{H}$ は H の閉包である。) が存在して，$F|_H : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ が擬等角写像であり，$F|_{\mathbb{R}\times\{0\}} = f$ をみたす。

上で述べた 2 つの定理と以下の補題を用いることにより，定理 3 の証明が得られる。詳細は論文(1)をご覧頂きたい。

補題. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $(k-)$ quasisymmetric 同相写像であるとき，$d\mu = df$ は doubling 測度である。ここで，df は狭義単調増加関数 f から誘導された測度とする。

p-admissibility をもつ重みの応用についての研究も行ったが，論文(2)の例 3 および口頭発表(1)，(3)を参照して頂きたい。

論文

(1) T. Kilpeläinen, P. Koskela and H. Masaoka : doubling 測度について，京都産業大学論集自然科学系列第 42 号 (2013), 53-60.

(2) T. Kilpeläinen, P. Koskela and H. Masaoka : Harmonic Hardy-Orlicz spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 38 (2013), 1-17.

口頭発表

(1) H. Masaoka, “On harmonic Hardy-Orlicz spaces (joint work with T. Kilpeläinen and P. Koskela)”，京都大学数理解析研究所共同研究集会「Potential theory and its related fields」，RIMS（京都大学数理解析研究所），3-7 September 2012.

(2) H. Masaoka, “On doubling measure (joint work with T. Kilpeläinen and P. Koskela)”, International workshop on potential theory, Hokkaido University, 4 February, 2013.

(3) H. Masaoka, “調和 Hardy-Orlicz 空間について（T. Kilpeläinen 氏および P. Koskela 氏との共同研究）”, 日本数学会 2013 年度年会，20-23 March 2013.

On doubling measures

Hiroaki MASAOKA

Abstract

It is well-known that the set $\mathcal{M}$ of measures on d-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^d$ is closed under addition and positive scalar multiplication. In $\mathcal{M}$ we can define two operations join and meet, and find that it is closed under join and meet.

We report that the set $\mathcal{M}_2$ of doubling measures on $\mathbb{R}^d$ is closed under additon, positive scalar multiplication and join, and that it is not closed under meet.

Keywords : doubling measure, meet, quasisymmetric, quasiconformal mappings, absolutely continuous