ボーチャーズ積と対称性

平成 25 年 3 月 15 日受付

村　瀬　　　篤*

要　旨

直交群 $G=O(2, n+2)$ 上の正則保型形式が「積対称性」を満たすための必要十分条件を与える。また，G 上の正則なボーチャーズ積が積対称性によって特徴づけられることを報告する。

キーワード：直交群，保型形式，ボーチャーズ積，積対称性，無限積

1. 研究の背景および目的

ボーチャーズ積は，1990 年代に R. Borcherds により発見された多変数保型形式の重要な系列である。ボーチャーズ積は，符号 $(2, n+2)$ の 2 次形式の直交群 $G=O(2, n+2)$ に付随する対称領域 $\mathcal{D}$ 上の有理型保型形式であり，無限積表示を持つ。また，その因子（零点と極）が Heegner 因子の整結合として明示的に記述される。これらのことは，一般の保型形式には期待できないことであり，ボーチャーズ積の著しい特性である。Borcherds は，ある種のボーチャーズ積を用いて，有限群論の最大の難問であった Moonshine 予想を解決した。Borcherds はこの業績によって，フィールズ賞を受賞している。ボーチャーズ積は，整数論や有限群論以外にも，無限次元リー環論，代数幾何学，超ひも理論を含む数理物理学へ応用されており，最も重要な研究テーマのひとつになっている。研究代表者は，学外研究参加者の Bernhard Heim 氏との最近の共同研究で，ボーチャーズ積が持つ新しい対称性（積対称性）を発見した。その後，積対称性の応用として，ボーチャーズ積の様々な性質を研究している。平成 23 年度の研究では，$n=1$ の場合（ジーゲル保型形式の場合）に，正則なボーチャーズ積が積対称性によって特徴づけられることを示した。

ボーチャーズ積 F の積対称性は，F のフーリエ展開係数に極めて強い束縛条件を与える。このことは，次の逆定理が成立することを示唆する：「積対称性を持つ保型形式はボーチャーズ積である。」本研究の目的は，この逆定理の証明を目指して，ボーチャーズ積の内的構造を深く追求することである。

本研究は，ボーチャーズ積の新しい特徴付けを与えるものであり，様々な応用が期待できる。

---

* 京都産業大学理学部

2. 平成 24 年度に得られた結果

平成 24 年度は，上に述べたテーマについて，ドイツ工科大学（オマーン）の B. Heim 氏と共同研究を行った。得られた結果を次に述べる。

n を正整数とし，S を n 次正定値偶対称行列とする。

$$Q = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & -S & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$$

とおく。Q は符号 $(2, n+2)$ の対称行列である。G を直交群 $O(Q, \mathbb{R})$ の元でスピノール・ノルム 1 のもののなす群とする。このとき，G は，IV 型対称領域

$$\mathcal{D} := \{(\tau, z, \tau') \in \mathfrak{H} \times \mathbb{C}^n \times \mathfrak{H} \mid \mathrm{Im}(\tau)\mathrm{Im}(\tau') - S'[\mathrm{Im}(z)] > 0\}$$

に作用する。ここに，$\mathfrak{H} := \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$, $S' := 2^{-1}S$, $S'[z] := {}^t z S' z$ $(z \in \mathbb{C}^n)$ とする。作用 $(g, Z) \to g\langle Z\rangle$ と保型因子 $J : G \times \mathcal{D} \to \mathbb{C}^\times$ は次式で与えられる：

$$g\iota(Z) = J(g, Z)\iota(g\langle Z\rangle),\ \iota(Z) := (-\tau\tau' + S'[z], Z, 1) \qquad (g \in G, Z = (\tau, z, \tau') \in \mathcal{D}).$$

G の不連続部分群を $\Gamma := \{\gamma \in G \mid \gamma L = L, (\gamma - 1)L^* \subset L\}$ により定める。ここに，$L := \mathbb{Z}^{n+4}$, $L^* := Q^{-1}L$ とする。Γ 上の重み k の正則保型形式の空間を $\mathrm{M}_k(\Gamma)$ と書く。すなわち，

$\mathrm{M}_k(\Gamma) := \{F : \mathcal{D} \to \mathbb{C} \mid F$ は $\mathcal{D}$ 上正則，$F(\gamma\langle Z\rangle) = J(\gamma, Z)^k F(Z)$ $(\gamma \in \Gamma, Z \in \mathcal{D})\}$.

$F \in \mathrm{M}k(\Gamma)$ のフーリエ・ヤコビ展開を，

$$F(\tau, z, \tau') = \sum_{m=0}^{\infty} F_m(\tau, z)\mathrm{e}(m\tau')$$

とする。ここに，$x \in \mathbb{C}$ に対して $\mathrm{e}(x) := \exp(2\pi i x)$ とする。$m \geq 1$ に対し，F_m は weight k, index mS' の正則ヤコビ形式である。

$$\mu_F := \min\{m \geq 0 \mid F_m \neq 0\},$$
$$\phi_F(\tau, z) := -\frac{F_{\mu_F+1}(\tau, z)}{F_{\mu_F}(\tau, z)}$$

とおく。一般に，ϕ_F は $\mathfrak{H} \times \mathbb{C}^n$ 上極を持つが，もし正則ならば，weight 0, index S' の弱正則ヤコビ形式を与える。すなわち，通常の正則ヤコビ形式の条件のフーリエ展開に関する条件を次の形に弱めたものである：

$$\phi(\tau, z) = \sum_{l \in \mathbb{Z}, r \in L_0^*} c(l, r)\mathrm{e}(l\tau + S(r, z)) \qquad (L_0 := \mathbb{Z}^n, L_0^* := S^{-1}L_0, S(r, z) := {}^t r S z)$$

において，$2l-S[r]$が十分小さいとき，$c(l,\ r)=0$ となる。$\mathcal{D}$上の有理型関数F が「積対称性」を満たすとは，任意の整数$N\geq 2$に対し，

$$\prod_{ad=N,\,0\leq b<d} F\left(\frac{a\tau+b}{d},\frac{\sqrt{N}}{d}z,\tau'\right)=\epsilon_N\prod_{ad=N,\,0\leq b<d} F\left(\tau,\frac{\sqrt{N}}{d}z,\frac{a\tau'+b}{d}\right)$$

を満たすことである。ここに，ϵ_NはF とN にのみよる 0 でない複素数である。

また，$\mathfrak{H}\times\mathbb{C}^n$ 上の有理型関数ψ が「ヤコビ型の積対称性」を満たすとは，任意の整数$N\geq 2$に対し，

$$\prod_{ad=N,\,0\leq b<d}\psi\left(\frac{a\tau+b}{d},az\right)=\epsilon'_N\prod_{ad=N}\psi(\tau,az)^d$$

を満たすことである。ここに，ϵ'_N はψ とN にのみよる 0 でない複素数である。

整数$N\geq 1$に対し，$X_1,...,X_N$の多項式$\mathcal{G}_N(X_1,...,X_N)$を次のように帰納的に定義する：

$$\text{(1)}\qquad \mathcal{G}_1(X_1)=-X_1,$$

$$\text{(2)}\qquad \mathcal{G}_m(X_1,\ldots,X_m)=-X_m-\sum_{j=1}^{m-1}m^{-1}j\,X_{m-j}\mathcal{G}_j(X_1,\ldots,X_j)\qquad (m\geq 2).$$

$\mathcal{G}_m(X_1,...,X_m)=-X_m+(X_1,...,X_{m-1}$ の多項式$)$となることに注意する。また，不定元q の形式的べき級数の等式として次が成り立つ：

$$1+\sum_{m=1}^{\infty}X_mq^m=\exp\left(-\sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{G}_m(X_1,\ldots,X_m)q^m\right).$$

小さいN に対して，$\mathcal{G}_N$は次の通りである：

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_1(X_1)&=-X_1,\\
\mathcal{G}_2(X_1,X_2)&=-X_2+\frac{1}{2}X_1^2,\\
\mathcal{G}_3(X_1,X_2,X_3)&=-X_3+X_1X_2-\frac{1}{3}X_1^3,\\
\mathcal{G}_4(X_1,X_2,X_3,X_4)&=-X_4+\frac{1}{2}X_2^2+X_1X_3-X_1^2X_2+\frac{1}{4}X_1^4.
\end{aligned}$$

この報告の主結果は次の通りである。

定理 1　$F\in M_k(\Gamma)$が積対称性を満たす必要十分条件は次の(1), (2)である。

(1) $F_{\mu_F}(\tau,z)$はヤコビ型の積対称性を満たす。

(2) $m\geq 1$に対し，$f_m(\tau,z):=F_{\mu_F+m}(\tau,z)/F_{\mu_F}(\tau,z)$とおく。このとき，任意の整数$N\geq 2$に対し，

$$\mathcal{G}_N(f_1(\tau,z),\ldots,f_N(\tau,z)) = -N^{-1}\sum_{ad=N,\,0\le b<d} f_1\left(\frac{a\tau+b}{d}, az\right)$$

が成り立つ。

定理 2　$F\in \mathrm{M}_k(\Gamma)$ が積対称性を満たすとする。このとき次が成り立つ。

(1) ϕ_F は $\mathfrak{H}\times\mathbb{C}^n$ 上正則である。従って，weight 0, index S' の弱正則ヤコビ形式を定める。

(2) ϕ_F のフーリエ係数 $c(l,r)$ は $2l-S[r]<0$ のとき整数である。

(3) F は ϕ_F の Borcherds　lift の定数倍である。すなわち，$\mathrm{Im}(\tau)\mathrm{Im}(\tau')-S'[\mathrm{Im}(z)]$ が十分大きいとき，

$$F(\tau,z,\tau') = c'\,\mathbf{e}(\lambda\tau - S(\rho,z) + \mu\tau')\prod_{(l,r,m)\in\mathbb{Z}\times L_0^*\times\mathbb{Z},\,(l,r,m)>0}\left(1-\mathbf{e}(l\tau+S(r,z)+m\tau')\right)^{c(lm,r)}.$$

ここに，c は 0 でない複素数であり，また λ，$\mu\in\mathbb{Q}, \rho\in\mathbb{Q}^n$ は次のように定まる：

$$\lambda = \frac{1}{24}\sum_{r\in L_0^*} c(0,r),$$
$$\rho = \frac{1}{2}\sum_{r\in L_0^*,\, r>0} c(0,r)r,$$
$$\mu = \frac{1}{2n}\sum_{r\in L_0^*} c(0,r)S[r].$$

主結果の証明の方針は次の通りである。まず，定理 1 の必要性の部分を示す。そののちに，定理 2 を解析的な方法で示す。この際，多項式 $\mathcal{G}_N$ が重要な役割を果たす。また，ヤコビ形式に関する定理 1，2 の類似が成り立ち，これが定理 2 の証明においてひとつの鍵となる。最後に，定理 1 の十分性の部分を定理 2 の応用として示す。

論文

(1) Murase, A. and Narita, H.： Fourier expansion of Arakawa lifting I：An explicit formula and examples of non-vanishing lifts, Israel Journal of Mathematics **187** (2012), 317–369.

(2) Heim, B. and Murase, A.：A characterization of the Maass space on $O(2, m+2)$ by symmetries, International J. Math. **23** (2012), 1250006：1–13.

Borcherds products and symmetries

Atsushi MURASE

Abstract

In this report we give a necessary and sufficient condition for holomorphic automorphic forms on $G = O(2, n+2)$ to satisfy "multiplicative symmetries". We also show that holomorphic Borcherds products on G are characterized by multiplicative symmetries.

Keywords : orthogonal groups, automorphic forms, Borcherds products, multiplicative symmetries, infinite products