ボーチャーズ積と対称性

平成 24 年 4 月 17 日受付

村　瀬　　　篤*

要　旨

2 次ジーゲル保型形式の場合に，正則なボーチャーズ積が積対称性によって特徴づけられることを報告する。また，無限積表示を持つ正則ヤコビ形式が類似の積対称性によって特徴づけられることもあわせて報告する。

キーワード：ジーゲル保型形式，ボーチャーズ積，積対称性，ヤコビ形式，無限積

1. 研究の背景および目的

ボーチャーズ積は，1990 年代に R. Borcherds により発見された直交群上の保型形式の重要な系列である。ボーチャーズ積は，符号 $(2, n+2)$ の 2 次形式の直交群 $G=O(2, n+2)$ に付随する対称領域 D 上の有理型保型形式であり，無限積表示を持つ。また，その因子（零点と極）が Heegner 因子の整結合として明示的に記述される。これらのことは，一般の保型形式には期待できないことであり，ボーチャーズ積の著しい特性である。Borcherds は，ある種のボーチャーズ積を用いて，有限群論の最大の難問であった Moonshine 予想を解決した。Borcherds はこの業績によって，フィールズ賞を受賞している。ボーチャーズ積は，整数論や有限群論以外にも，無限次元リー環論，代数幾何学，超ひも理論を含む数理物理学へ応用されており，整数論の最も重要なテーマのひとつになっている。研究代表者は，学外研究参加者の B. Heim 氏との最近の共同研究で，ボーチャーズ積が持つ新しい対称性（積対称性）を発見した。その後，積対称性の応用として，ボーチャーズ積の様々な性質を研究している。

ボーチャーズ積 F の積対称性は，F のフーリエ展開係数に極めて強い束縛条件を与える。このことは，次の逆定理が成立することを示唆する：「積対称性を持つ保型形式はボーチャーズ積である。」本研究の目的は，この逆定理の証明を目指して，ボーチャーズ積の内的構造を深く追求することである。

ボーチャーズ積の特徴付けとして現在のところ，次のものが知られている。

(1) 無限積を持つ。

(2) Heegner 型の因子を持つ。

(3) 楕円モジュラー形式の正規化されたテータリフトと関係づけられる。

---

* 京都産業大学理学部

本研究は，ボーチャーズ積の新しい特徴付けを与えるものであり，様々な応用が期待できる。

2. 平成 23 年度に得られた結果

平成 23 年度は，上に述べたテーマについて，ドイツ工科大学(オマーン)の B. Heim 氏と共同研究を行った。得られた結果を次に述べる。

$G:=\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$とおく。この群は，$O(2,3)$に isogeneous である。$G$ は次のように 2 次上半空間 $\mathfrak{H}_2:=\{Z\in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})\mid {}^tZ=Z, \mathrm{Im}(Z)>0\}$ に作用する：

$$g\langle Z\rangle=(aZ+b)(cZ+d)^{-1}\quad \left(g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in G, Z\in\mathfrak{H}_2\right).$$

$\Gamma:=\mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z})$を 2 次の Siegel modular group とする。Γ 上の重み k の正則保型形式の空間を $\mathrm{M}_k(\Gamma)$と書く。すなわち，

$\mathrm{M}_k(\Gamma):=\{F:\mathfrak{H}_2\to\mathbb{C}\mid F$ は$\mathfrak{H}_2$上正則，$F(\gamma\langle Z\rangle)=j(\gamma,Z)^kF(Z)\ (\gamma\in\Gamma, Z\in\mathfrak{H}_2)\}$.

$F\in\mathrm{M}_k(\Gamma)$のフーリエ・ヤコビ展開を，

$$F(\tau,z,\tau')=\sum_{m=0}^{\infty}F_m(\tau,z)\mathrm{e}(m\tau')$$

とする。ここに，$x\in\mathbb{C}$に対して $\mathrm{e}(x):=\exp(2\pi ix)$とする。$m\geq 1$ に対し，F_m は weight k，index m の正則ヤコビ形式である。

$$\mu_F:=\min\{m\geq 0\mid F_m\neq 0\},$$
$$\phi_F(\tau,z):=-\frac{F_{\mu F+1}(\tau,z)}{F_{\mu F}(\tau,z)}$$

とおく。一般に，ϕ_F は$\mathfrak{H}\times\mathbb{C}$上極を持つが，もし正則ならば，weight 0，index 1 の弱正則ヤコビ形式を与える。すなわち，通常の正則ヤコビ形式の条件のフーリエ展開に関する条件を次の形に弱めたものである：

$$\phi(\tau,z)=\sum_{l,r\in\mathbb{Z}}c(l,r)\mathrm{e}(l\tau+rz)$$

において，$4l-r^2$ が十分小さいとき，$c(l,r)=0$ となる。$c(l,r)$は $4l-r^2$ のみによるので，$c(4l-r^2)$と書く。

この報告の主結果は次の通りである。

定理 1 $F\in\mathrm{M}_k(\Gamma)$が次の積対称性を満たすとする：任意の整数 $N\geq 2$ に対し，

$$\prod_{ad=N,\,0\leq b<d}F\left(\frac{a\tau+b}{d},\frac{\sqrt{N}}{d}z,\tau'\right)=\varepsilon_N\prod_{ad=N,\,0\leq b<d}F\left(\tau,\frac{\sqrt{N}}{d}z,\frac{a\tau'+b}{d}\right)$$

を満たす。ここに，ε_N は F と N にのみ定まる 0 でない複素数である。このとき次が成り立つ。

(1) ϕ_F は$\mathfrak{H}\times\mathbb{C}$上正則である。従って，weight 0, index 1 の弱正則ヤコビ形式を定める。

(2) ϕ_F の負のフーリエ係数 $c(n)$ $(n<0)$は整数である。

(3) F は ϕ_F の Borcherds lift の定数倍である。すなわち，$\mathrm{Im}(\tau)\mathrm{Im}(\tau')-\mathrm{Im}(z)^2$ が十分大きいとき，

$$F(\tau,z,\tau')=c'\mathbf{e}(\lambda\tau-\rho z+\mu\tau')=\prod_{(m,r,n)>0}(1-\mathbf{e}(mr+rz+n\tau'))^{c(4mn-r^2)}\quad(c'\in\mathbb{C}^\times).$$

ここに，

$$\lambda=\frac{1}{24}\sum_{r\in\mathbb{Z}}c(-r^2),$$
$$\rho=\frac{1}{2}\sum_{r>0}c(-r^2)r,$$
$$\lambda=\frac{1}{2}\sum_{r>0}c(-r^2)r^2$$

であり，$(m,r,n)>0$ は，$n>0$ か $n=0$，m>0 か $m=n=0$，$r>0$ を意味する。

定理 1 の証明には，次の正則ヤコビ形式に関する結果が重要な役割を果たす。

定理 2　$\phi(\tau,z)$ を weight k, index m の正則ヤコビ形式とし，次の積対称性を満たすとする：任意の整数 $N\geq 2$ に対し，

$$\prod_{ad=N,\,0\leq b<d}\phi\left(\frac{a\tau+b}{d},az\right)=\varepsilon'_N\prod_{ad=N}\phi(\tau,az)^d$$

を満たす。ここに，ε'_N は F と N にのみ定まる 0 でない複素数である。

$$\phi(\tau,z)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l(z)\mathbf{e}(\tau)$$

を ϕ の τ に関するフーリエ展開とする。

$$\lambda'=\min\{l\geq 0\mid A_l(z)\neq 0\},$$
$$B(z)=-\frac{A_{\lambda'+1}(z)}{A_{\lambda'}(z)}$$

とおく。このとき次が成り立つ。

(1) $B(z)$ は $\mathbb{C}$ 上正則である。

(2)

$$B(z)=\sum_{r\in\mathbb{Z}}\gamma(r)\mathbf{e}(rz)$$

を $B(z)$ のフーリエ展開とする。このとき，$\gamma(r)\in\mathbb{Z}$，$\gamma(-r)=\gamma(r)$ であり，有限個の r を除いて $\gamma(r)=0$ である。

(3) $\phi(\tau,z)$ は無限積

$$\mathbf{e}(\lambda'\tau-\rho' z)\prod_{(l,r)>0}(1-\mathbf{e}(l\tau+rz))^{\gamma(r)}$$

の定数倍に等しい。ここに，$(l, r) > 0$ は $l > 0$ か $l = 0$，$r > 0$ を意味し，

$$\rho' := \frac{1}{2}\sum_{r>0}\gamma(r)r$$

である。

論文

(1) Murase, A. and Narita, H.: Fourier expansion of Arakawa lifting I: An explicit formula and examples of non-vanishing lifts, to appear in Israel Journal of Mathematics.

(2) Heim, B. and Murase, A.: *Borcherds lifts on* $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z})$, Geometry and Analysis of Automorphic Forms of Several Variables, Proceedings of the international symposium in honor of Takayuki Oda on the occasion of his 60th birthday, World Scientic (2011), 56-76.

(3) Heim, B. and Murase, A.: A characterization of the Maass space on $O(2, m+2)$ by symmetries, International J. Math. **23** (2012), 1250006 : 1-13.

編著

(1) Geometry and Analysis of Automorphic Forms of Several Variables, Proceedings of the international symposium in honor of Takayuki Oda on the occasion of his 60th birthday, edited by Y. Hamahata, T. Ichikawa, A. Murase and T. Sugano, World Scientic (2011).

口頭発表

(1) A. Murase, "Symmetries for automorphic forms on orthogonal groups (joint work with Bernhard Heim)", MPI Number Theory Lunch Seminar, Max-Planck Institut für Mathematik, 24 August 2011.

(2) A. Murase, "Borcherds lifts and symmetries (joint work with B. Heim)", 京都大学 数理解析研究所共同研究集会「保型形式と保型的 L 函数の研究」，RIMS(京都大学 数理解析研究所)，16-20 January 2012.

(3) A. Murase, "A characterization of holomorphic Borcherds lifts by symmetries (joint work with B. Heim)", International Workshop in Mathematics, German University of Technology (Oman) and Sultan Quaboos University, 18-20 February 2012.

Borcherds products and symmetries

Atsushi MURASE

Abstract

We report that, in the case of Siegel modular forms of degree two, the holomorphic Borcherds products are characterized by multiplicative symmetries. We also report that the holomorphic Jacobi forms having infinite product expansions are characterized by similar multiplicative symmetries.

Keywords : Siegel modular forms, Borcherds products, multiplicative symmetries, infinite products, Jacobi forms