保型形式および付随するゼータ関数の研究

村　瀬　　　篤
山　上　敦　士
菅　野　孝　史[1]

研究要旨

代数群上の保型形式に対して定まる様々な不変量(たとえば保型形式の周期，フーリエ係数や付随するゼータ関数の特殊値など)の間の相互関係は，保型形式の整数論における最も重要な研究課題の1つである．特に，保型形式のフーリエ係数が，付随するゼータ関数(保型L関数)の特殊値によって記述されることが一般的に期待されている。1変数保型形式の場合には，Waldspurger が Shimura-Shintani 対応の状況においてこのことを示した。2次ジーゲル保型形式の場合には Böcherer が予想を定式化し，いくつかの場合(主としてテータリフトの場合)に証明されている。本研究の主題は，ほかの代数群上の保型形式に対して，上記の問題を考察することである。

本研究の今年度の研究成果として次の2つが得られた。

(i) Arakawa lift(楕円モジュラー形式と四元数環上の保型形式の対から2次四元数ユニタリ群上の保型形式へのテータリフト)の場合に，そのフーリエ係数を完全に決定した(大阪市立大学 COE 研究員・成田宏秋氏との共同研究)。より具体的には，楕円モジュラー形式の周期と四元数環上の保型形式の周期の積で記述される。

(ii) 昨年度ある限定条件付きで得られた，$SL_2(\mathbb{Z})$に関する正則モジュラー形式の周期と保型L関数の中心値との関係を，別の方法を用いることにより，限定条件を外して一般的な状況で証明することができた。

以下，より詳細に研究成果を報告する。

1. Arakawa lifting のフーリエ展開

(1.1) 保型形式　B を $\mathbb{Q}$ 上の定符号四元数環とし，d_B をその判別式とする。$z \mapsto \overline{z}$ を B の主対合とする。$z \in B$ に対し，$\mathrm{tr}(z) = z + \overline{z}$, $\mathrm{N}(z) = z\overline{z}$ とおく。

考察の対象とするのは次のような四元数ユニタリ群である。

---

[1] 金沢大学自然科学研究科

$$G=\{g\in M_2(B)\mid {}^t\overline{g}Qg=\nu(g)Q,\ \nu(g)\in\mathbb{Q}^\times\},\left(Q=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right).$$

G の中心を Z_G と書く。以後，$\mathbb{H}=B\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$（ハミルトンの四元数環）の $M_2(\mathbb{C})$ への埋め込みを固定しておく。実リー群 $G^1_\infty=\{g\in G_\infty\mid\nu(g)=1\}$ の $\mathcal{X}=\{z\in\mathbb{H}\mid \mathrm{tr}(z)>0\}$ への作用と保型因子を

$$g\cdot z=(az+b)(cz+d)^{-1},$$

$$\mu(g,z)=cz+d\qquad\left(g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in G^1_\infty,z\in\mathcal{X}\right)$$

により定める。$K_\infty=\{g\in G^1_\infty\mid g\cdot z_0=z_0\}$ $(z_0=1\in\mathcal{X})$ は G^1_∞ の極大コンパクト部分群である。

(σ_κ,V_κ) を $GL_2(\mathbb{C})$ の κ-次対称テンソル表現とする $(\dim_{\mathbb{C}}V_\kappa=\kappa+1)$．$K_\infty$ の V_κ 上の表現 τ_κ を

$$\tau_\kappa(k)=\sigma_\kappa(\mu(k,z_0))\quad(k\in K_\infty)$$

により定義する。G^1_∞ の $\mathrm{End}(V_\kappa)$ 値の球関数を

$$\omega_\kappa(g)=\sigma_\kappa(D(g))^{-1}\mathrm{N}(D(g))^{-1}\quad(g\in G^1_\infty)$$

により定める。ここに，$D(g)=2^{-1}(g\cdot z_0+1)\mu(g,z_0)\in\mathbb{H}^\times$ とする。

B の極大整環 $\mathcal{O}$ と d_B の約数 D をとり，以後固定する。B^2 の格子 L を，任意の素数 p に対して

$$L_p:=L\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p=\begin{cases}{}^t(\mathcal{O}_p\oplus\mathcal{O}_p) & \text{if } p\nmid d_B \text{ or } p|D,\\ {}^t(\mathcal{O}_p\oplus\mathfrak{P}_p^{-1}) & \text{if } p|\dfrac{d_B}{D}\end{cases}$$

が成り立つようにとる。ここに，$p|d_B$ に対し $\mathfrak{P}_p$ は $\mathcal{O}_p$ の極大イデアルである。$K_p=\{k\in G_p\mid kL_p=L_p\}$, $K_f=\prod_{p<\infty}K_p$ とおく。

これより，κ は偶数で $\kappa>4$ とし，

$$c_\kappa=2^{-4}\pi^{-2}\kappa(\kappa-1)$$

とおく。尖点形式の空間 S_κ を，$G_{\mathbb{A}}$ 上の smooth な V_κ-値関数 F で次の 3 条件を満たすもの全体のなす空間として定義する。

(1) $F(z\gamma gk_fk_\infty)=\tau_\kappa(k_\infty)^{-1}F(g)$ $(z\in Z_{G,\mathbb{A}},\gamma\in G_{\mathbb{Q}},k_f\in K_f,k_\infty\in K_\infty)$.

(2) F は有界である。

(3) $c_\kappa\int_{G^1_\infty}\omega_\kappa(h_\infty^{-1}g_\infty)F(gfh_\infty)\,dh_\infty=F(g_fg_\infty)$ $((g_f,g_\infty)\in G_{\mathbb{A},f}\times G_\infty)$.

$B^-=\{\xi\in B\mid\bar{\xi}=-\xi\}$ とおく。$\xi\in B^--\{0\}$ に対し，$E_\xi=\mathbb{Q}(\xi)$ は虚 2 次体である。X_ξ を $\mathbb{Q}^\times_{\mathbb{A}}E^\times_\xi\backslash E^\times_{\xi,A}$ のユニタリ指標のなす集合とする。尖点形式 $F\in S_\kappa$ は次のようなフーリエ展開を持つ。

$$F(g)=F_0(g)+\sum_{\xi\in B^--\{0\}}\sum_{\chi\in X_\xi}F^\chi_\xi(g).$$

ここに,

$$F_\xi(g)=\int_{B^-\backslash B^-_{\mathbf{A}}}\psi(-\mathrm{tr}(\xi x))F\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}g\right)dx \quad (\xi\in B^-),$$

$$F_\xi^\chi(g)=\int_{\mathbb{R}_{>0}E_\xi^\times\backslash E_{\xi,\mathbf{A}}^\times}\chi^{-1}(z)F_\xi(\begin{pmatrix}z & 0\\ 0 & z\end{pmatrix}g)dz$$

とする。(dx, dz は $\mathrm{vol}(B^-\backslash B^-_{\mathrm{A}})=\mathrm{vol}(R_{>0}E_\xi^\times\backslash E_{\xi,\mathrm{A}}^\times)=1$ となるように正規化する。)

(1.2) テータリフト $H=GL_2$, $H'=B^\times$を $\mathbb{Q}$ 上の代数群とする。$\mathbb{Q}$ の素点 v に対して,空間 $\mathbf{V}_v$ を次のように定める。$v=p<\infty$のとき,$B_p^2\times\mathbb{Q}_p^\times$上の locally constant な関数でコンパクトなサポートを持つもの全体を $\mathbf{V}_p$ とする。$v=\infty$のとき,smooth な関数 $\varphi:\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}^\times\to\mathrm{End}(V_\kappa)$で,各 $t\in\mathbb{R}^\times$に対して $X\mapsto\varphi(X,t)$が $\mathcal{S}(\mathbb{H}^2)\otimes\mathrm{End}(V_\kappa)=\mathcal{S}(\mathbb{R}^8)\otimes\mathrm{End}(V_\kappa)$に属するもの全体を V_∞とする。

このとき,$G_v\times H_v\times H'_v$ の $\mathbf{V}_v$ 上の smooth な表現 r_v で次を満たすものが存在する。

$$r_v(g,1,1)\varphi(X,t)=|\nu(g)|_v^{-3/2}\varphi(g^{-1}X,\nu(g)t) \qquad (g\in G_v)$$

$$r_v(1,\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix},1)\varphi(X,t)=\psi_v\left(\frac{bt}{2}\mathrm{tr}(X^*QX)\right)\varphi(X,t) \qquad (b\in\mathbb{Q}_v)$$

$$r_v(1,\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a'\end{pmatrix},1)\varphi(X,t)=|a|^{7/2}|a'|^{-1/2}\varphi(aX,(aa')^{-1}t) \qquad (a,a'\in\mathbb{Q}_v^\times)$$

$$r_v(1,\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},1)\varphi(X,t)=|t|^4\int_{B_v^2}\psi(t\cdot\mathrm{tr}(Y^*QX))\varphi(Y,t)d_QY \qquad (a,a'\in\mathbb{Q}_v^\times)$$

$$r_v(1,1,z)\varphi(X,t)=|N(z)|_v^{3/2}\varphi(Xz,\mathrm{N}(z)^{-1}t) \qquad (z\in H'_v).$$

ここに,d_QY は B_v^2 の Haar 測度で,pairing $(X,Y)\mapsto\phi_v(\mathrm{tr}(Y^*QX))$に関して self-dual なものである。

$r=\otimes_v r_v$ を,$\mathbf{V}=\otimes'_v\mathbf{V}_v$(制限テンソル積) 上の $G_{\mathrm{A}}\times H_{\mathrm{A}}\times H'_{\mathrm{A}}$ の表現とする。試験関数 $\varphi_0=\otimes_v\varphi_{0,v}\in\mathbf{V}$ を次のように定める。$v=p<\infty$のとき,$\varphi_{0,p}$ を $L_p\times\mathbb{Z}_p^\times$の特性関数とする。$v=\infty$のとき,

$$\varphi_{0,\infty}(X,t)=\begin{cases}t^{(\kappa+3)/2}\sigma_\kappa((1,1)X)\exp(-2\pi tX^*X) & \text{if } t>0,\\ 0 & \text{if } t<0\end{cases}$$

とおく。

テータ核を

$$\theta(g,h,h')=\sum_{X\in B^2,t\in\mathbb{Q}^\times}r(g,h,h')\varphi_0(X,t) \qquad (g\in G_{\mathbf{A}},h\in H_{\mathbf{A}},h'\in H'_{\mathbf{A}})$$

により定義する。各 $g\in G_{\mathbf{A}}$ に対して，$(h, h') \mapsto \theta(g, h, h')$ は左 $Z_{H,\infty}H_{\mathbb{Q}} \times Z_{H',\infty}H'_{\mathbb{Q}}$ 不変である。ここに，$Z_H, Z_{H'}$ はそれぞれ H, H' の中心である。

$S_\kappa(D)$ を，$\Gamma_0(D) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \in D\mathbb{Z} \right\}$ に関する weight κ の正則尖点形式とする。

また，

$A_\kappa = \{f\colon B_{\mathbb{Q}}^\times \backslash B_{\mathbf{A}}^\times \to V_\kappa \mid f(hu_f u_\infty) = \sigma_\kappa(u_\infty)^{-1} f(h) \ \ (h \in H'_{\mathbf{A}}, u_f \in \mathcal{O}_{\mathbf{A},f}^\times, u_\infty \in H'_\infty)\}$

を H' 上の保型形式とする。$(f, f') \in S_\kappa(D) \times A_\kappa$ に対し，そのテータリフトを

$$\mathcal{L}(f, f')(g) = \int_{Z_{H,\infty}^+ H_{\mathbb{Q}} \backslash H_{\mathbf{A}}} \int_{Z_{H',\infty}^+ H'_{\mathbb{Q}} \backslash H'_{\mathbf{A}}} \overline{f(h)} \theta(g, h, h') f'(h') dh' dh \qquad (g \in G_{\mathbf{A}})$$

により定める。このテータリフトを，Arakawa lifting という。

Theorem

(i) (Arakawa, Narita [5]) $(f, f') \in S_\kappa(D) \times A_\kappa$ に対し，$\mathcal{L}(f, f') \in \mathcal{S}_\kappa$.

(ii) (Narita, Murase [3]) f, f' が Hecke eigenforms ならば，$\mathcal{L}(f, f')$ も Hecke eigenform である。

(1.3) テータリフトのフーリエ展開　以後，$(f, f') \in S_\kappa(D) \times A_\kappa$ を Hecke eigenform の組とし，$F = \mathcal{L}(f, f')$ とおく。

B の $\mathcal{O}$-イデアル $\mathfrak{A}$ を，任意の素数 p に対し，

$$\mathfrak{A}_p := \mathfrak{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p = \begin{cases} \mathcal{O}_p & \text{if } p \nmid d_B \text{ or } p \mid D, \\ \mathfrak{P}_p & \text{if } p \mid \dfrac{d_B}{D} \end{cases}$$

を満たすものとして定める。

$$(\mathfrak{A}_p^-)^* = \{z \in B_p^- \mid \mathrm{tr}(\overline{z}w) \in \mathbb{Z}_p \text{ for any } w \in \mathfrak{A}_p^-\}$$

$$(\mathfrak{A}_p^-)^*_{prim} = (\mathfrak{A}_p^-)^* - p \cdot (\mathfrak{A}_p^-)^*$$

とおく。任意の素数 p に対し $\xi_p \in (\mathfrak{A}_p^-)^*_{prim}$ が成り立つとき，$\xi \in B^- - \{0\}$ を primitive という。$t \in \mathbb{Q}^\times$ に対し $F_{t\xi}(g) = F_\xi(\mathrm{diag}(t, 1)\, g)$ であるから，primitive な ξ について F_ξ^χ を考察すればよい。

今後，primitive な ξ を固定し，$E = E_\xi$ と書く。$\mathcal{O}_E$ を E の整数環とする。$p < \infty$ に対し，

$$\mu_p = \frac{\mathrm{ord}_p(2\xi)^2 - \mathrm{ord}_p(d(E))}{2}$$

とおく。ここに，$d(E)$ は E の判別式である。このとき，$\mu_p \in \mathbb{Z}$ である。また，$\chi \in X_\xi$ と素数 p に対して，

$$c_p = \mathrm{Min}(c \geq 0 \mid \chi_p|_{\mathbb{Z}_p + p^c \mathcal{O}_{E,p}} = 1)$$

とおく。$g_0 = (g_{0,p})_{p<\infty} \in G_{\mathbf{A},f}$ を

$$g_{0,p}=\begin{cases}\mathrm{diag}(p^{c_p-\mu_p},p^{2(c_p-\mu_p)},1,p^{c_p-\mu_p}) & (p\nmid d_B),\\ 1_2 & (p|d_B)\end{cases}$$

により定める。Sugano の結果により，F_ξ^χ を知るには，$F_\xi^\chi(g_0\ \ \mathrm{diag}(y_\infty,\ \ y_\infty^{-1}))$ $(y_\infty>0)$ を知れば十分である。

主結果を述べるために，

$$W_{f,\chi}(h)=\int_{\mathbb{R}_{>0}E^\times\backslash E_{\mathbf{A}}^\times}\chi^{-1}(z)f(\iota(z)h)dz \qquad (h\in H_{\mathbf{A}})$$

$$W_{f',\chi}(h')=\int_{\mathbb{R}_{>0}E^\times\backslash E_{\mathbf{A}}^\times}\chi^{-1}(z)f'(\iota(z)h')dz \qquad (h'\in H'_{\mathbf{A}})$$

とおく。ここに，ι は E の $M_2(\mathbb{Q})$ への適当な埋め込みである。

主結果を述べる。f, f' は Hecke eigenform と仮定し，$F=\mathcal{L}(f,f')$ としていたことを思い起こす。

Theorem ([4])

(i) $F_0(g)=0$.

(ii) $\xi\neq 0$ とする。$F_\xi^\chi\neq 0$ ならば，次が成り立つ。

(1) $p\,|\,d_B$ に対し，$c_p(\chi)=0$.

(2) χ_∞の weight は$-\kappa$ である。

(3) ξ が primitive ならば，上の 2 条件をみたす χ に対して

$$F_\xi^\chi\left(g_0\begin{pmatrix}\sqrt{y_\infty} & 0\\ 0 & \sqrt{y_\infty}^{-1}\end{pmatrix}\right)$$
$$=2^{\kappa-2}|d(E_\xi)|^\kappa y_\infty^{\kappa/2+1}\exp(-4\pi\sqrt{\mathrm{N}(\xi)}y_\infty)\prod_{p<\infty}C_p(f,\chi)$$
$$\times\overline{W_{f,\chi}(\gamma_0)}W_{f',\chi}(\gamma_0') \qquad (y_\infty>0).$$

ここに，$C_p(f,\ \chi)$ はほとんどすべての p に対し 1 に等しい elementary constant，$\gamma_0\in H_{\mathbf{A},f}$，$\gamma'_0\in H'_{\mathbf{A},f}$ は ξ により定まる。

Remark

(i) $W_{f,\chi}(\gamma_0)$, $W_{f',\chi}(\gamma'_0)$ は，それぞれ f, f'の χ-周期と考えることができる。

(ii) この結果の応用として，0 でない$\mathcal{L}(f,f')$ を構成することができる。

2. 正則モジュラー形式の周期と保型L関数の中心値

$S_l(\Gamma)$を，$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$上のweight lの正則尖点形式のなす空間とする．$S_l(\Gamma)$には，Hecke作用素が作用する。$f \in S_l(\Gamma)$をHecke作用素の同時固有関数で，そのフーリエ展開

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_f(m) \exp(2\pi imz)$$

が$a_f(1) = 1$を満たすとする。このようなものを「正規化されたHecke固有形式」という。Kを判別式Dの虚2次体，h_Kをその類数，w_KをKに含まれる1のベキ根の個数とする。以後lはw_Kで割り切れるものと仮定する。ΩをKの量指標で，

$$\Omega(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{|\alpha|}\right)^l \qquad (\alpha \in K^{\times})$$

を満すものとする。このような指標は，ちょうどh_K個存在することに注意する。

$\boldsymbol{A}$をKのイデアル類群H_Kの元とし，$\boldsymbol{A}$に属するイデアル$\boldsymbol{a}$を1つ選ぶ。$\{\lambda, \mu\}$を$\boldsymbol{a}$の$\mathbb{Z}$-基底で，$\mathrm{Tr}(\lambda^{\sigma}\mu/\sqrt{D}) = \mathrm{N}\boldsymbol{a}$であるものとする。ここに，$\sigma$は，$K/\mathbb{Q}$の非自明な自己同型である。このとき，$\lambda^{-1}\mu$は上半平面$\mathfrak{H}$に属する。$f$の保型性より次が示される。

補題1 $P_A(f, \Omega) = \Omega(\boldsymbol{a}) \mathrm{N}\boldsymbol{a}^{l/2} \lambda^{-1} f(\lambda^{-1}\mu)$は，$\boldsymbol{a}, \{\lambda, \mu\}$の選び方に依存しない。

従って，

$$P(f, \Omega) = \textstyle\sum_{\boldsymbol{A} \in H_K} P_A(f, \Omega)$$

は，(f, Ω)の不変量である。また，次は容易に示される。

補題2 $P(f, \Omega)$は実数である。

(f, Ω)に付随するRankin L-関数を次のように定義する。

$$Z(f, \Omega;\ s) = L(\omega;\ 2s) \sum_{\boldsymbol{a}} a_f(\mathrm{N}\boldsymbol{a}) \Omega(\boldsymbol{a}) \mathrm{N}\boldsymbol{a}^{-(s+(l-1)/2)}.$$

ここに，$\boldsymbol{a}$はKの整イデアルをわたり，$L(\omega;\ s)$は$K/\mathbb{Q}$に対応するDirichlet指標ωのL-関数である。

命題3 $Z^*(f, \Omega;\ s) = (2\pi)^{-2s} |D|^s \Gamma(s + 1/2) \Gamma(s + l - 1/2) Z(f, \Omega;\ s)$は全$s$平面に整関数として解析接続される。また，関数等式

$$Z^*(f, \Omega;\ s) = Z^*(f, \Omega;\ 1 - s)$$

を満す。

主結果を述べる。

定理 4 ([1], [2])

(i)
$$Z\left(f,\,\Omega\,;\frac{1}{2}\right)=\frac{2^{l+3}\pi^{l+1}|D|^{(l-1)/2}}{(l-1)!\,w^2{}_K}P(f,\,\Omega)^2$$
が成立する。

(ii) 中心 L 値 Z(f, Ω; 1/2) は非負の実数である。

このテーマに関して，次のような問題が残されている。

(1) $\Gamma_0(N)$ に関する指標付きの楕円モジュラー形式について，結果を一般化すること。

(2) 四元数環上の保型形式の場合に考察すること。

これらの場合は，第 1 部で述べたテータリフトのフーリエ展開を保型 L 関数の特殊値によって表示する問題に関連しており，重要な問題である。今後の課題として，研究を続けたい。

研究セミナー

平成 17 年度秋学期から，奈良女子大学・理学部・上田氏との共催で，整数論研究セミナーを開催している。整数論の研究者を招いて，最新の研究成果の発表および討論を行なっており，本研究にも資するところが多かった。

以下，今年度行われたプログラムを記す。なお，会場はすべて奈良女子大学理学部である。

日時：2006 年 6 月 29 日

講師：平野　幹氏（愛媛大）題目：Calculus on principal series Whittaker functions on GL(3,C)

日時：2006 年 8 月 21 日

講師：浜畑芳紀氏（東京理科大）

題目：On arithmetic of function fields

日時：2007 年 3 月 7 日

講師：S. R. Louboutin (Marseille 大)

題目：Simplest proofs of the Siegel-Tatuzawa and Brauer-Siegel theorems

参考文献

[1] A. Murase, CM values and central L-values of modular forms, preprint.

[2] A. Murase, CM values and central L-values of modular forms (II), preprint.

[3] A. Murase and H. Narita, Commutation relations of Hecke operators for Arakawa lifting, preprint.

[4] A. Murase and H. Narita, On the Fourier-Jacobi expansion of Arakawa lifting, preprint.

[5] H. Narita, Theta lifting from elliptic cusp forms to automorphic forms on $Sp(1, q)$, to appear in Math. Z.