被覆面及びその擬等角変形の理想境界

正　岡　弘　照
石　田　　　久
辻　　　幹　雄
村　瀬　　　篤
瀬　川　重　男[1]
谷　口　雅　彦[2]
西　尾　昌　治[3]

研究目的

R を双曲的リーマン面（恒等的に $+\infty$ でないグリーン函数が存在するリーマン面）とする。$HP(R)$, $HB(R)$, $HD(R)$ をそれぞれ，R 上の非負値調和函数の差で表される調和函数の族，有界調和函数の族，Dirichlet 積分有限な調和函数の族とする。このとき，次の包含関係が知られている。$HB(R) \subset HP(R)$，$HD(R) \subset HP(R)$．昨年度，研究代表者正岡弘照は瀬川重男氏との共同研究で，$HP(R)=HB(R)$ となる必要十分条件を理想境界の言葉で与えた。すなわち，R のミニマルな マルチン境界の濃度が有限であり，各ミニマルなマルチン函数が有界であることである。本研究の目的はそれぞれ，$HP(R)=HD(R)$ となる必要十分条件を理想境界の言葉で与えることである。また，上記の条件を満たすリーマン面を具体的に与えることである。この研究は，京都産業大学の補助と各研究分担者の協力のもとに達成された。ここにお礼申し上げる。

プロジェクトによって得られた結果

[1] H. Masaoka and S. Segawa, Hyperbolic Riemann surfaces without positive harmonic functions with infinite Dirichlet integrals, preprint.

[2] 辻幹雄，線形及び非線形波動伝播現象の解析.

成果の概要

1. 以下では，まず，研究代表者 正岡が得られた結果［1］の概要を与える。また，後半部において，研究分担者 辻幹雄氏の得られた結果［2］の概要を与える。

---

[1] 大同工業大学教養部
[2] 奈良女子大学理学部（現在）
[3] 大阪市立大学大学院理学研究科

R を双曲的リーマン面（恒等的に $+\infty$ でないグリーン函数が存在するリーマン面）とする（リーマン面およびその上の函数論および調和函数論についての詳細な情報は [AF] を参照）。Δ^R を R のマルチン境界とする（マルチン境界についての詳細な情報は [B], [CC], [Hl] を参照）。また, Δ_1^R を R のミニマルなマルチン境界とする。$HP(R), HD(R)$ をそれぞれ，R 上の非負値調和函数の差で表される調和函数の族，Dirichlet 積分有限な調和函数の族とする。

定理　以下の条件は同値である。

（1）$HP(R)=HD(R)$

（2）Δ_1^R の濃度 $\#\Delta_1^R$ が有限であり，すべてのミニマルなマルチン函数が R 上，有界かつ有限な Dirichlet 積分をもつことである；

（3）$dimHP(R)=dimHD(R)<\infty$,

ここで，ベクトル空間 V に対して，$dimV$ は V の次元である。

$\zeta\in\Delta^R$ に対して，ζ で極をもつマルチン函数を k_ζ と記すことにする。

補助定理（cf. [MS2]）　以下の条件は同値である。

（1）　$\zeta\in\Delta_1^R$ で，k_ζ が R で有界である；

（2）$\{\zeta\}$ の調和測度 $\omega_z(\{\zeta\})$（ $z\in R$ ）が正であり, 適当な正定数 γ がとれて, $k_\zeta(z)=\gamma w_z(\{\zeta\})$（ $z\in R$ ）がなりたつ。

定義　h を R で調和であるとする。このとき，h が $\mathbf{h}^2$ 函数であるとは h^2 が R で調和な優函数をもつことである。R 上の $\mathbf{h}^2$ 函数の全体を $\mathbf{h}^2(R)$ と記す。

命題（cf. [N]）　h を R で調和であるとする。このとき，以下の条件は同値である。

（1）h が $\mathbf{h}^2$ 函数である；

（2）Δ^R 上の h のミニマルな細極限函数（minimal fine boundary function（cf. [CC]））h^* が存在して, $h^*\in L^2(\Delta^R)$ かつ，$h(z)=\int_{\Delta^R} h^* d\omega_z$ と表現される。

定理の証明　（1）を仮定する。$HP_+(R), HB_+(R), HD_+(R)$ をそれぞれ，R 上の非負値調和函数の族, 有界な非負値調和函数の族，Dirichlet 積分有限な非負値調和函数の族とする。このとき,

$$(1)\Leftrightarrow HP_+(R)=HD_+(R)$$

に注意する。$\zeta\in\Delta_1^R$ を任意にとる。$MHB_+(R)$ を R 上の有界な非負値調和函数の単調増大列として

得られる調和函数の族とする。

$$HD_+(R) \subset \mathbf{h}^2(R) \cap HP_+(R) \subset MHB_+(R)$$

となることが知られている（cf. [D]）。したがって, $k_\zeta \in MHB_+(R)$ となり，適当な R 上の有界な非負値調和函数の列 $\{h_n\}$ がとれて，R 上, $\lim_{n\to\infty} h_n = k_\zeta$ となる。k_ζ のミニマル性から，適当な非負値定数 κ_1 がとれて，R 上，$k_\zeta = \kappa_1 h_1$ がなりたつ。したがって, $k_\zeta \in HB_+(R)$. 上で与えた補助定理より，$\{\zeta\}$ の調和測度 $\omega_z(\{\zeta\})$ ($z \in R$) が正であり，適当な正定数 κ_2 がとれて，$k_\zeta(z) = \kappa_2 \omega_z(\{\zeta\})$ ($z \in R$) がなりたつ。よって, $k_\zeta \in HB_+(R) \cap HD_+(R)$.

ここで，$\#\Delta_1^R = \infty$ と仮定する。上の議論から，任意の $\zeta (\in \Delta_1^R)$ に対して，$\omega_z(\{\zeta\}) > 0$ であるので, $\#\Delta_1^R$ は可算無限である。$\Delta_1^R = \{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$ とおく。$z_0 \in R$ を固定しておく。調和測度の特性より，$\omega_{z_0}(\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty) = \omega_{z_0}(\Delta_1^R) = 1$ であるので, $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$ の部分列 $\{\zeta_{n_l}\}_{l=1}^\infty$ がとれて，任意の l に対して，$\omega_{z_0}(\{\zeta_{n_l}\}) \le e^{-l}$ がなりたつ。$g(z) = \Sigma_{l=1}^\infty (\omega_{z_0}(\{\zeta_{n_l}\}))^{-1/2} \omega_z(\{\zeta_{n_l}\})$ とおく。このとき，$g \in HP_+(R)$ が容易にわかる。g^* を g の Δ^R 上のミニマルな細極限値函数とする。このとき，$g(z) = \int_{\Delta_1^R} g^* d\omega_z$ およびすべての $l \in \mathbb{N}$ に対して, $g^*(\zeta_{n_l}) = (\omega_{z_0}(\{\zeta_{n_l}\}))^{-1/2}$ がなりたつ。また,

$$\int_{\Delta_1^R} (g^*(\zeta))^2 d\omega_{z_0}(\zeta) = \sum_l ((\omega_{z_0}(\{\zeta_{n_l}\}))^{-1/2})^2 \omega_{z_0}(\{\zeta_{n_l}\}) = \sum_l 1 = \infty$$

がなりたつ。よって, $g \in HP_+(R) \setminus \mathbf{h}^2(R)$. このことは $HD_+(R) \subset \mathbf{h}^2(R)$ であるので，仮定（1）に反する。よって，$\#\Delta_1^R < \infty$ でなければならない。よって，(2) がなりたつ。

(2) を仮定する。Δ_1^R の要素を $\zeta_1, ..., \zeta_m$ とする。$u \in HP_+(R)$ とする。マルチンの表現定理より，適当な Δ^R 上の測度 μ がとれて,

$$\mu(\Delta^R \setminus \Delta_1^R) = 0,$$

$$u(z) = \int_{\Delta_1^R} k_\zeta(z) d\mu(\zeta),$$

ここで，k_ζ は R 上の ζ で極をもつマルチン函数である。$\zeta \in \Delta_1^R$ に対して，k_ζ はミニマルな非負値調和函数であるので，(2) より, $k_\zeta \in HB_+(R) \cap HD_+(R)$. よって,

$$u(z) = \sum_{j=1}^m \mu(\{\zeta_j\}) \, k_{\zeta_j}(z) .$$

よって，$HP_+(R) = HD_+(R)$. (1) $\Rightarrow$ (2) の証明で与えた注意により，(1) を得る。以上より, (1) $\Leftrightarrow$ (2) がわかる。

（2）を仮定する。$(2) \Rightarrow (1)$ の証明の論法により，（3）を得る。

（3）を仮定する。$HD(R) \subset HP(R)$ であるが，$dimHP(R)=dimHD(R)<\infty$ より，$HP(R)=HD(R)$ がなりたたねばならない。よって，（1）すなわち，（2）がなりたつ。

以上より，所求の結果をうる。

2. この節では，$HP(R) \subset HD(R)$ となるリーマン面 R の例を与える。O_{HP}, O_G をそれぞれ，いかなる非負値調和函数も定数以外に存在しないリーマン面の集合，グリーン函数が存在しないリーマン面の集合とする。$O_{HP} \supset O_G$ が容易にわかる。遠木氏（[T] cf. [SN]）により，$O_{HP} \setminus O_{\mathrm{G}}$ に属するリーマン面 T の例が構成された。T のマルチン境界 Δ^T およびミニマルなマルチン境界 Δ_1^T の濃度が ともに 1 になる。ℓ を T 上のある座標円板 $U=\{z \in \mathbb{C}: |z|<1\}$ に含まれる線分とする。いま，T に ℓ に沿った切り込みをいれた 2 つのリーマン面 T_1 およびそのレプリカ T_2 を用意して，ℓ に沿った切り込みによって生じた縁を，交差状に張り合わせることによってえられるリーマン面 $\tilde{T}$ を考える。$\tilde{T}$ は基底面を T とする2葉非有界被覆面になる。$\tilde{T}$ から T の上への射影を π と記すことにする。このとき, $HP(\tilde{T})=HD(\tilde{T})$ となることを以下で示そう。

[MS1] によれば，$\#\Delta_1^{\tilde{T}}=2$. $\Delta_1^{\tilde{T}}$ の要素を ζ_1, ζ_2 とする。J を $\tilde{T}$ 上の sheet exchange とする。k_1, k_2 をそれぞれ, $\tilde{T}$ 上の ζ_1, ζ_2 で極をもつミニマルなマルチン調和函数とする。$k_j+k_j \circ J\,(j=1,2)$ は T 上の非負値調和函数とみなされる。$T \in O_{HP}$ であるので，$k_j+k_j \circ J\,(j=1,2)$ は T 上，定数でなければならない。よって, $k_j \in HB_+(\tilde{T})$ $(j=1, 2)$. **1** の補助定理より，ある正定数 $c_j\,(j=1, 2)$ が存在して, $\tilde{T}$ 上, $k_j(z)=c_j\omega_z(\{\zeta_j\})\,(j=1,2)$ とかける。ある正数 ρ をとって，$\ell \subset U_\rho=\{z \in \mathbb{C}: |z|<\rho\}$（$\subset \overline{U}_\rho \subset U$）とできる。$H_{k_j}^{\pi^{-1}(T \setminus U_\rho)}$ $(j=1,2)$ を開集合 $\pi^{-1}(T \setminus U_\rho)$ 上における $k_j\,(j=1,2)$ の一般化された Dirichlet 解とする（cf. [CC]）。$h_j=k_j-H_{k_j}^{\pi^{-1}(T \setminus U_\rho)}$ $(j=1,2)$ とおく。鏡像の原理により, ある正数 $\rho'\,(<\rho,\ \ell \subset U_{\rho'})$ がとれて, $h_j\,(j=1,2)$ は $\pi^{-1}(T \setminus U_{\rho'})$ 上の調和函数に拡張される。k_j が $\tilde{T}$ 上の調和函数であることに注意すると, $H_{k_j}^{\pi^{-1}(T \setminus U_\rho)}$ $(j=1,2)$ も $\pi^{-1}(T \setminus U_{\rho'})$ 上の調和函数に拡張される。$\pi^{-1}(T \setminus U_\rho)$ の連結成分を $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2$ とする。$\tilde{T}$ 上，$k_j(z)=c_j\omega_z(\{\zeta_j\})\,(j=1,2)$ とかけるので，必要なら h_1 と h_2 のラベルをとりかえることにより，ある適当な正数 c_3 がとれて，$\tilde{T}_j$ 上，$h_j=c_3\left(1-H_1^{\pi^{-1}(T \setminus U_\rho)}\right)$ $(j=1,2)$ で，$\tilde{T}_{j+(-1)^{j+1}}$ 上，$h_j=0$ $(j=1,2)$ としてよい。グリーンの公式と上で述べたことから,

$$\int_{\pi^{-1}(T \setminus U_\rho)} \left|\nabla h_j(z)\right|^2 dv(z) = -\int_{\partial\pi^{-1}(U_\rho)} h_j(z)\frac{\partial h_j(z)}{\partial n}ds(z) < \infty \quad (j=1,2),$$

ここで, dv は座標近傍から誘導される 2 次元 Lebesgue 測度とし, $\dfrac{\partial h_j(z)}{\partial n}$ は $h_j(z)$ の各領域 $\tilde{T}_k$ $(k=1,2)$ に関する内法線微分とする。線積分は $\partial\pi^{-1}(U_\rho)$ の各連結成分において，対応する領域 $\tilde{T}_k$ $(k=1,2)$ に関して正の方向にとる。グリーンの公式と上の議論より,

$$\int_{\pi^{-1}(T \setminus U_\rho)} \left|\nabla H_{k_j}^{\pi^{-1}(T \setminus U_\rho)}(z)\right|^2 dv(z) = -\int_{\partial\pi^{-1}(U_\rho)} H_{k_j}^{\pi^{-1}(T \setminus U_\rho)}(z)\frac{\partial H_{k_j}^{\pi^{-1}(T \setminus U_\rho)}(z)}{\partial n}ds(z) < \infty \quad (j=1,2).$$

よって,

$$\left(\int_{\pi^{-1}(T\setminus U_\rho)}\left|\nabla k_j(z)\right|^2 dv(z)\right)^{1/2}$$
$$\leq\left(\int_{\pi^{-1}(T\setminus U_\rho)}\left|\nabla h_j(z)\right|^2 dv(z)\right)^{1/2}+\left(\int_{\pi^{-1}(T\setminus U_\rho)}\left|\nabla H_{k_j}^{\pi^{-1}(T\setminus U_\rho)}(z)\right|^2 dv(z)\right)^{1/2}<\infty \quad (j=1,2).$$

また, 容易に,

$$\int_{\pi^{-1}(U_\rho)}\left|\nabla k_j(z)\right|^2 dv(z)<\infty \quad (j=1,2).$$

以上から,

$$\int_{\tilde{T}}\left|\nabla k_j(z)\right|^2 dv(z)<\infty \qquad (j=1,2),$$

すなわち, $k_j\in HD(\tilde{T})$ $(j=1,2)$. よって, マルチンの表現定理より, $HP(\tilde{T})\subset HD(\tilde{T})$ がなりたつ。よって, $HP(\tilde{T}) = HD(\tilde{T})$ がなりたつ。

談話会等

このプロジェクトの今後の発展のために, 以下の情報知識の提供を お願いした。

リーマン面の正則族に詳しい大阪市立大学教授今吉洋一氏に以下の講演をして頂き, リーマン面の擬等角変形についての知見を深めた。

講演題目：リーマン面の正則族の正則切断について

講師：今吉洋一氏（大阪市立大学大学院理学研究科教授）

日時：2006 年 1 月 19 日（木）16 時 45 分～ 18 時 00 分

場所：2 号館会議室

References

[AS] L. V. AHLFORS AND L. SARIO: *Riemann Surfaces*, Princeton, 1960.

[B] M. BRELOT: *On Topologies and Boundaries in Potential Theory,* Lecture Notes in Math., **175**(1971), Springer.

[CC] C. CONSTANTINESCU AND A. CORNEA: *Ideale Ränder Riemanncher Flächen*, Springer, 1969.

[D] J. L. DOOB: *Boundary properties of functions with finite Dirichlet integrals*, Ann. Inst. Fourier, **12**(1962), 573–621.

[Hl] L. HELMS: *Introduction to Potential Theory,* Wiley-Interscience, 1969.

[MS1] H. MASAOKA AND S. SEGAWA: *Martin boundary of unlimited covering surfaces*, Jour. d'Analyse Math., **82**(2000), 55–72.

[MS2] H. MASAOKA AND S. SEGAWA: *Hyperbolic Riemann surfaces without unbounded positive harmonic functions*, to appear.

[N] L. LUMER-NAÏM: $\mathcal{H}^p$*-spaces of harmonic functions*, Ann. Inst. Fourier, **17**(1967), 425–469.

[SN] L. SARIO AND M. NAKAI: *Classification Theory of Riemann Surfaces*, Springer, 1970.

[T] Y. TÔKI: *The examples in the classification of open Riemann surfaces*, Osaka Math. Jour., **5**(1953), 267–280.

Hiroaki Masaoka
Department of Mathematics
Faculty of Science
Kyoto Sangyo University
Kamigamo–Motoyama, Kitaku
Kyoto 603-8555
Japan
e-mail masaoka@cc.kyoto-su.ac.jp