

# 線形及び非線形波動伝播現象の解析

辻 幹 雄

先ず研究目的について記す。非線形双曲型方程式に対する初期値問題について考える。初期函数が十分に微分可能であっても一般的に有限時間内に解に特異点が現れる。代表的な例は「衝撃波」である。そしてこの波は区分的に滑らかな弱解に対してのみ定義されている。従って最初に考察しなければならない問題は「区分的滑らかな弱解の存在証明」である。この問題に対する一般的な回答は Riemann 問題を除いて現時点では全くない。

この課題について今年度から始めた「Complex method の視点からの研究」についてのみ報告する。これまで我々が展開してきた「幾何学的手法による研究」についても平成 17 年度中に論文原稿を書き、研究発表（国内及び海外共）を行ったが省略する。

本論に入る前にここに至った経路について書く。出発点は線形双曲型方程式である。この方程式の基本解の構成、及びその性質を研究する際、よく用いられたのは complex method である。議論の場を複素空間に拡張する主な利点は「1) 自由度が増える為、積分路の変更等いろいろな可能性が広がる。2) 解析接続により解の定義域を複素空間全体に広げることが出来る。そして局所的性質から大域的性質を得ることが理論的には可能となる」ことである。従って或る非線形双曲型方程式に対する初期値問題を complex method の視点から解析することを試みた。

本論に入る。我々の手法、及び結果を解説する為に一般論を展開せず次の様な具体例について考える：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} u^2 \right) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^2 \\ u(0, x) = x^2, & x \in \mathbb{R}^1 \end{cases} \quad (1)$$

我々の問題は「(1) の区分的滑らかな弱解の存在、及びその存在領域」を明らかにすることである。先ず (1) を特性曲線の方法により解く。特性微分方程式は次の様に書かれる：

$$\dot{x} = u, \quad \dot{u} = 0,$$

そしてその初期条件は

$$x(0) = \xi, \quad u(0) = \xi^2.$$

となる。従って特性曲線族は次の様になる：

$$x = \xi + \xi^2 t, \quad u = \xi^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^1. \quad (2)$$

ここで  $D_{\pm} = \{(t, x); 4tx + 1 \gtrless 0\}$ ,  $C = \{(t, x); 4tx + 1 = 0\}$  と記すと  $D_+ \cup C = \bigcup_{\xi \in \mathbb{R}^1} \{(t, x); x = \xi + \xi^2 t\}$  となり、更に曲線  $C$  は特性曲線族  $\{(t, x); x = \xi + \xi^2 t\}$  ( $\xi \in \mathbb{R}^1$ ) の包絡線として得られることが判る。方程式 (2) を  $\xi$  に関して解くことにより、(1) の解は初期直線  $\{t=0\}$  の近傍において次の様に表現される：

$$u(t, x) = 4x^2 / (1 + \sqrt{4tx + 1})^2. \quad (3)$$

(3) の右辺は全空間  $\mathbb{R}^2$  において定義された連続函数であるが曲線  $C$  に沿って微分可能ではなく、更に領域  $D_-$  において複素数値函数になる。従って我々の問題は解 (3) を曲線  $C$  を越えて「実数値をとる区分的滑らかな (1) の弱解」として延長することである。以下得られた結果を証明を付けず列挙することにする。

**命題 1.** 解 (3) を「実数値をとる区分的滑らかな (1) の弱解」として曲線  $C$  を越えて延長出来たと仮定する。このとき解  $u(t, x)$  は曲線  $C$  にそって第一種の不連続性をもたない、即ち  $C$  にそってジャンプ不連続性をもたない。

曲線  $C$  を越えて解を延長する為に、下記の初期値問題を考える：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} u^2 \right) = 0, & (t, x) \in D_- \\ u(t, x) = 4x^2, & (t, x) \in C \end{cases}. \quad (4)$$

次の結果を得る。

**命題 2.**  $D_-$  の閉包を  $\bar{D}_-$  と記すとき、初期値問題 (4) は  $C^1(D_-) \cap C^0(\bar{D}_-)$  において解をもたない。

命題 2 を局所化することが出来る。点  $P$  を曲線  $C$  上の任意の点とし、点  $P$  の任意の開近傍  $U$  をとる。次の様な初期値問題を考える：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} u^2 \right) = 0, & (t, x) \in D_- \cap U \\ u(t, x) = 4x^2, & (t, x) \in C \cap U \end{cases}. \quad (5)$$

**命題 3.** 初期値問題 (5) は  $C^1(D_- \cap U) \cap C^0(\bar{D}_- \cap U)$  において解をもたない。

以上を纏めると次の定理を得る。

**定理 4.** 初期値問題 (1) は複素空間全体で定義された解 (勿論, 特異性を含んでいる) をもつが, 実空間に制限すると (1) は実空間全体で定義された区分的滑らかな弱解をもつことが出来ない。そしてその弱解の存在領域の境界は特性曲線族の包絡線により得られる。

この結果の一般化は易しい。我々の研究目的に関する「上記手法による研究」を辻は始めたばかりである。従ってまだ不十分な結果しか得ていない。