保型形式および付随するゼータ関数の研究

村　瀬　　　篤
正　岡　弘　照
菅　野　孝　史[1]

研究要旨

代数群上の保型形式に対して定まる様々な不変量（たとえば保型形式の周期や付随するゼータ関数の特殊値など）の間の相互関係は，保型形式の整数論における最も重要な研究課題の１つである。そのなかでも，きわだって美しい成果として，Waldspurger（[7]）による保型形式の周期と保型 L 関数の中心値のあいだに成り立つ公式の研究がある。この結果は極めて一般的な状況で成立しているが，公式にはいくつかの決定されていない定数があり，明示的なものではない。本研究では，$SL_2(\mathbf{Z})$ に関する正則モジュラー形式の場合に，Waldspurger の公式を精密化することを目指し，ある条件の下で結果を得ることができた（[3]）。

また，菅野孝史氏との共同研究において，Kudla lift（楕円モジュラー形式から３次ユニタリ群上の保型形式へのテータリフト）の内積公式について研究を行なった。結果は，[5] に発表された。

以下，[3] の研究を中心に研究成果を報告する。

1.　楕円モジュラー形式の周期と中心 L 値の研究　$S_l(\Gamma)$ を，$\Gamma=SL_2(\mathbf{Z})$ 上の weight l の正則尖点形式のなす空間とする。$S_l(\Gamma)$ には，Hecke 作用素が作用する。$f \in S_l(\Gamma)$ を Hecke 作用素の同時固有関数で，そのフーリエ展開

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_f(m)\exp(2\pi imz)$$

が $a_f(1)=1$ を満たすとする。このようなものを「正規化された Hecke 固有形式」という。K を判別式 D の虚２次体, h_K をその類数, w_K を K に含まれる１のベキ根の個数とする。以後 l は w_K で割り切れるものと仮定する。Ω を K の量指標で,

$$\Omega(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{|\alpha|}\right)^l \qquad (\alpha \in K^\times)$$

[1] 金沢大学自然科学研究科

を満すものとする。このような指標は，ちょうど h_K 個存在することに注意する。

$\mathcal{A}$ を K のイデアル類群 H_K の元とし，$\mathcal{A}$ に属するイデアル $\mathfrak{a}$ を 1 つ選ぶ。$\{\lambda, \mu\}$ を $\mathfrak{a}$ の $\mathbf{Z}$- 基底で，$\mathrm{Tr}(\lambda^\sigma\mu/\sqrt{D})=\mathrm{N}\mathfrak{a}$ であるものとする。ここに，σ は，$K/\mathbf{Q}$ の非自明な自己同型である。このとき，$\lambda^{-1}\mu$ は上半平面 $\mathfrak{H}$ に属する。f の保型性より次が示される。

補題 1　$P_{\mathcal{A}}(f, \Omega) = \Omega(\mathfrak{a})\mathrm{N}\mathfrak{a}^{l/2}\lambda^{-l}f(\lambda^{-1}\mu)$ は，$\mathfrak{a}$，$\{\lambda, \mu\}$ の選び方に依存しない。

従って，

$$P(f, \Omega) = \sum \mathcal{A} \in H_K P_{\mathcal{A}}(f, \Omega)$$

は，(f, Ω) の不変量である。また，次は容易に示される。

補題 2　$P(f, \Omega)$ は実数である。

(f, Ω) に付随する Rankin L- 関数を次のように定義する。

$$Z(f, \Omega; s) = L(\omega; 2s)\sum_{\mathfrak{a}} a_f(\mathrm{N}\mathfrak{a})\Omega(\mathfrak{a})\mathrm{N}\mathfrak{a}^{-(s+(l-1)/2)}.$$

ここに，$\mathfrak{a}$ は K の整イデアルをわたり，$L(\omega; s)$ は $K/\mathbf{Q}$ に対応する Dirichlet 指標 ω の L- 関数である。

命題 3　$Z^*(f, \Omega; s) = (2\pi)^{-2s}\,|D|^s\,\Gamma(s+1/2)\Gamma(s+l-1/2)Z(f, \Omega; s)$ は全 s 平面に整関数として解析接続される。また，関数等式

$$Z^*(f, \Omega; s) = Z^*(f, \Omega; 1-s)$$

を満す。

主結果を述べる。

定理 4　K の類数 h_K は奇数であると仮定する。

(i)
$$Z\left(f, \Omega; \frac{1}{2}\right) = \frac{2^{l+3}\pi^{l+1}|D|^{(l-1)/2}}{(l-1)!w_K^2}P(f, \Omega)^2$$

が成立する。

(ii) 中心 L 値 $Z(f, \Omega; 1/2)$ は非負の実数である。

主結果の証明は，次のようなテータリフトの構成による。

$X, Y \in \mathbf{C}^2$ と $\tau=u+iv \in \mathfrak{H}$ に対し, $(X, Y)=X^*SY$ および $(X, Y)_\tau = \sqrt{|D|}^{-1}(g_\tau^{-1}X)(g_\tau^{-1}Y)$ とおく。ここに,

$$S = \frac{1}{\sqrt{D}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad g_\tau = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{v} & 0 \\ 0 & \sqrt{v}^{-1} \end{pmatrix}$$

である。$z=x+iy, \tau=u+iv \in \mathfrak{H}$ と $X \in \mathbf{C}^2$ に対し,

$$\phi_{z,\tau}(X) = yv^{-1}((1, -\tau)X)^l \mathbf{e}[x(X, X) + iy(X, X)_\tau]$$

とおく。

H_K の完全代表系 $\{\mathfrak{a}_1, ..., \mathfrak{a}_h\}$ $(h=h_K)$ を 1 つ定める。

$$\mathbf{T}_\Omega(z, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{D}^l}\sum_{j=1}^{h}\Omega^{-1}(\mathfrak{a}_j)\mathrm{N}\mathfrak{a}_j^{1-l/2}\sum_{X \in \mathfrak{a}_j^2}\phi(\mathrm{N}\mathfrak{a}_j)^{-1}{}_{z,\tau}(X) \qquad (z, \tau \in \mathfrak{H})$$

とおく。これは $\{\mathfrak{a}_j\}$ の選び方に依存しない。このとき，次が成立する。

補題 5

(i) $\mathbf{T}_\Omega(z, \tau) = \mathbf{T}_\Omega(-\bar{\tau}, -\bar{z}) = \overline{\mathbf{T}_\Omega(z, \tau)}$.

(ii) $\mathbf{T}_\Omega(\gamma \cdot z, \gamma' \cdot \tau) = j(\gamma, z)^l\overline{j(\gamma', \tau)^l}\,\mathbf{T}_\Omega(z, \tau) \qquad (\gamma, \gamma' \in \Gamma)$.

$f \in S_l(\Gamma)$ のテータリフト $\mathcal{L}_\Omega f$ を次のように定義する。

$$\mathcal{L}_\Omega f(z) = \int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} f(\tau)\mathbf{T}_\Omega(z, \tau)d\mu_l(\tau)$$

また,

$$\mathcal{T}_\Omega(z) = \sum_{j=1}^{h}\Omega(\mathfrak{a}_j)\mathrm{N}\mathfrak{a}_j^{l/2}\mu_j^{-1}\mathbf{T}_\Omega(z, \tau_j)$$

とおく。ここに, $\{\lambda_j, \mu_j\}$ は, $\mathrm{Tr}(\lambda_j^\sigma\mu_j/\sqrt{D}) = \mathrm{N}\mathfrak{a}_j$ となるような $\mathfrak{a}_j$ の Z- 基底であり, $\tau_j = (\lambda_j/\mu_j)^\sigma \in \mathfrak{H}$ である。このとき，次の一連の事実が成立する。これが定理 4 の証明のキーポイントになる。

命題 6

(i) 写像 $f \to \mathcal{L}_\Omega f$ は，$S_l(\Gamma)$ の準同形を定める。

（ii）$f \in S_l(\Gamma)$ に対し，$a_{\mathcal{L}_\Omega f}(1) = P(f, \Omega)$ である。

（iii）f が正規化された Hecke 固有形式ならば，$\mathcal{L}_\Omega f = P(f, \Omega) \cdot f$ が成り立つ。

（iv）$\mathcal{L}_\Omega$ は Hecke 作用素と可換である。

命題 7　f が正規化された Hecke 固有形式ならば，

$$\int_{\Gamma \backslash \mathfrak{H}} f(z)\overline{\mathcal{T}_\Omega(z)}d\mu_l(z) = P(f, \Omega)^2$$

が成立する。

このテーマに関して，次のような問題が残されている。

（i）定理 4 の類数に関する仮定を除くこと。

（ii）$P(f, \Omega)$ の符号分布について研究すること。

2.　Kudla lift の内積公式の研究

f を $U(1, 1)$ 上の保型形式とする。Kudla は，テータリフトによって，f から 3 次ユニタリ群上の保型形式 $L(f)$ を構成した（[1]，[2]）。菅野孝史氏との共同研究において，$L(f)$ の Petersson 内積について研究し，その平方が，f のある $U(1)$- 周期によって表わされることを証明した（[5]）。応用として，Kudla lift $L(f)$ が消えないことの新しい criterion を得た。これは, 以前に菅野氏との別の共同研究（[4]）において，$L(f)$ のフーリエ・ヤコビ展開を研究したときに得られた criterion とは異なるものである。内積公式の証明には，$U(2, 2)\times U(2, 1)$ の Siegel-Weil 公式を用いる（[6]）。

研究セミナー

平成 17 年度秋学期から，奈良女子大学・理学部・上田氏との共催で，ほぼ毎月整数論研究セミナーを開催している。保型形式の研究者を招いて，最新の研究成果の発表および討論を行なっており，本研究にも資するところが多かった。

以下，プログラムを記す。なお，会場はすべて奈良女子大学理学部である。

日時：2005 年 12 月 5 日
講師：山上敦士（京都大）
題目：On p-adic families of automorphic forms over totally real fields

日時：2006 年 1 月 19 日
講師：成田宏秋（Max-Planck-Institute）
題目：Automorphic forms on $Sp(1, q)$ generating quaternionic discrete series

日時：2006 年 2 月 23 日（午前）
講師：上田勝（奈良女子大学）
題目：半整数ウェイトのカスプ形式の空間上の有限群の表現

日時：2006 年 2 月 23 日（午後）
講師：坂田裕（早稲田大学高等学院）
題目：Kohnen-Zagire formula の一般化とその応用

日時：2006 年 3 月 15 日（午後）
講師：林芳樹（京都大学）
題目：指標をもつヤコビ・アイゼンシュタイン級数の空間と，指標をもつ楕円モジュラー・アイゼンシュタイン級数の空間との対応

参考文献

[1] S. Kudla, On certain arithmetic automorphic forms for $SU(1, q)$, Invent. Math., **52** (1979), 1–25.

[2] S. Kudla, On certain Euler products for $SU(2, 1)$, Compositio Math., **42** (1981), 321–344.

[3] A. Murase, CM values and central L-values of modular forms, preprint.

[4] A. Murase and T. Sugano, On the Fourier-Jacobi expansion of the unitary Kudla lift, preprint to appear in Composito Math..

[5] A. Murase and T. Sugano, Inner product formula for Kudla lift, Automorphic forms and zeta functions, in memory of Tsuneo Arakawa, World Scientific, 280–313 (2006).

[6] A. Murase and T. Sugano, A note on Siegel-Weil formula for $(U(2, 1), U(2, 2))$, preprint.

[7] J. L. Waldspurger, Sur les valeurs de certaines fonctions L automorphes en leur centre de symétrie, Compositio Math., **54** (1985), 173–242.