同相群の総合的研究

福　井　和　彦*
牛　瀧　文　宏†
阿　部　孝　順‡

研究要旨

近年，同相群（微分同相群，リプシッツ同相群）や写像の構造について，特に代数的観点および位相的観点から研究を行ってきている。ここでは，最近得られた［8］，［12］の概要を述べる。

［8］においては，R^n に有限群が作用している場合，コンパクトな台を持つ同変 C^∞- 微分同相写像のなす群の 1 次元ホモロジー群について考察している。ここで，群 G の 1 次元ホモロジー群 $H_1(G)$ は G の交換子部分群による商群として定義される。すなわち，$H_1(G)=G/[G,\ G]$ である。

［8］の主定理は次の通りである。

G を有限群，M を連結 C^∞-，G- 多様体とする。$D_G^\infty(M)$ でコンパクトな台をもつ G- 同変なイソトピーによって恒等写像にイソトピックな M の G- 同変 C^∞- 微分同相写像全体の群を表す。R^n を G- 表現空間，$(\mathrm{R}^n)^G$ を R^n の不動点集合とする。また，$Z(G)$ を G- 表現空間 R^n の G- 不変な自己同型群，すなわち，$Z(G)=\{A\in GL_+(n,\ R)\mid A\cdot g=g\cdot A\,(g\in G)\}$ である。$Z(G)_0$ をその単位元を含む成分とする。

このとき，次の主定理を得た。

定理 A

(1) $\dim(\mathrm{R}^n)^G>0$ なら，$D_G^\infty(\mathrm{R}^n)$ は完全群である。すなわち，$H_1(D_G^\infty(\mathrm{R}^n))\cong 0$.

(2) $\dim(\mathrm{R}^n)^G=0$ なら，$H_1(D_G^\infty(\mathrm{R}^n))\cong H_1(Z(G)_0)$.

定理 A の証明の概略を述べる。

写像 $\Phi: D_G^\infty(\mathrm{R}^n)\to GL_+(n,\ \mathrm{R})$ を $\Phi(f)=df(0)$ で定義する。

このとき，

$$\Phi: D_G^\infty(\mathrm{R}^n)\to Z(G)_0$$

*京都産業大学理学部
†京都産業大学理学部
‡信州大学理学部

は全射準同型である。完全系列

$$1 \longrightarrow \ker\Phi \longrightarrow D_G^\infty(\mathrm{R}^n) \xrightarrow{\Phi} Z(G)_0 \longrightarrow 1$$

より，次のホモロジー群に関する完全系列を持つ：

$$\ker\Phi/[\ker\Phi, D_G^\infty(\mathrm{R}^n)] \longrightarrow H_1(D_G^\infty(\mathrm{R}^n)) \xrightarrow{\Phi_*} H_1(Z(G)_0) \longrightarrow 1.$$

したがって，定理を示すには

$$\ker\Phi/[\ker\Phi, D_G^\infty(\mathrm{R}^n)]=0.$$

を示せばよい。先ず，G が R^n に半自由に作用している場合を考えよう。このとき，次の命題を得る。

命題 A1　$\ker\Phi=[\ker\Phi, D_G^\infty(\mathrm{R}^n)]$.

証明　任意の $f\in\ker\Phi$ と，$x\in\mathrm{R}^n$ に対して $L_c(x)=cx$（$0<c<1$）で定義される縮小写像 $L_c\in Z(G)_0$ をとる。合成写像 $f\circ L_c$ の微分を考えると，$d(f\circ L_c)(0)=cI_n$ が成り立つ。ここで，I_n は単位行列。

このとき，$d(f\circ L_c)(0)$ は Sternberg（The structure of local homeomorphisms, II, Amer. Jour. of Math., **80**（1958））の条件（I）と（II）を満たしている。したがって，$R\in D^\infty(\mathrm{R}^n, 0)$ が存在して 0 の近傍で等式 $R\circ f\circ L_c\circ R^{-1}=L_c$ を満たす。

ここで，R は一般に G- 同変でないが $dR(0)=I_n$ を満たしていることに注意する。

$x\in\mathrm{R}^n$ に対して，$\tilde{R}(x)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}g^{-1}\cdot R(g\cdot x)$（ここで，$|G|$ は G の位数）とおくと $\tilde{R}:\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^n$ は C^∞ 微分可能で原点 0 を保存している。0 での $\tilde{R}$ の微分をとると

$$d\tilde{R}(0)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}g^{-1}\cdot dR(0)\cdot g=I_n.$$

したがって，$\tilde{R}$ は 0 の近傍で C^∞- 微分同相写像である。さらに，$\tilde{R}$ は G- 同変になる。

このとき，0 の近傍で

$$\begin{aligned}
L_c\circ\tilde{R}(x) &= L_c\Big(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}g^{-1}\cdot R(g\cdot x)\Big)\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}g^{-1}\cdot L_c(R(g\cdot x))\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}g^{-1}\cdot(R\circ f\circ L_c(g\cdot x))\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}g^{-1}\cdot R(g\cdot(f\circ L_c(x)))\\
&= \tilde{R}(f\circ L_c(x)).
\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって，$L_c\circ\tilde{R}=\tilde{R}\circ f\circ L_c$ である。すなわち，$f=\tilde{R}^{-1}\circ L_c\circ\tilde{R}\circ L_c^{-1}$.
これは f が 0 の近傍で $[\ker\Phi, D_G^\infty(\mathrm{R}^n)]$ の元であることを示している。

0 の近傍の外では G の作用は自由であるから，Thurston の定理（Foliations and group of diffeo-

morphisms, Bull. Amer. Math. Soc., 80（1974））により，交換子の積で表すことが出来る。

次に $\dim(\mathrm{R}^n)^G>0$ の場合を考える。このとき，G は $O(p)$ の有限部分群であり，G が R^p に線形に原点のみを孤立特異点に持つように作用しており，R^{n-p} には自明に作用しているとしてよい。

定理 A2　このとき，$D_G^\infty(\mathrm{R}^p\times\mathrm{R}^{n-p})$ は完全群である。

定理 A2　の証明には坪井の注意，Sternberg の定理および阿部―福井の手法を使う。詳細は省略する。

定理 A の証明は命題 A1，半自由な場合の証明および定理 A2 を帰納的に使って示す。

R^n を次のように G の規約成分に分解する。

$$\mathrm{R}^n=\oplus_{i=1}^d k_iV_i.$$

ここで，V_i は各々 G の規約表現空間，k_i は正の整数である。このとき，$Hom_G(V_i)$ を V_i の G- 不変な準同型写像のなす集合とすると，$\dim Hom_G(V_i)=1$，２，または 4 が知られている。したがって，定理 A より次を得る。

系 B　$H_1(Z(G)_0)\cong\mathrm{R}^d\times\overbrace{U(1)\times\cdots\times U(1)}^{d_2},$

ここで，d_2 は $\dim Hom_G(V_i)=2$ を満たす V_i の数である。

次に主結果たちの応用を述べる。

系 C　R^n を位数 2 の巡回群 Z_2 の表現空間で原点のみを孤立特異点として持つとする。
このとき，$H_1(D_{\mathrm{Z}_2}^\infty(\mathrm{R}^n))\cong\mathrm{R}.$

証明は $Z(\mathrm{Z}_2)_0=GL_+(n,\ \mathrm{R})$ から従う。

$n=2$ の場合を考える。このとき，$G\cong\mathrm{Z}_k(k\geq 2)$ または $\mathrm{D}_\ell(\ell\geq 1)$ である。ここで，Z_k は位数 k の回転群，D_ℓ は位数 ℓ の二面体群である。このとき，

系 D

$$H_1(D_G^\infty(\mathrm{R}^2))\cong\begin{cases}\mathrm{R} & (G\cong\mathrm{Z}_2\text{ のとき})\\ \mathrm{R}\times U(1) & (G\cong\mathrm{Z}_n\,(n\geq 3)\text{ のとき})\\ 0 & (G\cong\mathrm{D}_1\text{ のとき})\\ \mathrm{R}^2 & (G\cong\mathrm{D}_2\text{ のとき})\\ \mathrm{R} & (G\cong\mathrm{D}_\ell\,(\ell\geq 3)\text{ のとき})\end{cases}$$

証明　$G \cong \mathbf{Z}_2$ の場合は系 C から従う。$G \cong \mathbf{Z}_n (n \geq 3)$ の場合，$Z(G)_0 \cong \mathbf{R} \times SO(2)$，したがって $H_1(D_G^\infty(\mathbf{R}^2)) \cong \mathbf{R} \times SO(2)$。$G \cong \mathbf{D}_1$ の場合，定理 A(1)からしたがう。$G \cong \mathbf{D}_\ell (\ell \geq 3)$ の場合，$Z(G)_0 \cong \mathbf{R}$ であるから，$H_1(D_G^\infty(\mathbf{R}^2)) \cong \mathbf{R}$ が従う。

軌道体への応用

$D^\infty(M)$ を C^∞- 軌道体 M のコンパクトな台を持つイソトピーにより恒等写像にイソトピックな C^∞-微分同相写像からなる群とする。

定義 E　点 $p \in M$ が**孤立特異点**であるとは G_p が $\mathbf{R}^n$ の開集合 $\tilde{U}_p$ に $\tilde{p}$ のみを孤立特異点をもつように作用しているときをいう。ここで，$\tilde{U}_p$ は π により M の座標近傍に対応し，$\pi_i(\tilde{p}) = p$ である。

このとき，上記主定理たちから次の定理を得る。

定理 F　M を C^∞- 軌道体，p_1，…，p_k を M のすべての孤立特異点とする。このとき，

$$H_1(D^\infty(M)) \cong H_1(Z(G_{p_1})_0) \oplus \cdots \oplus H_1(Z(G_{p_k})_0).$$

コンパクト・ハウスドルフ葉層構造への応用

(M, F) を C^∞ 葉層構造とする。$D^\infty(M, F)$ $(D_L^\infty(M, F))$ で葉層（葉）を保ちコンパクトな台を持つ M の C^∞ 微分同相写像の群の連結成分とする。

先ず最初に坪井，Rybicki による次の定理をあげる。

定理 G　$D_L^\infty(M, F)$ は完全群である。

ここでは，コンパクト・ハウスドルフ葉層構造に対する $D^\infty(M, F)$ の 1 次元ホモロジー群を考察する。余次元 q のコンパクト・ハウスドルフ葉層構造には Epstein による次のような構造定理がある。

定理 H　F を余次元 q コンパクト・ハウスドルフ C^∞ 葉層構造とする。このとき，一般葉 L_0 が存在して以下を満たす：

任意の葉 L に対して，充満な L の近傍 $U(L)$ と $O(q)$ の有限部分群 $G(L)$ が存在して $L_0 \times_{G(L)} D^q$ と $U(L)$ は葉層を保つ C^∞ 微分同相写像により微分同相である。

定義 I　F の葉 L が**特異葉**であるとは $G(L)$ が非自明なときをいう。特異葉 L が孤立特異葉であるとは $G(L)$ の D^q への作用が原点のみを孤立特異点として持つときをいう。

定理 J　F を M のコンパクト・ハウスドルフ葉層構造とする。L_1，…，L_k を F のすべての孤立特異葉とする。このとき，

$$H_1(D^\infty(M,F)) \cong H_1(Z(G(L_1))_0) \oplus \cdots \oplus H_1(Z(G(L_k))_0).$$

余次元1の場合を考える。

定理K F を M の余次元1コンパクト葉層構造とする。

(1) F が横断的向き付け可能であるなら，$D^\infty(M,\ F)$ は完全群である。

(2) F が横断的向き付け不可能であるなら，$H_1(D^\infty(M,\ F)) \cong \mathrm{R} \times \mathrm{R}$.

次に余次元2の場合を考える。

定理L F を M の余次元2コンパクト葉層構造とする。

F が n_1 個のホロノミー Z_2 をもつ特異葉，n_2 個のホロノミー $\mathrm{Z}_p(p \geq 3)$ をもつ特異葉，n_3 個のホロノミー D_2 および n_4 個のホロノミー $\mathrm{D}_r(r \geq 3)$ をもつ特異葉をもつと仮定する。このとき，

$$H_1(D^\infty(M,F)) \cong \mathrm{R}^{n_1+n_2+2n_3+n_4} \times (S^1)^{n_2}.$$

次に［12］の概要を述べよう。

M，N をリプシッツ多様体，$C_{LIP}(M,\ N)$ をリプシッツ写像の空間とする。位相はコンパクト開リプシッツ位相が入っているとする（［2］，［3］）。このとき，次の定理を得た。

定理M M がコンパクトのとき，リプシッツはめ込み，埋め込みおよび沈め込みの集合は $C_{LIP}(M,\ N)$ の中で開集合である。

注意N M がコンパクトでないとき，定理Mは成り立たない。

定理Mの系として次の定理が成り立つ。これは所謂“逆写像定理”のリプシッツ版である。

定理O $H_{LIP}(M)$ で M のリプシッツ同相写像の集合とする。M がコンパクトのとき，$H_{LIP}(M)$ は $C_{LIP}(M,\ N)$ の中で開集合である。

次に M がコンパクトでないときを考察しよう。

リプシッツ写像の空間 $C_{LIP}(M,\ N)$ のリプシッツ強位相を入れると定理Mと同じ結果を得る。

定理P M がコンパクトでないとき，リプシッツはめ込み，埋め込みおよび沈め込みの集合はリプシッツ強位相の下で $C_{LIP}(M,\ N)$ の中で開集合である。

研究集会

平成16年12月21日（火），22日（水）の２日間，本研究に関する情報交換やさらなる発展を目指して，「同相群とその周辺」と題して研究集会を本学理学部（２号館）会議室で開催した。他大学等から23名の参加者を得，９つの講演に対して活発な議論が重ねられた。どの講演も我々にとって有益なものであったが，特に浅岡氏，松岡氏の同相写像に対する最近の話題についての講演は興味深かった。また，森氏や中居氏，松田氏の意欲的な研究には刺激されるものがあった。坪井氏，矢ケ崎氏，三松氏の講演は我々の研究と密接に関連していて有益な暗示が得られた。今後の発展が期待される。

以下，プログラムを記す。

「同相群とその周辺」

日時平成16年12月21日（火），22日（水）

場所京都産業大学理学部（２号館）会議室（３階）

プログラム

12月21日（火）

午前　座長：福井　和彦（京都産業大学）

９：50－10：50　浅岡　正幸（京都大学）

Newhouse 領域の generic な力学系の性質について

11：10－12：10　松岡隆（鳴門教育大学）

不動点の分岐における分枝の位相的性質について

午後　座長：阿部　孝順氏（信州大学）

13：30－14：30　矢ヶ崎　達彦（京都工芸繊維大学）

Homotopy types of groups of measure-preserving homeomorphisms on noncompact 2-manifolds

14：50－15：50　森　淳秀（大阪大学）

接触埋め込みについて

16：10－17：10　三松　佳彦（中央大学）

保体積微分同相の無限小流

12月22日（水）

午前　座長：浅岡　正幸氏（京都大学）

９：50－10：50　松田　能文（東京大学）

Groups acting on the circle without fixed points

11：10－12：10　中居　功（お茶の水大学）・柳井　佳奈（お茶の水大学）

Quest for relations in Diff（C, 0）

午後　座長：伊藤　敏和氏（龍谷大学）

13：30－14：30　阿部　孝順（信州大学）・福井　和彦（京都産業大学）

可微分軌道体の微分同相群の構造とその応用

14：50－15：50　坪井　俊（東京大学）

実解析的微分同相群の完全性について

また，平成16年８月22日（日）から24日（火）の３日間，本プロジェクトの一貫として龍谷大学の伊藤敏和氏と共同で，「海山微分トポロジー」と題して研究集会を三重県海山町の長浜集会所で開催した。他大学等から10数名の参加者を得，10の講演に対して活発な議論が重ねられた。どの講演も我々にとって有益なものであった。

以下，プログラムを記す。

「海山微分トポロジー」

日時　平成16年８月22日（日）― 24日（火）

場所　長浜集会所：三重県北牟婁郡海山町引本浦長浜

プログラム

８月22日（日）

15：00－16：30　矢ケ崎　達彦（京都工芸繊維大学）

Homotopy types of groups of measure-preserving homeomorphisms of noncompact 2-manifolds

17：00－18：00　福井　和彦（京都産業大学）

同変微分同相群について

８月23日（月）

９：00－10：30　森　淳秀（大阪大学）

組みひもをなす３次元接触多様体

10：40－11：20　大久保　範彦（大阪大学）

５次元トーラス上の接触構造の新しい構成法

11：30－12：10　中西　靖忠（岐阜経済大学）

Introduction to Nambu Lie groups

14：30－16：00　足助　太郎（東京大学）

複素二次特性類の無限小微分の構成について

16：30－18：00　坪井　俊（東京大学）

実解析的同相群について

８月24日（火）

９：00－10：20　佐藤　肇（名古屋大学）

多変数のシュワルツ微分と微分方程式

10：30－11：30　篠原　知子（都立高専）・山岸　義和（龍谷大学）

２変数緩和ニュートン法で重根に対して速く収束する初期値

11：40－12：40　伊藤　敏和（龍谷大学）

複素ロジスティック方程式の経済学への応用

References

[1] K. Abe and K. Fukui, On the structure of the group of equivariant diffeomorphisms of G-manifolds with codimension one orbit, Topology, **40** (2001), 1325–1337.

[2] K. Abe and K. Fukui, On the structure of the group of Lipschitz homeomorphisms and its subgroups, J. Math. Soc. Japan, **53-3** (2001), 501–511.

[3] K. Abe and K. Fukui, On the structure of the group of Lipschitz homeomorphisms and its subgroups II, J. Math. Soc. Japan, **55-4** (2003), 947–956.

[4] K. Abe and K. Fukui, On the first homology of automorphism groups of manifolds with geometric structures, CEJM **3** (**3**) (2005), 516–528.

[5] K. Abe and K. Fukui, On the first homology of the group of diffeomorphisms of smooth orbifolds with isolated singularities, preprint.

[6] K. Abe and K. Fukui, On the first homology of the group of foliation preserving diffeomorphisms for codimension one compact foliations, preprint.

[7] K. Abe and K. Fukui, On the structure of the group of diffeomorphisms of manifolds with boundary and its applications, preprint.

[8] K. Abe and K. Fukui, The first homology of the group of equivariant diffeomorphisms and its applications, preprint.

[9] K. Abe, K. Fukui and T. Miura, On the first homology of the group of equivariant Lipschitz homeomorphisms, submitted.

[10] K. Fukui and E. Hirai, A note on the first homology of the group of polynomial automorphisms of the coordinate space, Sci. Math. Japonicae, 56-2 (2002), 287–291.

[11] K. Fukui and H. Imanishi, On commutators of foliation preserving Lipschitz homeomorphisms, J. Math. Kyoto Univ., **41-3** (2001), 507–515.

[12] K. Fukui and T. Nakamura, A topological property of Lipschitz mappings, Topology and its Applications, 148 (2005), 143–152.

[13] S. Kono and F. Ushitaki, Geometry of finite spaces and equivariant finite spaces, Current Trends in Transformation Groups (K-theory Monogragh Series) (2002), 53–63.