同相群の総合的研究

福　井　和　彦*
牛　瀧　文　宏†
阿　部　孝　順‡

研究要旨

近年、同相群（微分同相群、リプシッツ同相群）の構造について、特に代数的観点および位相的観点から研究を行ってきている。ここでは、最近得られた[５]、[６]の概要を述べる。

[５]においては、葉層を保つ微分同相群の１次元ホモロジー群について考察している。ここで、群 G の１次元ホモロジー群 $H_1(G)$ は G の交換子部分群による商群として定義される。すなわち、$H_1(G)=G/[G,\ G]$ である。

M を境界を持たないコンパクト、連結 C^∞-多様体、F を M 上の余次元 qC^∞-葉層とする。このとき、C^∞-微分同相写像 $f: M\to M$ が葉層を保つとは、M の各点 x に対して、x を通る葉が $f(x)$ を通る葉に写されるときをいう。また、F がコンパクト葉層であるとは、F に属するすべての葉がコンパクトであるときをいう。葉層を保つイソトピーによって恒等写像にイソトピックな葉層を保つ C^∞-微分同相写像全体の群を $D^\infty(M,\ F)$ と書く。このとき、次の定理を得た。

定理 A　F を M 上の余次元１コンパクト葉層であるとする。このとき、

(1) F が横断的向き付け可能なら、$D^\infty(M,\ F)$ は完全群である。すなわち、$D^\infty(M,\ F)$ の１次元ホモロジー群 $H_1(D^\infty(M,\ F))=0$ である。

(2) F が横断的向き付け不可能なら、$D^\infty(M,\ F)$ の１次元ホモロジー群 $H_1(D^\infty(M,\ F))\cong\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ である。

証明の概略を述べる。F が横断的向き付け可能なとき、葉空間 M/F は S^1 と同相になり、上への準同型写像 $p_*: D^\infty(M,\ F)\to D^\infty(S^1)$ が存在し、M. Hermann, W. Thuston の結果より $D^\infty(S^1)$ は完全、坪井、T. Rybicki の結果より ker p_* は完全、したがって(1)を得る。F が横断的向き付け不可能なときは、準同型写像 $p_*: D^\infty(M,\ F)\to D^\infty([0,\ 1])$ が存在する。このときは、上への写像ではない。葉空間 M/F は軌道体 $[0,\ 1]$ 上の特異ファイバーをもつファイバー束と考えることが出来る。

*京都産業大学理学部
†京都産業大学理学部
‡信州大学理学部

ここでは、我々の結果（[4]）および J. Kalliongis-McCullough の結果を使う。

[6]においては、境界をもつ C^∞-多様体の C^∞-微分同相群の構造について考察し、その結果を G-多様体に応用している。

M を境界をもつ連結 C^∞-多様体とし、$D^\infty(M)$ をコンパクトな台をもつイソトピーによって恒等写像にイソトピック C^∞-微分同相写像全体の群とする。このとき、次を得た。

定理 B dim $M\geq 2$ なら、$D^\infty(M)$ は完全群である。

注意 境界を持たない C^∞-多様体に対しては、M. Herman や W. Thuston により $D^\infty(M)$ は完全群であることが示されている。また、dim $M=1$ で境界をもつときは、福井により、M が $[0,\ 1]$ か $[0,\ \infty]$ により $H_1(D^\infty(M))$ は $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ か $\mathbf{R}$ に同型であることが示されている。

証明の概略を述べる。局所化して $D^\infty(\mathbf{R}^m_+)$ について、考察すればよい。ここで、$\mathbf{R}^m_+=\{(x_1,\ \cdots,\ x_m)\,|\,x_m\geq 0\}$。$D^\infty(\mathbf{R}^m_+)$ の元 f を上手く分解し、f はある葉層を保つ C^∞-微分同相写像と他の C^∞-微分同相写像の合成に分解出来る。葉層を保つ C^∞-微分同相写像に対しては坪井、T. Rybicki の結果より、他の C^∞-微分同相写像に対しては福井や阿部 - 福井の結果を使う事により、これらの元が $D^\infty(\mathbf{R}^m_+)$ の元の交換子の積で表されることが分かる。

定理 B は次のような結果に拡張される。N を M の固有部分多様体とする。$D^\infty(M,\ N)$ をコンパクトな台をもつ N を保つイソトピーによって恒等写像にイソトピックな N を保つ M の C^∞-微分同相写像全体の群とする。このとき、

定理 C dim N≥ 1 なら、$D^\infty(M,\ N)$ は完全群である。

定理 B を応用して、G-多様体の同変 C^∞-微分同相群の構造を解明することが出来る。

G をコンパクトリー群、M を連結 $C^\infty G$-多様体とする。$D^\infty_G(M)$ をコンパクトな台をもつ同変イソトピーによって恒等写像にイソトピックな同変 C^∞-微分同相群とする。

ρ_n を $U(n)$ の標準 $2n$ 次元表現、θ を自明な 1 次元表現空間、$(S^{2n+1},\ \rho_n\oplus 2\theta)$ を $U(n)$ の $2n+2$ 次元表現空間 $\rho_n\oplus 2\theta$ の単位球面とする。

このとき、

定理 D $U(n)$-多様体 $(S^{2n+1},\ \rho_n\oplus 2\theta)$ に対して、$D^\infty_{U(n)}(S^{2n+1})$ は完全群である。

$W=W^{2n-1}(d)$ $(n\geq 2,\ d\geq 0)$ を $(z_0,\ z_1,\ \cdots,\ z_n)\in\mathbf{C}$ に対して、

$$z_0^d+z_n^2=0,\ |z_0|^2+|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2=1$$

で与えられるブリースコーン（Brieskorn）多様体とする。このとき、$O(n)$ は次のように W に作用

する。

$A \in O(n)$ と $(z_0, z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}$ に対して、

$$A \cdot (z_0, z_1, \cdots, z_n) = (z_0, A \cdot (z_1, \cdots, z_n))。$$

このとき、

定理E　$D^{\infty}_{O(n)}(W)$ は完全群である。

研究集会

平成16年2月23日(月)、24日(火)の2日間、本研究に関する情報交換やさらなる発展を目指して、「同相群とその周辺」と題して研究集会を本学理学部（2号館）会議室で開催した。他大学等から24名の参加者を得、8つの講演に対して活発な議論が重ねられた。どの講演も我々にとって有益なものであったが、特に笠川氏、坪井氏、矢ケ崎氏、三松氏の講演は我々の研究と密接に関連していて有益な暗示が得られた。今後の発展が期待される。

以下、プログラムを記す。

プログラム

2月23日(月)

午前　座長：浅岡　正幸氏（京都大学）

10：00-11：00　金　英子（京都大学）

Forcing relation and Nielsen-Thurston classification of braid type

11：20-12：20　中山　裕道（広島大学）

曲面の微分同相写像の極小集合

午後　座長：牛瀧　文宏氏（京都産業大学）

13：30-14：30　笠川　良司（日本大学）

フラックス準同型の拡張について

14：50-15：50　阿部　孝順（信州大学）・福井　和彦（京都産業大学）

境界をもつ多様体の微分同相群の構造とその応用

16：10-17：10　坪井　俊（東京大学）

解析的微分同相群の完全性について

2月24日（火）

午前　座長：伊藤　敏和氏（龍谷大学）

10：00-11：00　矢ケ崎　達彦（京都工芸繊維大学）
Groups of measure-preserving homeomorphisms with compact support on noncompact 2-manifolds

11：20-12：20　足助　太郎（京都大学）
複素余次元１の葉層構造の存在について

午後　座長：阿部　孝順氏（信州大学）

13：30-14：30　三松　佳彦（中央大学）
On group of germs of area preserving diffeomorphisms at 0 of R^2

References

[1] K. Abe and K. Fukui, On the structure of the group of equivariant diffeomorphisms of G-manifolds with codimension one orbit, Topology, **40** (2001), 1325-1337.

[2] K. Abe and K. Fukui, On the structure of the group of Lipschitz homeomorphisms and its subgroups, J. Math. Soc. Japan, **53-3** (2001), 501-511.

[3] K. Abe and K. Fukui, On the structure of the group of Lipschitz homeomorphisms and its subgroups II, J. Math. Soc. Japan, **55-4** (2003), 947-956.

[4] K. Abe and K. Fukui, On the first homology of the group of diffeomorphisms of smooth orbifolds with isolated singularities, preprint.

[5] K. Abe and K. Fukui, On the first homology of the group of foliation preserving diffeomorphisms for codimension one compact foliations, preprint.

[6] K. Abe and K. Fukui, On the structure of the group of diffeomorphisms of manifolds with boundary and its applications, preprint.

[7] K. Abe, K. Fukui and T. Miura, On the first homology of the group of equivariant Lipschitz homeomorphisms, preprint.

[8] K. Fukui and H. Imanishi, On commutators of foliation preserving Lipschitz homeomorphisms, J. Math. Kyoto Univ., **41-3** (2001), 507-515.

[9] K. Fukui and T. Nakamura, Algebraic and topological properties of Lipschitz mappings, submitted.

[10] S. Kono and F. Ushitaki, Geometry of finite spaces and equivariant finite spaces, Current Trends in Transformation Groups (K-theory Monogragh Series) (2002), 53-63.