多重ゼータ値・多重L値の関係式，多重ゼータ値にまつわる代数の探究と計算機代数

平成29年4月19日

田　中　立　志*

要　旨

多重ゼータ値の双対公式を一般複シャッフル関係式から導くという問題（双対公式導出問題）は意外にも難しく，これまでに知られている結果がほとんどない。本研究の成果として，双対公式の一部が一般複シャッフル関係式の部分族である導分関係式に帰着できたので，その報告をする。

キーワード：多重ゼータ値，双対公式，導分関係式，一般複シャッフル関係式，Risa/asir

1. 研究の背景と目的

Euler-Zagier 型の（古典的な）多重ゼータ値は，多重L値，q-類似版，p進版など形を変えた対象の導入とその研究が並行して行われてきた。現在では，多重 Eisenstein 級数，金子-Zagier の有限多重ゼータ値など，さらなる拡張・変形と，その性質に関する研究が進められている。本研究では古典的な多重ゼータ値のみからは捉えにくい代数的現象を，そのさまざまな拡張・変形版を介して解明することを目的とする。特に，最近新たに導入された「arborified 多重ゼータ値」について重点的に調べる。多重ゼータ値の一般導分関係式の arborified 版を介した解釈を探究する。さらに，ホップ代数やオペラッドとの関連など，代数的構造を深く研究し，多重ゼータ値のさらなる拡張の可能性を探る。

2. 研究経過成果報告

自然数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$（$k_1 \geq 2$）に対して，**多重ゼータ値**とは

$$\zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \sum_{m_1 > m_2 > \cdots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \cdots m_n^{k_n}}$$

で与えられる。$k_1 + \cdots + k_n$ を**重さ**，n を**深さ**，$\#\{i \mid k_i > 1\}$ を**高さ**と呼ぶ。

多重ゼータ値の双対公式や導分関係式を記述するために，Hoffman によって導入された多重ゼータ値の代数的定式化を与える。$\mathfrak{H} = \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$ を $\mathbb{Q}$ 上の2変数 x，y の非可換多項式環とし，$\mathfrak{H}^1$ と $\mathfrak{H}^0$ をそれぞれ $\mathfrak{H}$ の部分代数 $\mathbb{Q} + \mathfrak{H}y$, $\mathbb{Q} + x\mathfrak{H}y$ とする。$\mathbb{Q}$-線形写像 $Z : \mathfrak{H}^0 \to \mathbb{R}$ を $Z(1) = 1$ および

* 京都産業大学理学部

$$Z(x^{k_1-1}yx^{k_2-1}y\cdots x^{k_n-1}y)=\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)$$

によって定義する。

τ を $\mathfrak{H}$ 上の反自己同型で，$\tau(x)=y$，$\tau(y)=x$ で定まるものとする。τ は $\mathfrak{H}^0$ を保存する。多重ゼータ値の**双対公式**は

$$(1-\tau)(w)\in\ker Z,\quad \forall w\in\mathfrak{H}^0$$

と述べられる。

∂ を $\mathfrak{H}$ から $\mathfrak{H}$ への $\mathbb{Q}$- 線形写像でライプニッツ・ルール

$$\partial(ww')=\partial(w)w'+w\partial(w')$$

をみたすとする。このような ∂ を $\mathfrak{H}$ 上の導分といい，$\mathfrak{H}$ の生成元 x，y の像によって一意的に定まる。$z=x+y$ とする。任意の $n\geq 1$ に対して，導分 $\partial_n:\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}$ を $\partial_n(x)=xz^{n-1}y$ および $\partial_n(y)=-xz^{n-1}y$ によって定義する。$\partial_n(\mathfrak{H})\subset\mathfrak{H}^0$ が直ちにわかる。多重ゼータ値の**導分関係式**は

$$\partial_n(x\mathfrak{H}y)\subset\ker Z\quad(n\geq 1)$$

と述べられる。

双対公式の族と導分関係式の族との間に包含関係はないことは計算実験的に分かっているが，交わりがあることも分かっている。双対公式導出問題の先行研究として，梶川 (2006) というものがある。そこでは，重さ・深さ・高さを固定した多重ゼータ値の和に関する双対公式は導分関係式に帰着できるというものである。本研究で得られたものは，それとは異なる系列で，重さ・深さおよび k_l を固定した多重ゼータ値の和に関する双対公式も導分関係式に帰着できるというものの，部分的解決である。（本研究成果は，川﨑菜穂氏との共同研究である。）数値計算代数システム Risa/asir を用いた計算実験によれば，一般的に成り立つだろうと予想できるが，これは今後の課題である。

具体的には以下の通り。Θ を $\hat{\mathfrak{H}}=\mathbb{Q}\langle\langle x,\ y\rangle\rangle$（$\mathfrak{H}$ の完備化）上の写像で

$$\Theta=\exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{\partial_n}{n}\right)$$

で定義する。この Θ は次数付き環 $\mathbb{Q}[[\partial_1,\partial_2,\ldots]]$（ただし，$\deg(\partial_n)=n$）の元である。$\theta_l$ を Θ の l 次斉次部分とする。たとえば，

$$\theta_1=\partial_1,$$
$$\theta_2=\frac{1}{2}(\partial_2+{\partial_1}^2),$$
$$\theta_3=\frac{1}{6}(2\partial_3+3\partial_2\partial_1+{\partial_1}^3)$$

など。θ_l は自然に $\hat{\mathfrak{H}}$ 上に拡張される。このとき，得られた定理は以下のものである：

定理　$\hat{\mathfrak{H}}^0$（$\mathfrak{H}^0$ の完備化）上で，次の 2 つの式が成り立つ：

(i)　任意の正の整数 m に対し，

$$
\begin{aligned}
& (1-\tau)\left(x^m y \frac{1}{1-x} y\right) \\
= \quad & (\Theta-1)\left(x^m y\left(1-\frac{1}{1-x} y\right)\right) \\
& -\sum_{i=1}^{m-1} \theta_i\left(x^{m-i} y+\left(x \frac{1}{1-y}\right)^{m-i} x y-\left(x \frac{1}{1-y}\right)^{m-i-1} x y\right).
\end{aligned}
$$

(ii) 任意の正の整数 n に対し，

$$
\begin{aligned}
& (1-\tau)\left(x y\left(\frac{1}{1-x} y\right)^{n-1}\right) \\
= \quad & (\Theta-1)\left(x \frac{1-x^{n-1}}{1-x} y\left(1-\frac{1}{1-x} y\right)\right)-\sum_{l=1}^{n-2} \theta_l\left(x \frac{1-x^{n-l-1}}{1-x} y\left(1-\frac{1}{1-x} y\right)\right).
\end{aligned}
$$

ただし，空の和は 0 とみなす。

この定理の系として，次がわかる：

系　(i) 任意の正の整数 s と非負整数 t に対し，

$$(1-\tau)(x^s y x^t y) \in \sum_{n \geq 1} \partial_n(\mathfrak{H}^0).$$

(ii) 任意の正の整数 s，t（ただし，$s>t \geq 1$）に対し，

$$(1-\tau)\left(\sum_{\substack{w \in \mathfrak{H}^1,\ \deg w=s-2, \\ \deg_y(w)=t-1}} x y w\right) \in \sum_{n \geq 1} \partial_n(\mathfrak{H}^0).$$

ここに，$\deg_y(w)$ は w の y についての次数を表している。

多重ゼータ値の導分関係式の結果から

$$\sum_{n \geq 1} \partial_n(\mathfrak{H}^0) \subset \ker Z$$

である。したがって，

- 個々の 2 重ゼータ値についての双対公式は導分関係式からくる
- $k_1=2$ でかつ重さ・深さを固定した多重ゼータ値の和に関する双対公式は導分関係式からくる

ということを示せたことになる。

3. 本年度の研究活動報告

本年度は，招待講演 2 件を含め，講演を 4 件行った。また，論文を 2 件（1 件は出版予定，もう 1 件は投稿中）したためた。そのほか，海外出張も含め多くの出張を行い，同じ分野の多数の海外・国

内研究者らと研究討論を行い，arborified 多重ゼータ値や，ホップ代数・オペラッドとの関連に関する研究を始めるための足がかりも，徐々に見つかりつつある。

【講演】

(1) Introduction to multiple zeta values and relations among them, Mini-workshop on MZV, Tongji University (Shanghai), 2016.9.14.

(2) Focusing on Kawashima relation and its applications, Mini-workshop on MZV, Tongji University (Shanghai), 2016.9.14.

(3) 多重ゼータ値の組合せ論的側面について，大阪組合せ論セミナー，大阪市立大学梅田サテライト , 2016.12.9.

(4) 多重ゼータ値の双対公式導出問題について, 第 10 回多重ゼータ研究集会＆第 34 回関西多重ゼータ研究会 (共同開催)，近畿大学，2017.2.17.

【論文】

(1) T. Tanaka, On inclusion properties for relations of multiple zeta values: a survey, to appear in RIMS Kokyuroku Bessatsu.

(2) N. Kawasaki, T. Tanaka, On the duality formula and the derivation relation for multiple zeta values, submitted.

Relations for multiple zeta and L values, algebras related with multiple zeta values, and computer algebra

Tatsushi TANAKA

Abstract

Classical multiple zeta values (MZVs) of Euler-Zagier type have been generalized to multiple L values, q-analogue of MZVs, p-adic MZVs, etc. and studied simultaneously. In recent years, more generalizations such as multiple Eisenstein series, finite MZVs of Kaneko-Zagier, etc. have been discovered and investigated. The purpose of this research is to clarify several algebraic phenomena of the classical MZVs that can not be found easily only by studying themselves. In particular, ”arborified MZVs”, which is another discovery in recent years, is selectively investigated. The (quasi-)derivation relation for MZVs in terms of arborified MZVs is studied. Moreover, we study on further possible generalizations of MZVs concerning with Hopf algebras, operads, etc.

Keywords : multiple zeta values, duality, derivation relation, extended double shuffle relation, Risa/asir