

「離散可積分系に基づく汎用性の高い TN 行列の 逆固有値問題ソルバーの開発」研究経過報告

平成 29 年 4 月 20 日受付

赤 岩 香 苗*

要 旨

数値線形代数分野において、行列固有値問題は重要な話題の 1 つである。逆固有値問題の 1 つに指定した固有値をもつ行列を構成する問題がある。最近、報告者らは、離散可積分系と呼ばれる特殊な非線形力学系に基づき、指定した固有値をもつ全非負行列を構成するための手法を提案している。本研究課題では、報告者らのこれまでの手法と離散可積分系のもつ性質を利用して、固有値だけでなく行列の要素を指定することのできる手法を定式化した。

キーワード：逆固有値問題，離散可積分系，全非負行列，離散ハングリー戸田方程式，拡張型離散ハングリー戸田方程式

1. 研究の背景

行列固有値問題は、数値線形代数分野における主要な研究課題である。 m 次正方行列 A に対して $Ax = \lambda x$ を満たす固有値 λ と固有ベクトル x を求める固有値問題は盛んに研究されている。一方、指定した固有値 λ をもつ行列 A を構成する問題を逆固有値問題と呼ぶ。逆固有値問題は、制御における極配置問題や原子構造計算といった工学面で多くの応用がある。逆固有値問題は構成する行列の形や行列のもつべき性質によって分類され、その制約の種類は難易度に大きく影響する。一般に、逆固有値問題は非線形かつ非適切な問題で、固有値問題より難しい問題である [5]。全非負 (totally nonnegative, TN) 行列はすべての小行列式が非負の行列であり、統計数学や確率過程、組合せ論など多くの場面で現れる [4, 6]。全非負行列の逆固有値問題は、建築分野の梁の振動を表す問題に現れることが知られている [8]。しかしながら、単純な相似変形では「すべての小行列式が非負である」という性質 (全非負性) は簡単に崩れてしまうため、全非負行列に対する逆固有値問題を解くことは困難とされてきた。

可積分系は、厳密解を明示的に書き下せる非線形力学系の総称である。特に、時間変数が離散的であるものを離散可積分系と呼ぶ。代表的な離散可積分系の 1 つに、離散戸田方程式がある。離散戸田方程式は、3 重対角行列に対する固有値計算法として有名な商差 (qd) 法の漸化式と等価であること

* 京都産業大学コンピュータ理工学部

が知られている [9]。離散戸田方程式の拡張である離散ハングリー戸田方程式の漸化式から、ヘッセンベルグ型の全非負行列の固有値計算法が定式化されている [7]。

2 研究経過報告

逆固有値問題には、指定した固有値をもつような行列を構成する問題や、固有値だけでなく行列の要素を指定する問題がある。報告者はこれまで、離散可積分系に基づき、3重対角、ヘッセンベルグ、帯といった構造をもつ全非負行列に対する逆固有値問題の解法を提案している [1, 2, 3]。本研究課題では、これまでに提案してきた手法を発展させ、固有値の要素だけでなく行列の一部の要素を指定する逆固有値問題の解法について定式化を行った。具体的には、離散ハングリー戸田方程式の行列式解と、行列式の要素間に成り立つ線形関係式を利用して、所望の固有値と一部の要素をもつヘッセンベルグ行列を構成する方法を開発した。

本研究の成果は、論文“Discrete integrable method for inverse eigenvalue problems for band matrices with prescribed eigenvalues and entries”にまとめ、現在投稿中である。また、本研究は、平成 29 年度科研費若手研究 (B)「新たな離散可積分系の導出と逆固有値問題への応用」において継続していく。

3 本年度の活動報告

1. 国際会議“20th Conference of the International Linear Algebra Society (ILAS2016)”の Mini Symposium “Total positivity”において依頼講演“Construction of totally nonnegative matrices with prescribed eigenvalues via discrete integrable systems”を行った。
2. 指定した固有値と要素をもつ行列を構成する手法について明らかにし、国際学術論文誌に投稿した (吉田晃氏, 近藤弘一氏 (同志社大学) との共同研究)。
3. 福田亜希子氏 (芝浦工業大学), 岩崎雅史氏 (京都府立大学) とともに第 14 回計算数学研究会 (2016 年 12 月 17-19 日) を琵琶湖コンファレンスセンターにて開催した。

謝辞

本研究は、京都産業大学総合学術研究所「特定課題研究 (準備研究支援)」課題番号: E1615 の援助を受けたものである。なお、本研究は、吉田晃氏, 近藤弘一氏 (同志社大学) との共同研究である。

参考文献

- [1] K. Akaiwa, M. Iwasaki, K. Kondo, Y. Nakamura, A tridiagonal matrix construction by the quotient difference recursion formula in the case of multiple eigenvalues, *Pacific J. Math. Indust.* 6 (2014), 21-29.
- [2] K. Akaiwa, Y. Nakamura, M. Iwasaki, H. Tsutsumi, K. Kondo, A finite-step construction of totally nonnegative matrices with specified eigenvalues, *Numer. Algor.* 70 (2015), 469-484.

- [3] K. Akaiwa, Y. Nakamura, M. Iwasaki, A. Yoshida and K. Kondo, An arbitrary band structure construction of totally nonnegative matrices with prescribed eigenvalues, *Numer. Algor.*, DOI: 10.1007/s11075-016-0231-7.
- [4] T. Ando, Totally positive matrices, *Linear Algebra Appl.* 90 (1987), 165–219.
- [5] M. T. Chu, H. Golub, *Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Applications*, Oxford University Press, New York, 2005.
- [6] S. M. Fallat, C. R. Johnson, *Totally Nonnegative Matrices*, Princeton University Press, Princeton, 2011.
- [7] A. Fukuda, E. Ishiwata, Y. Yamamoto, M. Iwasaki, Y. Nakamura, Integrable discrete hungry systems and their related matrix eigenvalues, *Annal. Mat. Pura Appl.* 192 (2013), 423–445.
- [8] G. M. L. Gladwell, Inner totally positive matrices, *Linear Algebra Appl.* 393 (2004), 179–195.
- [9] R. Hirota, S. Tsujimoto, T. Imai, Difference scheme of soliton equation, in: *Future directions of nonlinear dynamics in physical and biological systems*, P. L. Christiansen, J. C. Eilbeck and R. D. Parmentier eds., Plenum, New York (1993), 7–15.

発表リスト

論文

1. K. Akaiwa, A. Yoshida and K. Kondo, Discrete integrable method for inverse eigenvalue problems for band matrices with prescribed eigenvalues and entries, submitted.

発表

1. 赤岩 香苗, 拡張型離散ハングリー戸田方程式に基づく全非負行列の逆固有値問題の解法について, 応用解析研究会～可積分系から計算数学まで～, 天満研修センター・桜ノ宮公会堂, 2016年5月20日.
2. (依頼講演) K. Akaiwa, Y. Nakamura, M. Iwasaki, H. Tsutsumi, A. Yoshida and K. Kondo, Construction of totally nonnegative matrices with prescribed eigenvalues via discrete integrable systems, 20th Conference of the International Linear Algebra Society (ILAS2016), KU Leuven (Belgium), 2016年7月12日.
3. 赤岩 香苗, 零固有値をもつ全非負行列の逆固有値問題の解法についての検討, 応用可積分系若手セミナー, 芝浦工業大学大宮キャンパス, 2016年10月1日.

A method for solving an inverse eigenvalue problem for totally nonnegative matrices based on discrete integrable systems

Kanae AKAIWA

Abstract

The matrix eigenvalue problem is one of the important subjects in numerical linear algebra. A problem of constructing a matrix with prescribed eigenvalues is classified into the inverse eigenvalue problem. Recently, the author and the others proposed an algorithm for constructing a totally nonnegative matrix with prescribed eigenvalues based on nonlinear dynamical systems called discrete integrable systems. In this project, based on the author's previous results, we develop an algorithm for constructing a matrix with prescribed eigenvalues and prescribed entries by using discrete integrable systems.

Keywords : Inverse eigenvalue problem, Discrete integrable system, Totally nonnegative matrix, Discrete hungry Toda equation, Extended discrete hungry Toda equation